TRẮC NGHIỆM VD - VDC

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN RIÊNG

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

A – MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Các bài toán về hàm trị tuyệt đối đã bắt đầu xuất hiện trong đề tham khảo năm 2018 của bộ và sau đó cũng đã trở thành trào lưu trên các diễn đàn, các nhóm, đồng thời xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi thử với các dạng và thường ở mức độ vận dụng, vận dụng cao.

Cực trị hàm số là một đặc tính rất quan trọng của hàm số, giúp chúng ta cùng với tính chất khác của hàm số để khảo sát và vẽ chính xác hoá đồ thị một hàm số, bên cạnh đó có rất nhiều các bài toán liên quan đến cực trị của hàm số. Trong chương trình sách giáo khoa, việc đề cập tới cực trị của hàm số chứa giá trị tuyệt đối còn rất ít, nên học sinh gặp rất nhiều khó khăn khi giải quyết các bài toán về vấn đề này. Chính vì thế, nội dung của chuyên đề này sẽ giúp học sinh một cái nhìn từ chi tiết tới tổng quát các dạng toán thường gặp về cực trị của hàm số chứa giá trị tuyệt đối

B – NỘI DUNG

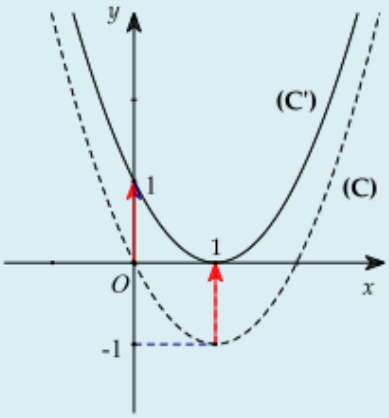
I - MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

1 – Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(x) + a$.

*** Cách vẽ (C') từ (C):** Tịnh tiến đồ thị (C) lên phía trên (theo phương Oy) a đơn vị nếu $a > 0$, tịnh tiến xuống dưới $|a|$ đơn vị nếu $a < 0$.

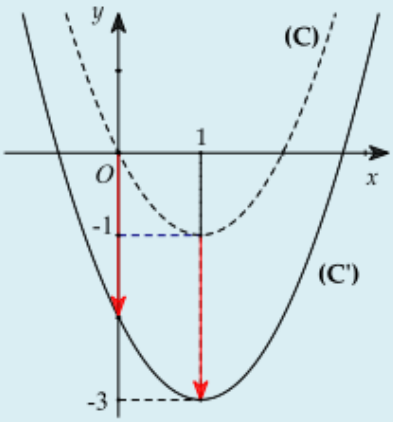
Ví dụ minh hoạ:

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^2 - 2x$ suy ra đồ thị $(C'): y = x^2 - 2x + 1$.



Do $1 > 0 \Rightarrow$ Đồ thị (C') có được bằng cách tịnh tiến (C) lên phía trên 1 đơn vị.

b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^2 - 2x$ suy ra đồ thị $(C'): y = x^2 - 2x - 2$..



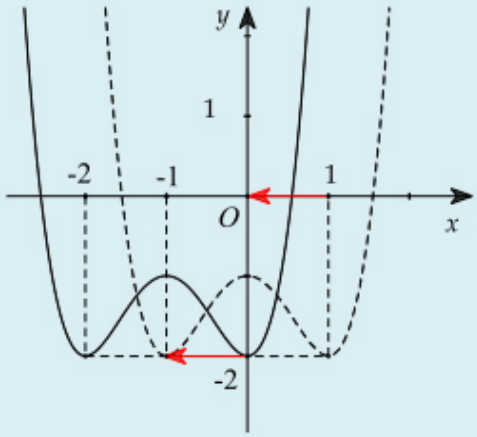
Do $-2 < 0 \Rightarrow$ Đồ thị (C') có được bằng cách tịnh tiến (C) lên phía dưới 2 đơn vị.

2 – Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(x + a)$.

*** Cách vẽ (C') từ (C):** Tịnh tiến đồ thị $(C): y = f(x)$ sang phải (theo phương Ox) $|a|$ đơn vị nếu $a < 0$, tịnh tiến sang trái a đơn vị nếu $a > 0$.

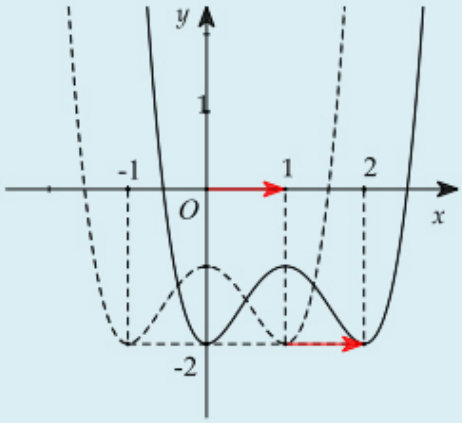
Ví dụ minh hoạ:

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(x+1)$.



Do $1 > 0 \Rightarrow$ Đồ thị (C') có được bằng cách tịnh tiến (C) qua bên trái 1 đơn vị.

b) Từ đồ thị $(C)\ y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(x-1)$.



Do $-1 < 0 \Rightarrow$ Đồ thị (C') có được bằng cách tịnh tiến (C) qua bên phải 1 đơn vị.

NHẬN XÉT

Số điểm cực trị của hàm số $f(ax+b)+c$ (nếu có) bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$

3 - Dạng 3

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

- *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị phía trên *Ox*</u> của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>phía dưới *Ox*</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

4 - Dạng 4:

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

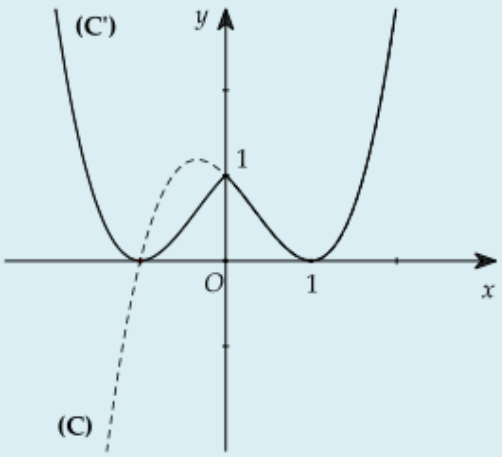
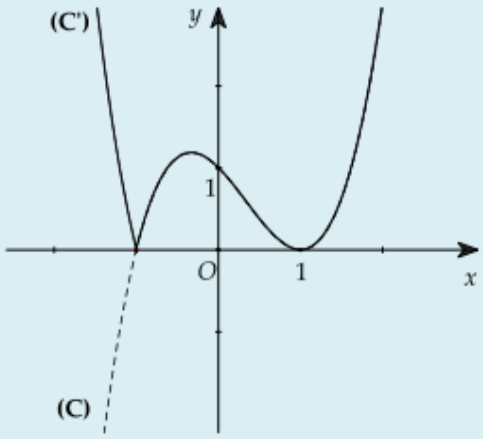
- *Giữ nguyên* phần đồ thị <u>bên phải *Oy*</u> của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>bên trái *Oy*</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$

Bước 1: Từ (C) suy ra đồ thị (C_1) đồ thị $y = f(|x|)$

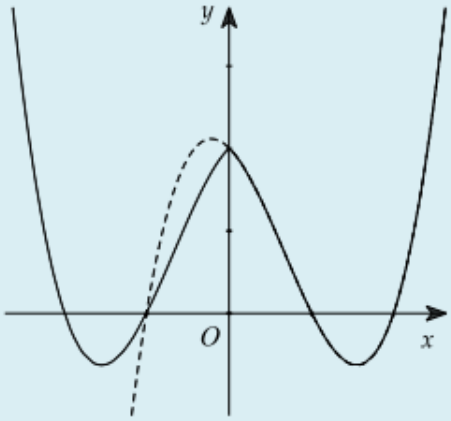
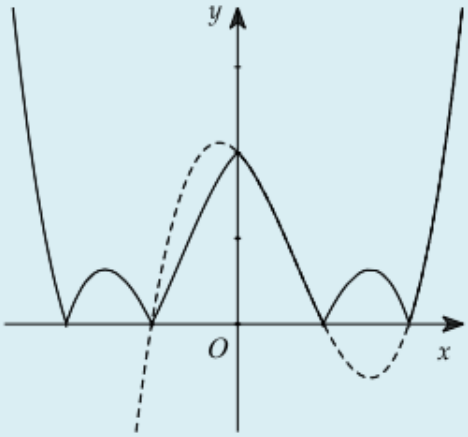
Bước 2: Từ (C_1) suy ra đồ thị (C') $y = |f(|x|)|$

<u>Ví dụ minh hoạ 1</u>: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) $(C'): y = f(|x|) = |x|^3 - x^2 - |x| + 1$	b) $(C'): y = |f(x)| = |x^3 - x^2 - x + 1|$
	

<u>Ví dụ minh hoạ 2</u>:

Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(|x|)| = ||x|^3 - 2x^2 - |x| + 2|$.

Bước 1: Từ $(C): y = f(x)$ suy ra $(C_1): y = f(|x|)$.	*Bước 2: Từ $(C_1): y = f(|x|)$ suy ra $(C'): y = |f(|x|)|$.*
	

NHẬN XÉT

- **Số điểm cực trị của hàm số** $\left|f(x)\right|$ **là** $m+n$
  + m **là số điểm cực trị của hàm số** $y=f(x)$
  + n **là số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình** $f(x)=0$
- **Số điểm cực trị của hàm số** $f(|x|)$**, gọi a là số cực trị dương của hàm số** $y=f(x)$ **thì:**
  + $2a+1$ **khi** $x=0$ **là một cực trị của hàm số** $y=f(|x|)$
  + $2a$ **khi** $x=0$ **không là điểm cực trị của hàm số** $y=f(|x|)$
- **Đồ thị** $f(|x|+c)$ **thứ tự tịnh tiến đồ thị ta được** $f(x+c)$ **rồi lấy đối xứng qua** Oy
- **Đồ thị** $f(|x+c|)$ **thứ tự lấy đối xứng ta được** $f(|x|)$ **rồi lấy tịnh tiến**

5 - Dạng 5

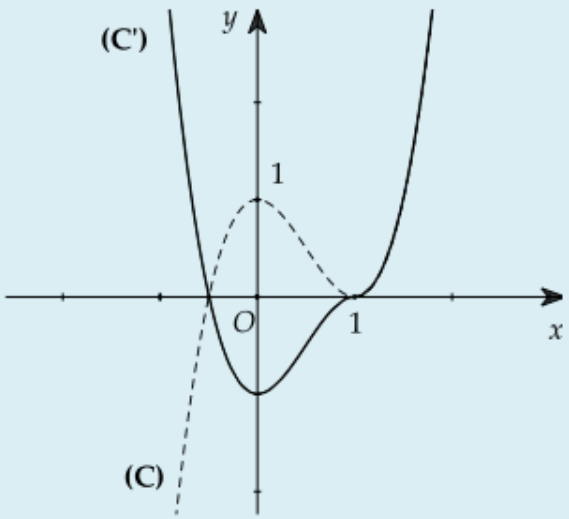
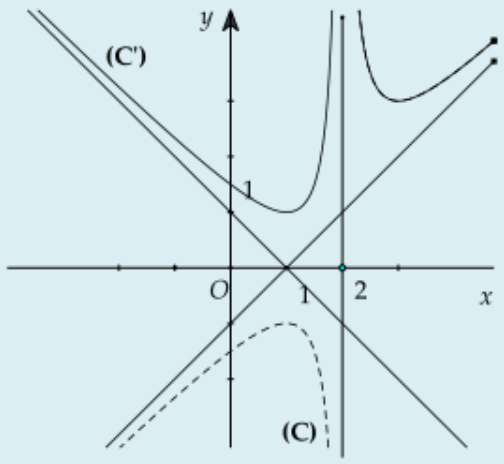
Từ đồ thị $(C): y=u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y=|u(x)|.v(x)=\begin{cases} u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)\ge 0 \\ -u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)<0 \end{cases}$

*** Cách vẽ** (C') **từ** (C)**:**

- *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x)\ge 0$ của đồ thị $(C): y=f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x)<0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ minh hoạ:

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = \|x-1\|(2x^2 - x - 1)$	b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{\|x-2\|}$
$y = \|x-1\|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \ge 1 \\ -f(x) & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$ <u>Đồ thị (C'):</u> + Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$. + Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.  <u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C) như: giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT…	$y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{\|x-2\|} = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x > 2 \\ -f(x) & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$ <u>Đồ thị (C'):</u> + Giữ nguyên (C) với $x > 2$. + Bỏ (C) với $x < 2$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.  <u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

II – CÁC BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

DẠNG 1: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO HÀM SỐ $f'(x)$

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 3 điểm $x=1$ và $x=\pm 2$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng có 2 điểm cực trị dương $x=1$ và $x=2$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị đó là $x=\pm 1$, $x=\pm 2$ và $x=0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$.

+ Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \quad \text{(nghiệm bội lẻ)} \\ x=-3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2.1+1=3$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=-3$ và $x=2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị $x=2$, $x=-2$, $x=0$.

Cách 2: Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)(x^2-2)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt. Do đó $g(x)=|f(1-2018x)|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 6. **(Chuyên KHTN lần 2)** Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

● **Nhận xét**: Số cực trị của hàm số $y=|f(1-2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x)=0$ và số cực trị (không phải là nghiệm phương trình $f(1-2019x)=0$) của hàm số $y=f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x)=x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

$\left[f(1-2019x)\right]' = -2019 f'(1-2019x)$.

Do đó

$\left[f(1-2019x)\right]' = 0 \Leftrightarrow (1-2019x)^2(1-2019x-1)\left(1-2019x-\sqrt{3}\right)\left(1-2019x+\sqrt{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2019} \\ x = 0 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của $y = f(1-2019x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\frac{1}{2019}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↘		↗	

Do đó phương trình $f(1-2019x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y = f(1-2019x)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = \left|f(1-2019x)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = \left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Có $f'(x) = x^3(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. Do đó hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x = 0; x = 2; x = \pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có tối đa $4+5 = 9$ điểm cực trị.

Mặt khác số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f(1-2018x)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f(x)\right|$. Do đó hàm số $y = \left|f(1-2018x)\right|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Chọn A

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2\left(x^2+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \ (1) \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-3m-4<0 \Leftrightarrow -1<m<4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \ (\text{nghiem boi } 4) \\ x=m \ (\text{nghiem boi } 5) \\ x=-3 \ (\text{nghiem boi } 3) \end{array}\right.$.

- Nếu $m=-1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x=-3; x=-1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-1$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Nếu $m=-3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-3$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Khi $\begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m$ và $x=-3<0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m>0 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. $(*)$

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \ (1) \end{array}\right.$. Do đó $(*)\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-5>0 \\ S=-2m>0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-\sqrt{5}$. $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m>-10} m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \ (1) \end{array}\right.$. Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m < 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt{5}.$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \le m \le \sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} m \in \{-2; -1\}.$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m > -10$ để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Yêu cầu bài tóan tương đương với $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, tức $x^2 + 2mx + 5 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m > 0, P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{5} \Rightarrow m \in \{-9, -8, ..., -3\}$ có tất cả 7 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x + m^2 - 3m - 4)^3(x+3)^5, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 5.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương $f(x)$ có một điểm cực trị dương, tức $x^2 + m^2 - 3m - 4 = 0$ có nghiệm dương, tức $-m^2 + 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4 \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Chọn đáp án **C**

DẠNG 2: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 14. **(THPT QG 2017 Mã đề 110)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 15. **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 ‖ -1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C).

Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.

+) Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y = \lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1 ‖ 1	↘	0	↗	3	↘	2 $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

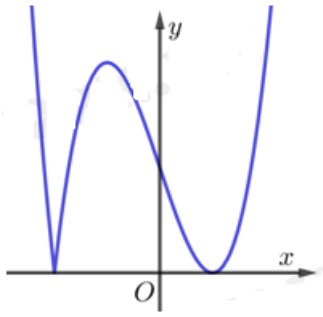
Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải



Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2017)+2018\right|$ có dạng như bên:

Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 17. **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f\left(\left|x-4\right|\right) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó hàm số $y = f(x-4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x-4)$ là :

x	$-\infty$		2		3		7		9		$+\infty$
$y=f(x-4)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ là

Vậy hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ cho có 9 cực trị.

Do đó hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$ có 9 cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

- Đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.
- Hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 19. **(CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-\left|x\right|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=x\left(2-\frac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-|x|=-1 \\ x^2-|x|=1 \\ x=0\ (l) \\ 2-\frac{1}{|x|}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 20. **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x)=f\left(x^3\right)$.

Ta có $h'(x)=3x^2.f'\left(x^3\right)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3=a \\ x^3=b \\ x^3=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{a} \\ x=\sqrt[3]{b} \\ x=\sqrt[3]{c} \end{array}\right.$.

Ta thấy, dấu của hàm số $h'(x)$ chính là dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ (vì $x^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Mặt khác hàm số $y=x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ trên mỗi khoảng $(m;n)$ chính là dấu của hàm số $f'(x)$ trên mỗi khoảng $\left(m^3;n^3\right)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Chú ý rằng $g(x)=\begin{cases} h(x) & \text{khi } x\ge 0 \\ h(-x) & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{b}$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$			

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 5.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$. **C.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)-2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị $\longrightarrow \begin{cases} -2m<-4 \\ -2m>-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m<\frac{11}{2} \end{cases}$.

Câu 22. **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

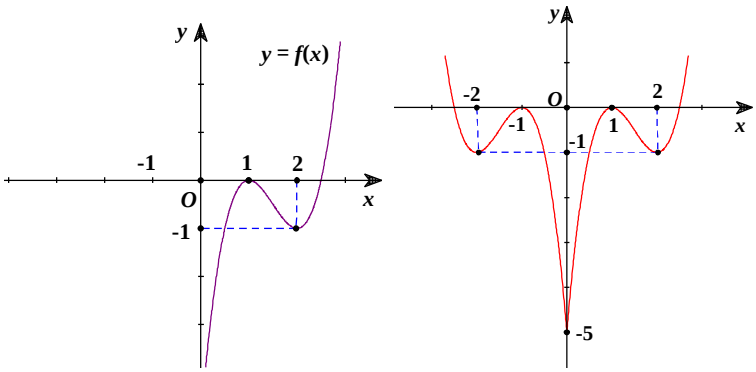
Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m \in \mathbb{Z}; |m| \le 2019$) để đồ thị hàm số $y = |m + f(|x|)|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2024. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f(|x|)$ như hình vẽ sau:



Đồ thị $y = f(x)$ Đồ thị $y = f(|x|)$

+ Từ đồ thị ta có $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

(Chú ý: Hàm số $y = f(x)$ có $a = 2$ điểm cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị là $2a + 1 = 5$ → Nên không cần vẽ đồ thị**)**

+ Vì hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị nên hàm số $y = m + f(|x|)$ cũng có 5 điểm cực trị (Vì đồ thị hàm số $y = m + f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị $y = f(|x|)$ bằng cách tịnh tiến theo phương trục Oy)

+ Số điểm cực trị của hàm số $y = |m + f(|x|)|$ bằng số cực trị của hàm số $y = m + f(|x|)$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $f(|x|) + m = 0$.

Vậy để $y = |m + f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(|x|) + m = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

+ Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

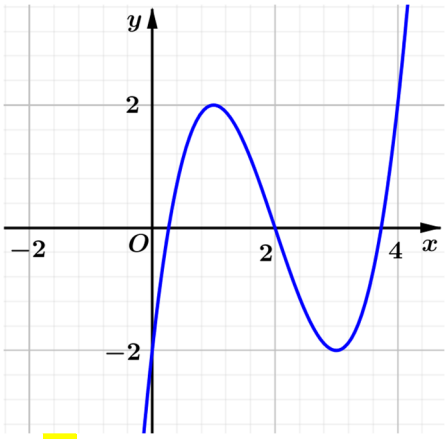
Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} -5 < -m \le -1 \\ 0 \le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 5 \\ m \le 0 \end{array}\right. (1)$

+ Từ giả thiết $|m| \le 2019 \Leftrightarrow -2019 \le m \le 2019$ (2)

Vậy từ (1), (2) và kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ ta có 2024 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 3: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHI CHO ĐỒ THỊ

Câu 23. **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

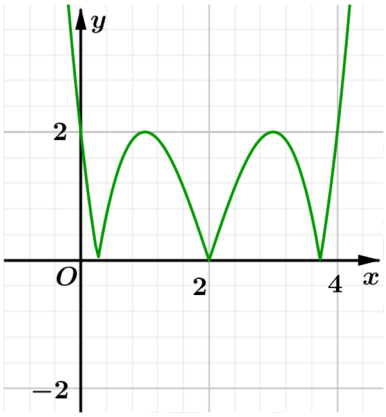


A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

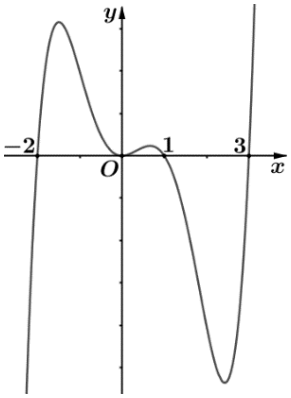
Chọn A

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục Ox hợp với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox lấy đối xứng qua Ox. Ta được đồ thị như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

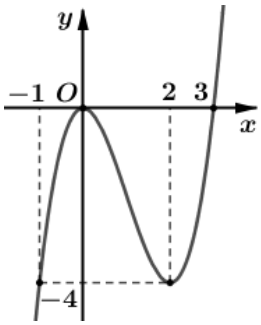
Chọn C

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng ?



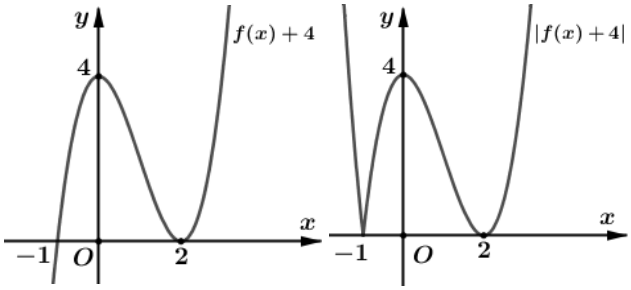
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có được bằng cách

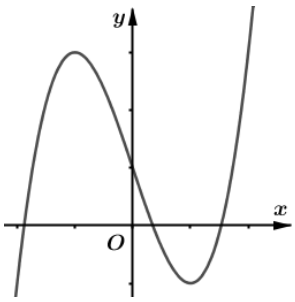
- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được $|f(x)+4|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1;0)$, $(0;4)$, $(2;0)$

$\longrightarrow$ tổng tung độ các điểm cực trị bằng $0+4+0=4$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

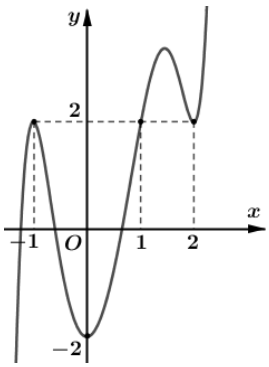
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x)=2f(x)-3 \longrightarrow g'(x)=2f'(x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=a\ (1<a<2) \\ x=2 \end{array}\right.. \text{ Ta tính được } \begin{cases} g(-1)=1 \\ g(0)=-7 \\ g(a)>1 \\ g(2)=1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

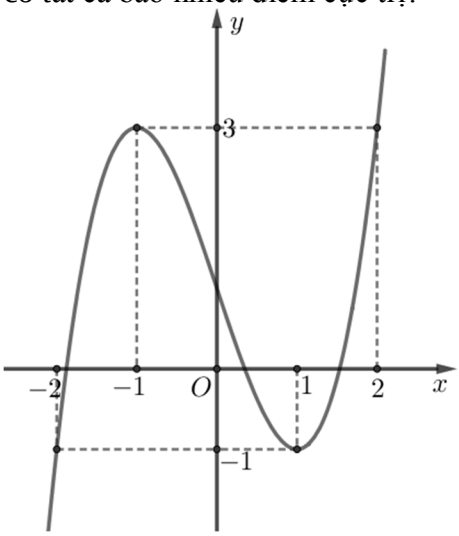
x	$-\infty$		-1		0		a		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	1	↘	-7	↗	$g(a)$	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 28. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ lần lượt là $x_1;x_2;x_3$ trong đó $x_1<0<x_2<1<x_3$.

$$y=\begin{cases} f(|x|) \text{ khi } f(|x|)\ge 0 \\ -f(|x|) \text{ khi } f(|x|)<0 \end{cases}=\begin{cases} f(x),\forall x\in(0;x_2)\cup(x_3;+\infty) \\ -f(x),\forall x\in(x_2;x_3) \\ f(-x),\forall x\in(-\infty;-x_3)\cup(-x_2;0) \\ -f(-x),\forall x\in(-x_3;-x_2) \end{cases}.$$

$$y'=\begin{cases} f'(x),\forall x\in(0;x_2)\cup(x_3;+\infty) \\ -f'(x),\forall x\in(x_2;x_3) \\ -f'(-x),\forall x\in(-\infty;-x_3)\cup(-x_2;0) \\ f'(-x),\forall x\in(-x_3;-x_2) \end{cases}$$

$y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

y' không xác định tại $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm x_2 \\ x=\pm x_3 \end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ như sau:

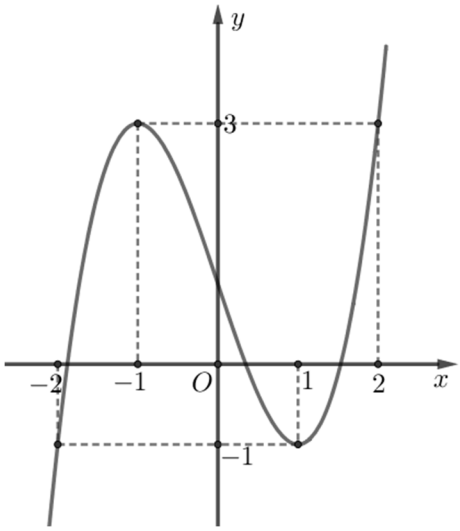
x	$-\infty$		$-x_3$		-1		$-x_2$		0		x_2		1		x_3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Nên hàm số có 7 cực trị.

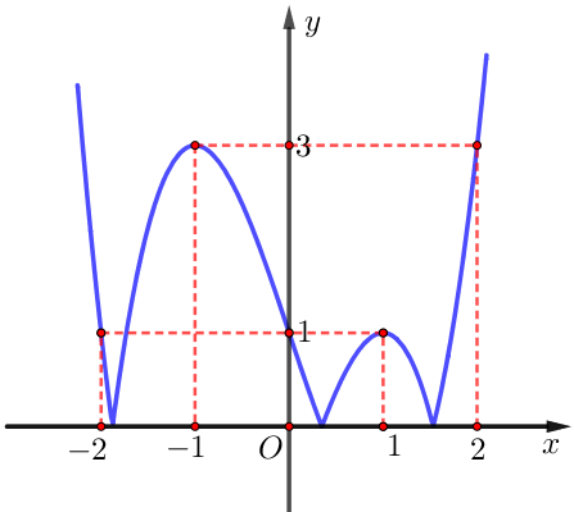
Cách 2:

Hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là $x = 1$ và phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị và phương trình $f(|x|) = 0$ có 4 nghiệm nên hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 cực trị.

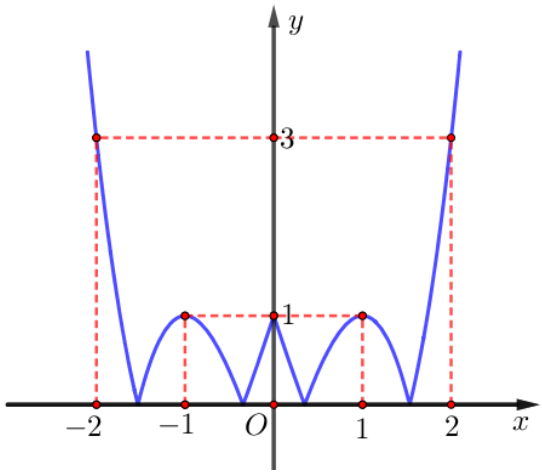
Cách khác: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là:

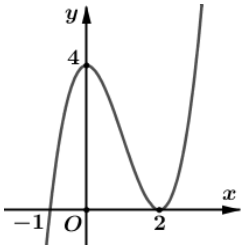


Và đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

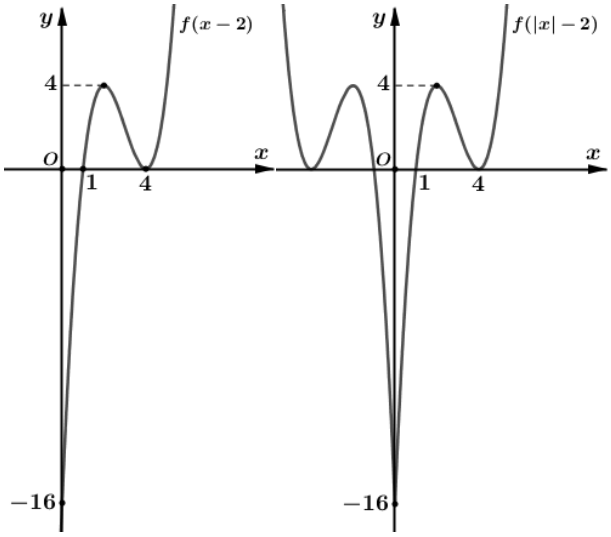


A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

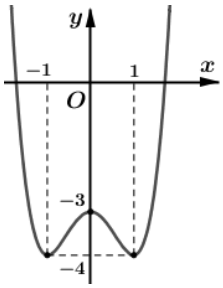
Chọn C

Trước tiên ta phải biết rằng, đồ thị hàm số $f\left(|x|-2\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.



Dựa vào đồ thị hàm số $f\left(|x|-2\right)$, suy ra hàm số $g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x-2|\right)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

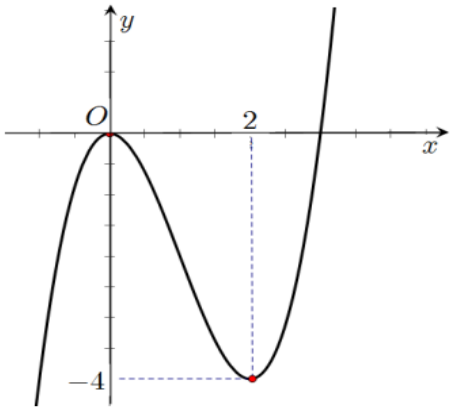
Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

Câu 31. **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|2f(x)+5|+3$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

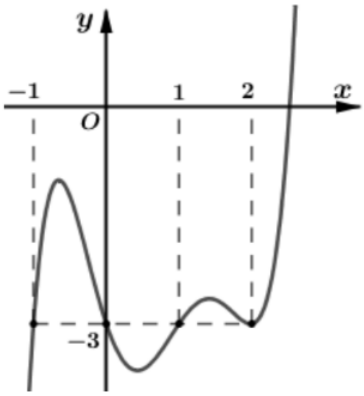
Ta có $y=|2f(x)+5|+3=\sqrt{(2f(x)+5)^2}+3$. Khi đó $y'=\dfrac{2(2f(x)+5)f'(x)}{\sqrt{(2f(x)+5)^2}}$.

Xét $f'(x)=0$ dựa vào đồ thị có hai nghiệm $x=0;\ x=2$.

Xét $2f(x)+5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-5}{2}$ dựa vào đồ thị có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<0<x_2<2<x_3$.

Do đó hàm số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ có 5 điểm cực trị.

Câu 32. **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số đa thức $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f\left(0\right)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)+3x,\ x\in\mathbb{R}$.

$h'\left(x\right)=f'\left(x\right)+3,\ x\in\mathbb{R}$.

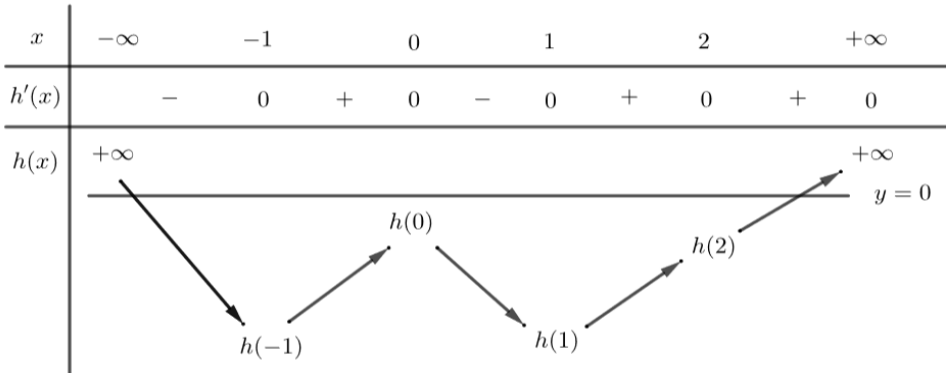
$$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Với $x=2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x=2$ thì $h'\left(x\right)$ không đổi dấu.

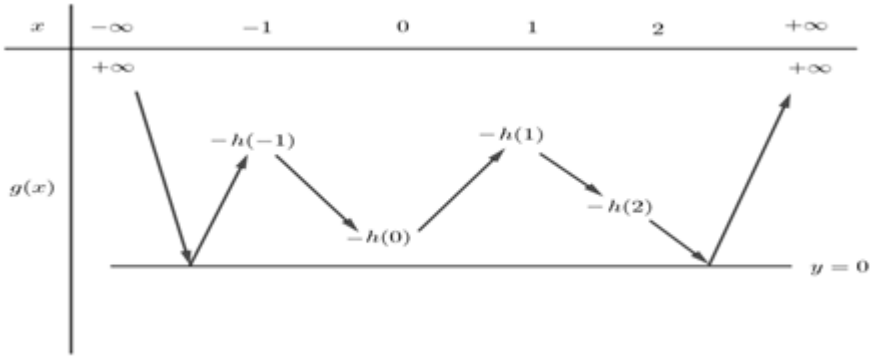
Dựa vào đồ thị hàm số của $f'\left(x\right)$, ta có: $\begin{cases}f'\left(x\right)<-3\ \ \forall x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)\\f'\left(x\right)>-3\ \ \forall x\in\left(-1;0\right)\cup\left(1;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)\end{cases}$.

Mặt khác $h\left(0\right)=f\left(0\right)+3.0<0$.

Bảng biến thiên của hàm $h\left(x\right)=f\left(x\right)+3x$:

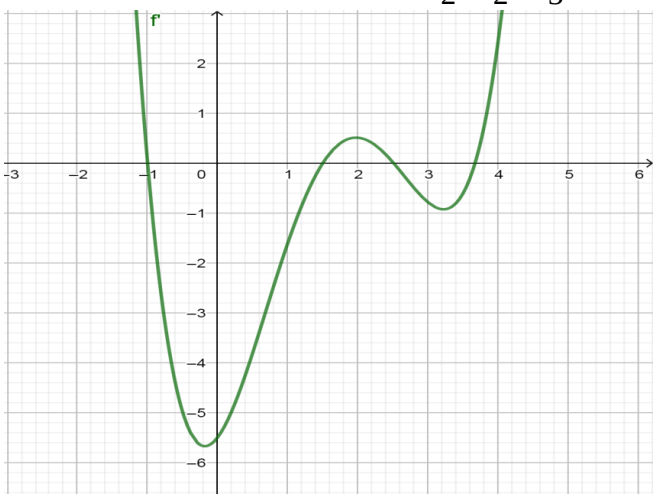


Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+3x\right|=\left|h\left(x\right)\right|$:



$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)=|f(x)+3x|=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 33. **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Cho hàm số đa thức $f(x)=mx^5+nx^4+px^3+qx^2+hx+r$, $(m,n,p,q,h,r\in\mathbb{R})$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1;\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=|f(x)-(m+n+p+q+h+r)|$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Vì 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ nên:

$$f'(x)=5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{11}{3}\right).$$

Suy ra $5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m\left(x^4-\frac{20}{3}x^3+\frac{43}{4}x^2+\frac{14}{3}x-\frac{55}{4}\right)$.

Đồng nhất hệ số, ta được $n=\frac{-25}{3}m;\ p=\frac{215}{12}m;\ q=\frac{35}{3}m;\ h=\frac{-275}{4}m$.

Suy ra $g(x)=\left|f(x)+\frac{93}{2}m-r\right|$

□Xét $h(x)=f(x)+\frac{93}{2}m-r$.

$\Rightarrow h'(x)=f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt, nên $h(x)$ có bốn cực trị.

□Xét $h(x)=0 \Leftrightarrow mx^5-\frac{25}{4}mx^4+\frac{215}{12}mx^3+\frac{35}{3}mx^2-\frac{274}{4}mx+r=\frac{-93}{2}m+r$

$\Leftrightarrow x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}=0$.

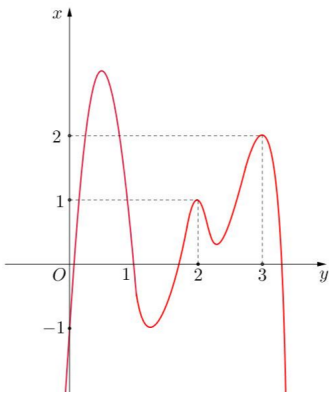
Đặt $k(x)=x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$k(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{299}{3}$	↘	$\frac{-9}{2}$	↗	$\frac{-3}{8}$	↘	$k(\frac{11}{3})<0$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 34. **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.

♦ Tìm số điểm cực trị của $g(x)$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Kẻ đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0;\ x=1;\ x=2;\ x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2;\ x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0;\ x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0;\ x=1$

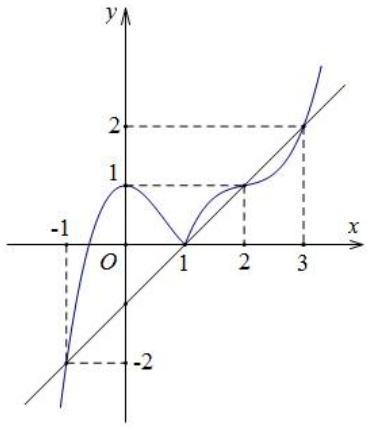
♦ Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Từ bảng biến thiên:

Suy ra phương trình có tối đa ba nghiệm phân biệt.

♦ Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 2 + 3 = 5 điểm cực trị.

Câu 35. **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8$; $f(4)>\frac{9}{2}$; $f(2)<\frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành.

Đặt $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|, \forall x\in\mathbb{R}$ và $h(x)=2f(x)-(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x)=2f'(x)-2(x-1) \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$ (*)

Dự vào đồ thị, nghiệm của phương trình (*) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$, ta có: $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(-1)$	$\nearrow$			$h(2)$	$\searrow$	$h(3)$	$\nearrow$	

Ta có:

$h(2) = 2f(2) - (2-1)^2 < 0$ vì $f(2) < \frac{1}{2}$

$h(-3) = 2f(-3) - (-3-1)^2 > 0$ vì $f(-3) > 8$

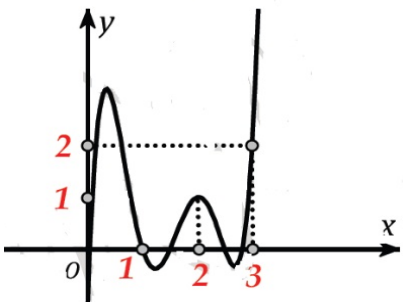
$h(4) = 2f(4) - (4-1)^2 > 0$ vì $f(4) > \frac{9}{2}$

Suy ra $h(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1 \in (-3;-1)$ và $x_2 \in (3;4)$.

Suy ra $g(x) = |h(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x) = \left|2f(x) - (x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

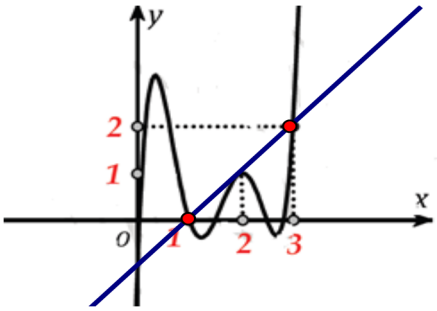


A. 9. **B.** 11. **C.** 8.**D**

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = 2f(x) - (x-1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y = x - 1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3; x=a\left(a\in(1;2)\right)$

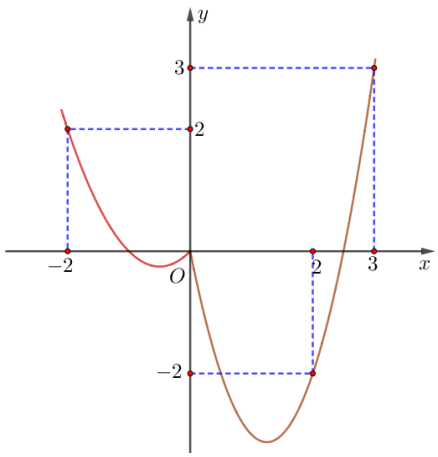
Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		1		a		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 37. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

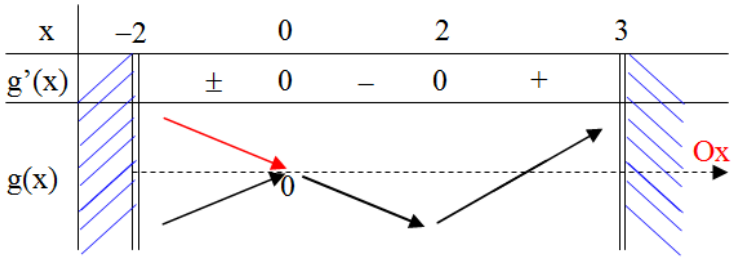


Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}-f(0)$

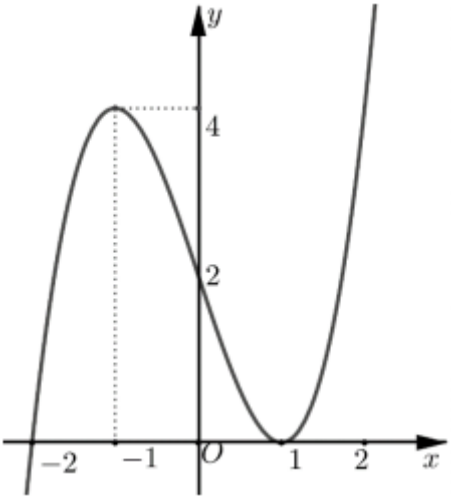
Ta có: $g'(x)=f'(x)+x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

(Nhận xét: $x=2$ là nghiệm bội lẻ, $x=0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y=|g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$

Câu 38. **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ có $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$

Cho $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right.$

Dựa theo đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1; x=1$. Do đó

$$f'\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

+ Với $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ thì $0<(x-1)^2<2 \Leftrightarrow -1<x^2-2x<1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right)<0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

+ Với $x<1-\sqrt{2}$ hay $x>1+\sqrt{2}$ thì $(x-1)^2>2 \Leftrightarrow x^2-2x>1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right)>0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$

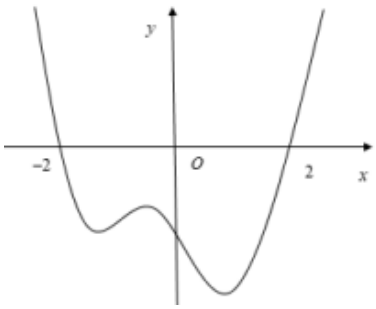
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$		-	0	+	0	-	0	+	
$f\left(x^2-2x\right)$		↘		↗		↘		↗	

Bảng biến thiên của $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ như sau

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$y=f\left(x^2-2\|x\|\right)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có 5 cực trị.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

ừ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0		-		0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘		↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ giả thiết $f(-2)<0$ và $1-x^{2018}\le 1\Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$ với mọi x.

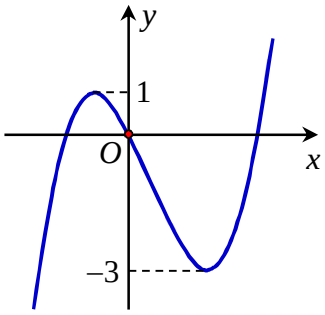
Đặt $t=1-x^{2018}$, ta có $\begin{cases} f_t'(t)<0 \text{ khi } t\in(-2;1) \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt[2018]{3};\ \sqrt[2018]{3}\right) \\ f'(t)>0 \text{ khi } t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)\cup\left(\sqrt[2018]{3};+\infty\right) \end{cases}$

Đặt $g(x)=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$, ta có $g'(x)=-\dfrac{2018.x^{2017}.f_t'(t).f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$

Do đó, ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$-\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị là

A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ gồm hai phần:

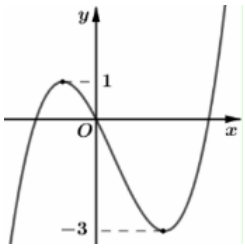
□ Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía trên trục hoành;

□ Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$. Khi đó hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+m\le 0 \\ -3+m\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f(x)+m\right|$ có 5 điểm cực trị là



A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B.** $-1 < m < 3$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)+m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đò thị $f(x)+m$ với trục hoành là 3 giao điểm.

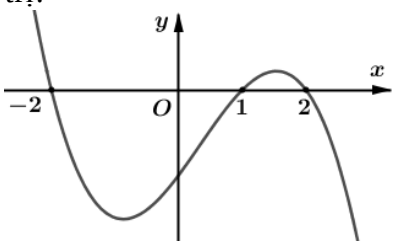
Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 3, ta cần đồng thời

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 1 đơn vị => $m > -1$.

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị => $m < 3$.

Vậy $-1 < m < 3$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

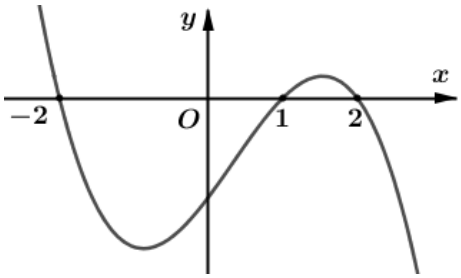
$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↗		↘		↗		↘	

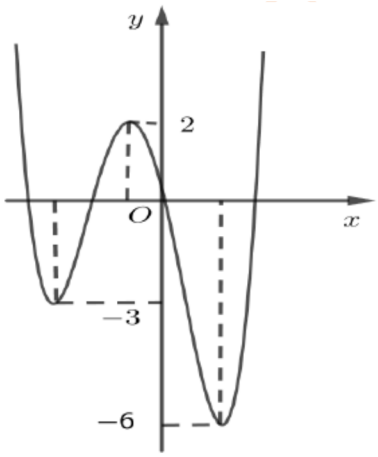
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

- Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<1$.
- Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m\geq -2$.

Suy ra $-2\leq m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 44. **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)**Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị của hàm số $y=|f(x+1)+m|$ được suy ra từ đồ thị (C) ban đầu như sau:

-Tịnh tiến (C) sang phải một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) m đơn vị. Ta được đồ thị $(C'): y = f(x+1)+m$.

-Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y = |f(x+1)+m|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y = |f(x+1)+m|$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3+m$	$\nearrow$	$2+m$	$\searrow$	$-6+m$	$\nearrow$	$+\infty$

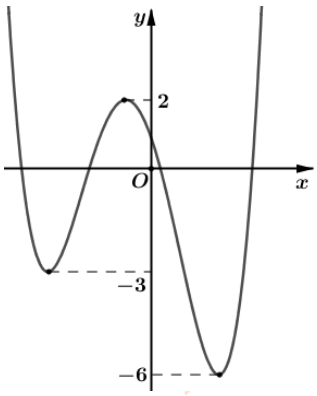
Để hàm số $y = |f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị của hàm số $(C'): y = f(x+1)+m$ phải cắt trục Ox tại 2 hoặc 3 giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị $(C'): y = f(x+1)+m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ -3+m \geq 0 \\ -6+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m < 6$.

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị $(C'): y = f(x+1)+m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases} m < 0 \\ 2+m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x) = |f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x-1)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2.

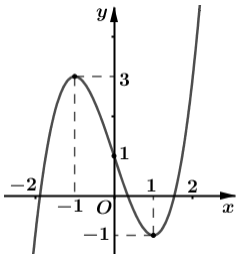
Để số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2, ta cần

● Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m \le -2$.

● Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị $\longrightarrow 3 \le m < 6$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ 3 \le m < 6 \end{array}\right. \xrightarrow[m\in[-4;4]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-4;-3;-2;3;4\}$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



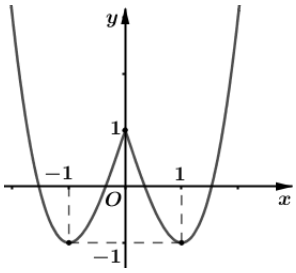
Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

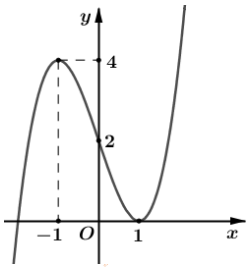
Chọn C

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m < -1$. **B.** $m > -1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm $g(x) = f(|x|+m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy $\longrightarrow x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x}{|x|}.f'(|x|+m)$ với $x = 0$.

$$\longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x|+m) = 0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} |x|+m = 1 \\ |x|+m = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 1-m \\ |x| = -1-m \end{array}\right. . (*)$$

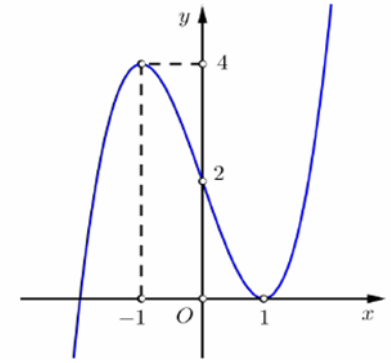
Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ -1-m>0 \\ 1-m \neq -1-m \end{cases} \Leftrightarrow m<-1.$

Cách 2. Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

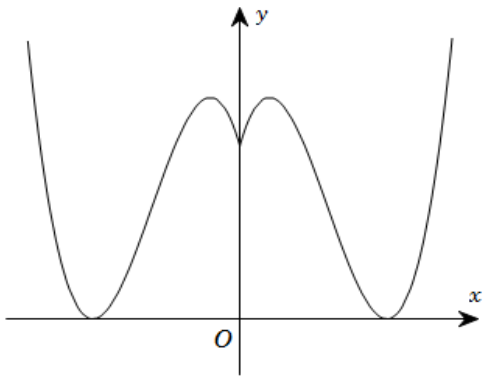


A. $m>1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta có nhận xét rằng: đồ thị hàm số $y=f(|x|+m)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách nào?



● Bước 1. Tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ sang phải (nếu $m<0$), sang trái (nếu $m>0$) $|m|$ đơn vị.

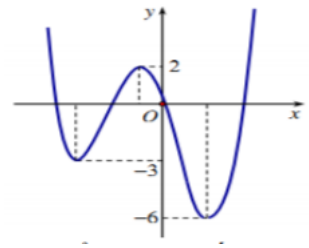
● Bước 2. Giữ nguyên phần đồ thị vừa nhận được phía bên phải trục tung, xóa bỏ phần đồ thị vừa nhận được phía bên trái trục tung.

● Bước 3. Lấy đối xứng phần đồ thị giữ ở bước 2 qua trục tung ta được đồ thị hoàn chỉnh của hàm số $y=f(|x|+m)$.

Do đó bằng tư duy + hình vẽ thì yêu cầu bài toán cần tịnh tiến đồ thị sao cho điểm cực đại sang phải và nằm trong góc phần tư thứ nhất. Suy ra $m<-1$.

Khi đó ta được đồ thị của hàm số $y=f(|x|+m)$ như hình bên.

Câu 49. **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

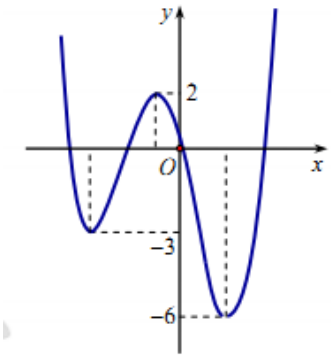
Xét hàm số $g(x)=f(x+1)+m$. Ta có $g'(x)=f'(x+1)$.

Vì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $g(x)=f(x+1)+m$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x+1)=-m$ phải có có 4 nghiệm đơn phân biệt hay $-3<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2\}$

Câu 50. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-2017)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

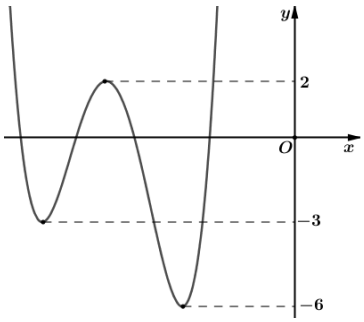
Lời giải

Đáp án A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y=f(x)$ với Ox abnwgf số gaio điểm của $(C'): y=f(x-2017)$ với Ox

Vì $m>0$ nên $(C''): y=f(x-2017)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y=f(x-2017)$ lên trên m đơn vị

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x+2018)+m|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là 4.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là 4, ta cần đồng thời

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m>-2$
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m<3$.

Vậy $-2<m<3 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;\ 2\}$.

Câu 52. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}-m\right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

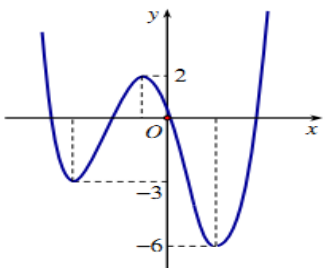
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}-m=0\Leftrightarrow mx^2-x+m=0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 53. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



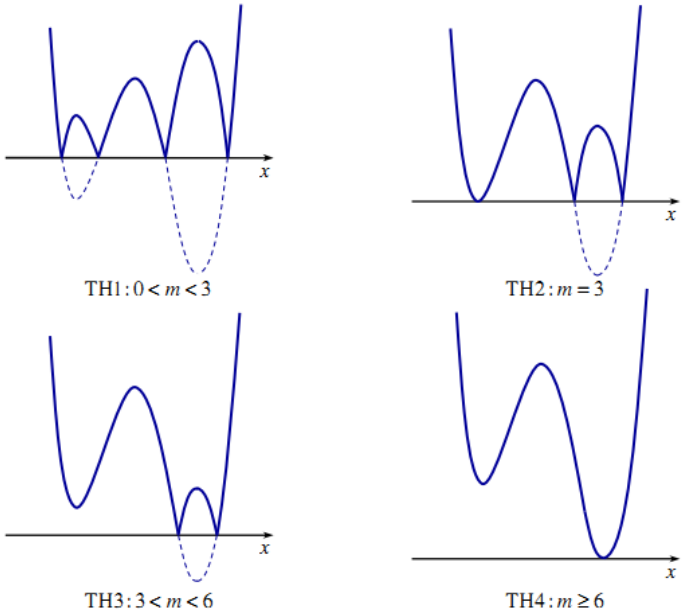
A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox

Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

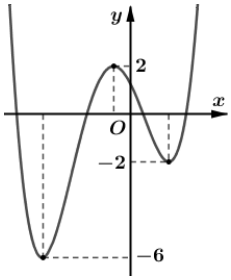
TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \left| f(x+2018) + m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

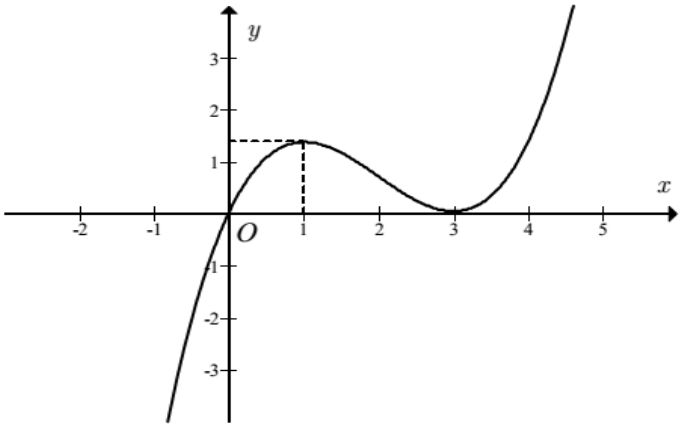
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \le m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2} \le m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \le -\sqrt{2}\end{array}\right. \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2;2\}$.

Câu 55. **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100;100]$ để hàm số $h(x) = \left| f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5050. **D.** 5043.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow g'(x) = 2f(x+2).f'(x+2) + 4f'(x+2)$

$g'(x) = 2f'(x+2).[f(x+2)+2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+2) = 0 \\ f(x+2) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 1 \\ x+2 = 3 \\ x+2 = a \in (-1;0) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = a-2 \in (-3;-2) \end{array}\right.$ là 3 nghiệm đơn của $g'(x) = 0$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt $t = f(x+2) \Rightarrow t \in R$ và mỗi giá trị $t \in R$ thì phương trình $t = f(x+2)$ luôn có nghiệm.

$g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow h(t) = t^2 + 4t + 3m$

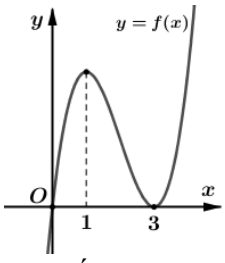
Vì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị nên để hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì.

$t^2 + 4t + 3m \ge 0, \forall t \in R \Leftrightarrow 4 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{4}{3}$.(Vì hàm $y = h(t)$ là hàm bậc hai có hệ số $a > 0$)

Do $m \in [-100;100]; m \in Z \Rightarrow m \in \{2,3,4,...,100\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $2+3+4+...+100 = 5049$.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m\longrightarrow g'(x)=f'(x)\left[2f(x)+1\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\2f(x)=-1\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=a\ (a<0)\end{array}\right.$$

. Ta tính được $\begin{cases}g(1)=f^2(1)+f(1)+m>m\\g(3)=m\\g(a)=m-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

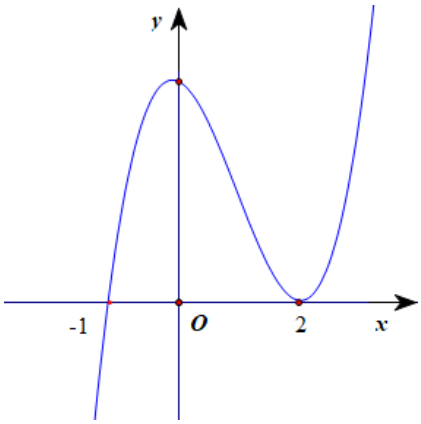
x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘	$g(a)$	↗	$g(1)$	↘	m	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+m-\frac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m\geq\frac{1}{4}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. $m\geq 1$. **B.** $m>1$ **C.** $m\leq -1$ **D.** $m<-1$

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét sau: "Số điểm cực trị của hàm số $y=|h(x)|$ là tổng số điểm cực của hàm số $y=h(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $h(x)=0$".

Xét hàm số $y=h(x)=f^2(x)+2f(x)+m$

Ta có $h'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1)\\ f(x)=-1 & (2)\end{array}\right.$

Từ hàm số đã có ta có (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có một nghiệm đơn.

Do đó $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=|h(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=0$ phải vô nghiệm, hay phương trình $f^2(x)+2f(x)+m=0$ vô nghiệm (tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$)

Điều này tương đương với điều kiện $\Delta'=1-m<0\Leftrightarrow m>1$.

DẠNG 4: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA HÀM ĐA THỨC CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10;10]$ để hàm số

$y = \left|mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow m \in \{1,2,...,10\} \text{ có tất cả 10 giá trị} \\ m - 2m + m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Chọn B

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y = \left|x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)x - 2m^2 + 9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

$ycbt \Leftrightarrow x^3(2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)x - 2m^2 + 9$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2mx + 2m^2 - 9) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + 2mx + 2m^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 9) > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2,-1,0,1,2\}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Để $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. $(*)$

Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 0 \xrightarrow[m \in [-10;10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 10\}$.

Cách 2: Hàm số $y = \left|mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=mx^2-2mx+m-2=0 (2) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 0$. Vì m nguyên và $m \in [-10;10]$, nên $m \in \{1,2,3,...,10\}$. Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4<m<0$. **B.** $-4 \le m \le 0$. **C.** $0<m<4$. **D.** $m \ge 4$ hoặc $m \le 0$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow y(0)=m, y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2) \ge 0 \Leftrightarrow m(m-4)<0 \Leftrightarrow 0<m<4$

Câu 5. **(Nguyễn Đình Chiểu Tiền Giang)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|x^3-3x^2-m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-m$. Ta có $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	$-m-4$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị. Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là $-m-4<0<-m \Leftrightarrow -4<m<0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để hàm số $y=|x^3-mx+1|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

yêu cầu bài tóan tương đương hàm số $f(x)=x^3-mx+1$ có hai điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt ta có

$f'(x)=3x^2-m;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{m}{3}}\,(m>0)$. và

$f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right)=\frac{9-2\sqrt{3m^3}}{9};\ f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)=\frac{9+2\sqrt{3m^3}}{9}$

khi đó điều kiện để có 3 nghiệm phân biệt là $f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)<0\Leftrightarrow 81-12m^3<0\Leftrightarrow m>\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Chọn D

chú ý các em có thể đưa về xét hàm số $m=x^2+\frac{1}{x}$. cho kết quả tương tự

Câu 7. `Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$. **B.** $m\ge 1$ hoặc $m\le -3$.

C. $1\le m\le 3$. **D.** $m\ge 3$ hoặc $m\le -1$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

Phân tích: Xét hàm số $y=g(x)=x^3+3x^2-3+m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a=1>0$.

Hàm số có $y'=g'(x)=3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Hàm số $y=g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có năm cực trị.

Nếu $g(x)=0$ có một hoặc hai nghiệm thì hàm số $y=\left|g(x)\right|$ sẽ có ba cực trị.

Điều kiện: $g(x_{cd}).g(x_{ct})\ge 0\Leftrightarrow g(0).g(-2)\ge 0$ hay $(-3+m)(1+m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\m\le -1\end{array}\right.$.

Câu 8. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow y(0)=m,\ y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le 0\end{array}\right.$

Do đó $m\in\{-2017,...,2017\}$ có $2018+2014=4032$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có ba điểm **cực tiểu**.

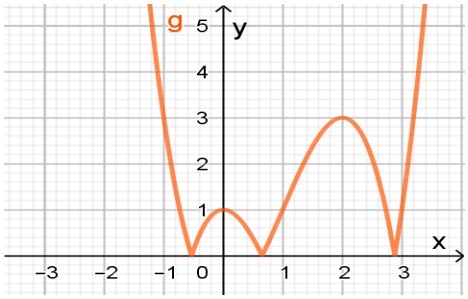
A. $m<5$. **B.** $5<m<9$. **C.** $5\le m<9$. **D.** $5<m\le 9$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $F\left(x\right)=f\left(x\right)+m$. Đặt $\begin{cases} y_{ct}=-5+m \\ y_{cd}=-9+m \end{cases}$. Xét hàm số $y=\left|F\left(x\right)\right|=\begin{cases} F\left(x\right) & khi\ F\left(x\right)\ge 0 \\ -F\left(x\right) & khi\ F\left(x\right)<0 \end{cases}$

Để hàm số có 3 điểm cực tiểu $\begin{cases} y_{cd}>0 \\ y_{ct}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+m>0 \\ -9+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 5<m<9$ (Minh họa đồ thị bên dưới)



Vậy khoản

g cách lớn nhất là $OA=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 10. **(Hải Hậu Lần 1)** Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in\left[0;100\right]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$ có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox

Xét hàm số: $y=f\left(x\right)=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$

Có: $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4m^3-12m-8 \\ x=2m\Rightarrow y=-12m-8 \end{array}\right.$

Hai cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là: $A\left(0;4m^3-12m-8\right),B\left(2m;-12m-8\right)$

Để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi $\left(4m^3-12m-8\right)\left(-12m-8\right)<0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

Mà: $m\in\left[0;100\right]\Rightarrow m\in\left\{3;4;5;6;...;100\right\}$

Vậy tổng các giá trị của m là: $\frac{(3+100)98}{2}=5047$.

Câu 11. **[THPT Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, lần 1, năm 2018]**

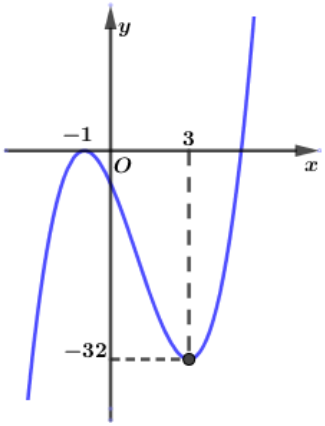
Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Lời giải

Chọn A

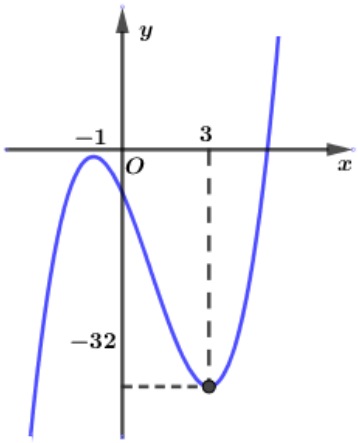
Xét đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5$.



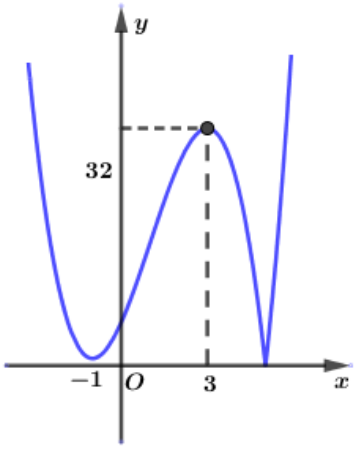
Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x-5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m>0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m<0$.

Có 3 trường hợp:

TH1. $m\le 0$, ta có đồ thị như sau



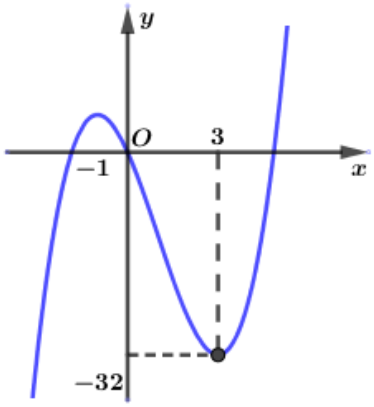
$y=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}$



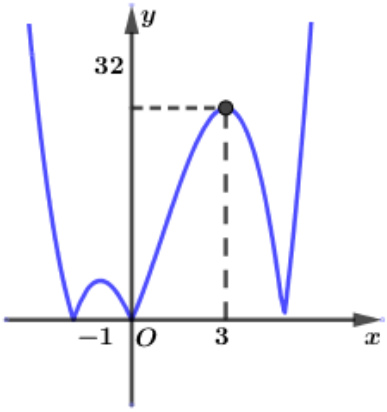
$y=|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}|$

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $0<\frac{m}{2}<32$, ta có đồ thị như sau



$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$



$y = |x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}|$

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có năm cực trị. Thỏa yêu cầu bài toán.

TH3. $\frac{m}{2} \geq 32$, ta có đồ thị như sau

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < \frac{m}{2} < 32 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1, 2, ...63\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là 2016.

Câu 12. **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

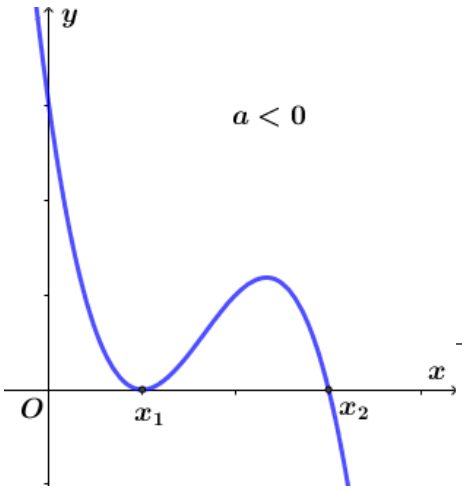
Lời giải

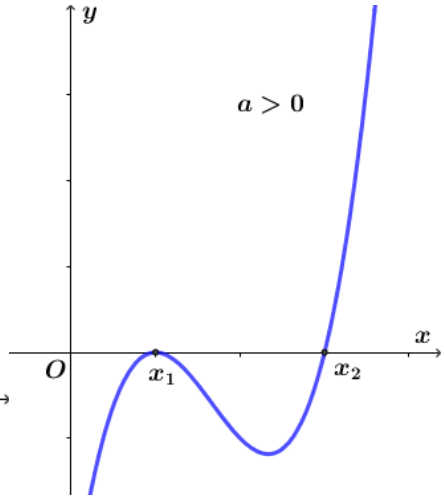
Chọn D

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ và trục hoành.

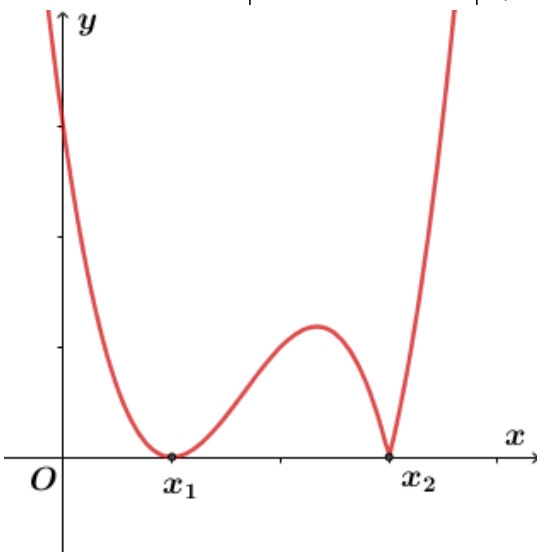
Do phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có thể viết dưới dạng $a(x - x_1)^2(x - x_2) = 0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ứng với từng trường hợp $a > 0$ và $a < 0$:





Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = m - 2; x = m + 2$ có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m \in \{3,...,9\}$.

Chọn D

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

yêu cầu bài toán tương đương hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có 2 điểm cực trị dương, tức $3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$\begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0. \\ S = \dfrac{2(2m+1)}{3} > 0 \\ P = \dfrac{3m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ 0 < m < \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Chọn D

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4} < m < 2$. **B.** $\frac{5}{4} < m < 2$. **C.** $\frac{1}{2} < m < 2$. **D.** $-2 < m < \frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có $5 = 2a + 1 \Leftrightarrow a = 2$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \dfrac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$

Câu 16. **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $0 < m < 3$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+(m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y'=x^2-2mx+(m+6)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6>0\\2m>0\\m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3$.

Câu 17. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3(m^2-4)|x|+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $ycbt\Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x+1$ có đúng một điểm cực trị dương $\Leftrightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(m^2-4)=0\Leftrightarrow x=m-2;x=m+2$ có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow m-2\le 0<m+2\Leftrightarrow -2<m\le 2\Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$.

Chọn D

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

xét $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ và $f|(x)|=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$

ta có $3=2a+1\Leftrightarrow a=1$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$

vậy yêu cầu tương đương với: $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1\le 0<x_2\Leftrightarrow m\le 0$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow g\left(x\right)=3x^2-2\left(2m+1\right)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_1\le 0<x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3.g\left(0\right)<0 \\ \begin{cases} g\left(0\right)=0 \\ S>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\left(m+2\right)<0 \\ \begin{cases} m+2=0 \\ \dfrac{2\left(2m+1\right)}{3}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-2$

Vậy $m\in\left\{-5,-4,-3\right\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(m+2\right)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có năm điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow g\left(x\right)=3x^2-2\left(2m+1\right)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn

$$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3.g\left(0\right)>0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\left(m+2\right)>0 \\ \left(2m+1\right)^2-3\left(m+2\right)>0 \Leftrightarrow m>1 \\ \dfrac{2\left(2m+1\right)}{3}>0 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{2,3,4,5\right\}$ có 4 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 21. **(Chuyên Bắc Giang)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^3-5x^2+\left(m+3\right)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'\left(x\right)=3\left(m-1\right)x^2-10x+\left(m+3\right)$.

* Trường hợp 1: $m=1$.

Lúc đó $f'\left(x\right)=-10x+4$. Ta có $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị dương. Suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m\ne 1$.

Lúc này hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1<0<x_2$ hoặc $x_1=0<x_2$.

□Phương trình $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $\left(m-1\right).\left(m+3\right)<0 \Leftrightarrow -3<m<1$.

□Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x_1=0<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3=0 \\ \dfrac{10}{3(m-1)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m>1 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3<m\le 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 22. **(Lê Xoay lần 1)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$, có $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$.

Hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\le 0<x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1\le 0<x_2$.

Ta có phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1\le 0<x_2$ thì

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ P\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-5m+1>0 \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \vee m<\dfrac{1}{4} \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0.$$

Thử lại: +) với $m<0$ thì phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$ có hai nghiệm $x_1<0<x_2$ (thỏa mãn).

+) với $m=0$ thì $f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in(-\infty;0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow f(x)=x^4-1$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt. do đó hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

$m-1<0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow f(x)=x^4+2x^2-3$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt. do đó hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

Ta có $m-1>0 \Rightarrow m>1$ khi đó $f(x)$ có ba điểm cực trị. Vậy yêu cầu bài tóan lúc này tương đương với $f(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức

$\Delta'=(m-1)^2-(2m-3)\le 0 \Leftrightarrow (m-2)^2\le 0 \Leftrightarrow m=2$. Vậy $m\in\{0,1,2\}$.

Chọn A

Câu 24. Cho hàm số $y=|x^4-2(m-1)x^2+2m-3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Xét $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-2m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=2m-3 \end{array}\right.$

TH1: Nếu $2m-3\le 0 \Rightarrow$ Do vậy $f(x)$ có 2 điểm đổi dấu $x=-1; x=1$. Hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow -2(m-1)<0 \Leftrightarrow m>1$

Vậy trường hợp này có $1<m\le\frac{3}{2}$

TH2: Nếu $0<2m-3\ne 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}<m\ne 2$. Khi đó $f(x)$ có bốn điểm đổi dấu $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2m-3}$ do đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng 3 và hàm số $y=|f(x)|$ có 7 cực trị(loại).

TH3: nếu $2m-3=1 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow f(x)=(x^2-1)^2$ khi đó $y=|f(x)|=(x^2-1)^2$ có 3 điểm cực trị (loại).

Chọn D

Câu 25. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=|x^4-(m+1)x^2+m|$ có 7 điểm cực trị.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Xét $x^4-(m+1)x^2+m \Leftrightarrow x^2=1; x^2=m(1)$ vậy để hàm số $y=|x^4-(m+1)x^2+m|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\ne 1 \end{cases} \Rightarrow m\in\{2,...,19\}$. có 18 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=(x^2+2)|x^2-m|$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 17. **C.** 2. **D.** 16.

Lời giải

Có $y=\left(x^2+2\right)\left|x^2-m\right|=\left|\left(x^2+2\right)\left(x^2-m\right)\right|=\left|x^4-(m-2)x^2-2m\right|$.

Nếu $m\le 0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m\ge 0,\forall x$ nên hàm số đã cho có tối đa ba điểm cực trị (loại).

Nếu $m>0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m=0\Leftrightarrow x^2=m\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$. Vậy điều kiện là hàm số $y=x^4-(m-2)x^2-2m$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -(m-2)<0\Leftrightarrow m>2\Rightarrow m\in\{3,...,19\}$. Có 17 số nguyên thoả mãn.

Chọn B

Câu 27. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-mx^2+m$ có tối đa 3 điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm. Vì vậy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta=m^2-4>0\\ S=m>0,P=m>0\\ ab=-m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow m>4$

Chọn A

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^4-4x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 13.

Lời giải

Hàm số $f(x)=x^4-4x^2+m$ có 3 điểm cực trị. Vậy hàm số $\left|f(x)\right|$ có 7 cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, tức

$\begin{cases}\Delta'=4-m>0\\ S=4>0,P=m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 29. **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng ba điểm cực trị thì: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 0\\ 4-2m^2<0\end{cases}\\ \begin{cases}m>0\\ 4-3m^2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{2}\\ 0<m\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn bài toán là $\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;1\}$.

Câu 30. **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\backslash\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$f'(x)=4x^3-4(m-1)x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m-1\end{array}\right.$

Vì hàm số $f(x)$ có $a=1>0$ nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có đúng 5 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ phải có 3 cực trị thỏa $y_{cd}\le 0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\f(0)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1;\frac{3}{2}\right]$

Câu 31. **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S\cap\mathbb{Z}$ là

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Gọi $f(x)=x^4-10x^2+m$. Ta có $f'(x)=4x^3-20x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+m$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ (không trùng với các điểm cực trị của hàm số). Do đó để hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị thì $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<25$. Vậy $S\cap\mathbb{Z}=\{1;2;...;24\}$.

Câu 32. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=1;x=2;x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị.

A. 8. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 19.

Lời giải

Hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow f(x+m)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $-m$

Các điểm cực trị của hàm số $\Leftrightarrow y = f(x+m)$ là $\left[\begin{array}{l} x+m=1 \\ x+m=2 \\ x+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-m \\ x=2-m \\ x=3-m \end{array}\right.$

Vậy ta có điều kiện là $\left[\begin{array}{l} 1-m>-m \\ 2-m>-m \\ 3-m>-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall m \Rightarrow m \in \{-9,...,9\}$.

Câu 33. **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-7;7)$ để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có đúng ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B. 2.** **C. 1.** **D. 3**

Lời giải

Chọn D

Xét $y = x^4 - 3mx^2 - 4$.

$$y' = 4x^3 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2 = \dfrac{3m}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\dfrac{3m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 3 cực trị: $A(0;-4), B\left(\sqrt{\dfrac{3m}{2}}; -\dfrac{9m^2}{4} - 4\right), C\left(-\sqrt{\dfrac{3m}{2}}; -\dfrac{9m^2}{4} - 4\right)$

Suy ra $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $\dfrac{3m}{2} \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$ (1) suy ra hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 1 cực tiểu là: $A'(0;-4)$

Suy ra hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có 3 điểm cực trị là: $A(0;4), B(x_1;0), C(-x_1;0)$, trong đó x_1 là nghiệm của phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$. $(x_1 \ne 0)$ (do $ac = -4$ nên phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$ luôn có nghiệm) (2)

Diện tích tam giác ABC bằng: $S = \dfrac{1}{2}.d(A;BC).BC = \dfrac{1}{2}.4.2|x_1| = 4|x_1|$.

Do $S > 4 \Leftrightarrow |x_1| > 1$. Từ phương trình (2) suy ra $m = \dfrac{x_1^4 - 4}{3x_1^2} = \dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{4}{3x_1^2}$ với $|x_1| > 1$.

Do $|x_1| > 1 \Leftrightarrow x_1^2 > 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{4}{3x_1^2} > -1$ kết hợp với (1) suy ra $-1 < m \le 0$ suy ra chỉ có $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = (m^4+1)x^4 + (-2^{m+1}.m^{2.-4})x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có: $y=\left|f(x)-1\right|=\sqrt{\left(f(x)-1\right)^2}$

Suy ra $y'=\dfrac{f'(x).\left[f(x)-1\right]}{\sqrt{\left(f(x)-1\right)^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)-1=0\end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-\left(m^4+1\right)\left(2^{m+1}.m^2+4\right)<0$ với mọi m.

$f(x)-1=0$ vô nghiệm do $\Delta'=\left(2^m.m^2+2\right)^2-\left(m^4+1\right).\left(4^m+15\right)$

$=4.2^m.m^2+4-15m^4-4^m-15=-\left(2^m-m^2\right)^2-11m^4-11<0$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f(x)-1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x)-1=0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(x)-1\right|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m=0$, khi đó ta được hàm $f(x)-1=x^4-4x^2+16$.

Đặt $g(x)=f(x)-1=x^4-4x^2+16\Rightarrow g'(x)=4x^3-8x$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	16	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Do đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y=\left|g(x)\right|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=\left|f(x)-1\right|$ là 3.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020$. Hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số trùng phương có $ab=-\left(m^8+1\right)\left(2m^{2018}+2m^2+3\right)<0,\forall m$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số $f(x)-2019$ cũng có 3 điểm cực trị.

$f(x)-2019=0\Leftrightarrow\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020=2019$

$\Leftrightarrow\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+1=0$

Phương trình này luôn có 4 nghiệm thực phân biệt vì $\begin{cases} \Delta = (2m^{2018} + 2m^2 + 3)^2 - 4\left(m^{2018} + 1\right)^2 > 0 \\ S = \dfrac{2m^{2018} + 2m^2 + 3}{m^{2018} + 1} > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

Do đó $f(x)$ có 4 nghiệm đổi dấu. vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|f(x) - 2019\right|$ bằng $3 + 4 = 7$

Chọn A

Câu 36. Biết phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ bốn nghiệm thực. Hàm số $y = \left|ax^4 + bx^2 + c\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Vì phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ bốn nghiệm thực nên hàm số

$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow ab < 0$ do đó hàm số $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 3 điểm cực trị

Mặt khác $ax^4 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ nên phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 4nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = \left|ax^4 + bx^2 + c\right|$ có $4 + 3 = 7$ cực trị.

Câu 37. **(Tham khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải.

$y = \left|f(x)\right| = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi $\begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$. Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m=1; m=2; m=3; m=4$.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|3x^5-15x^3-60x+m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 289. **B.** 287. **C.** 286. **D.** 288.

Lời giải

Xét $y=3x^5-15x^3-60x$ có $y'=0 \Leftrightarrow 15x^4-45x^2-60=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy hàm số $y=3x^5-15x^3-60x$ có đúng 2 điểm cực trị $x=2; x=-2$

Bảng biến thiên

Vậy để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow 3x^5-15x^3-60x+m=0 \Leftrightarrow -m=3x^5-15x^3-60x$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3, tức $-144<-m<144 \Leftrightarrow -144<m<144 \Rightarrow m\in\{-143,..,143\}$. Có 287 số nguyên thỏa mãn.

Chọn B

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

□Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$

□Ta có $f(-2)=-8+4a-2b+c>0$; $f(2)=8+4a+2b+c<0$

và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Do đó, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 40. **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2019=x^3+ax^2+bx+c-2019$.

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\begin{cases} c>2019 \\ a+b+c-2018<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(0;1)$. (1)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty;0)$.

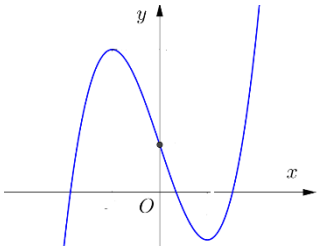
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(-\infty;0)$. (2)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ g(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;+\infty)$.

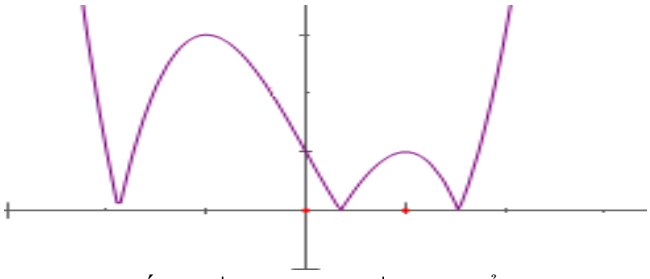
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(1;+\infty)$. (3)

Và hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3

Nên từ (1), (2), (3) đồ thị hàm số $g(x)$ có dạng



Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có dạng



Vậy hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có 5 điểm cực trị

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $a > 0$, $d > 2018$, $a + b + c + d - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^3 + bx^2 + cx + d - 2018$.

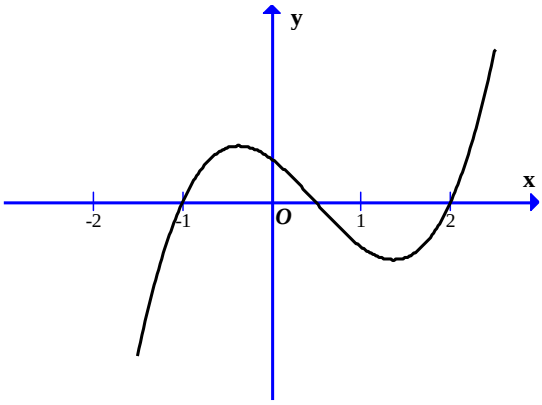
Ta có: $\begin{cases} g(0) = d - 2018 \\ g(1) = a + b + c + d - 2018 \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta được $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$.

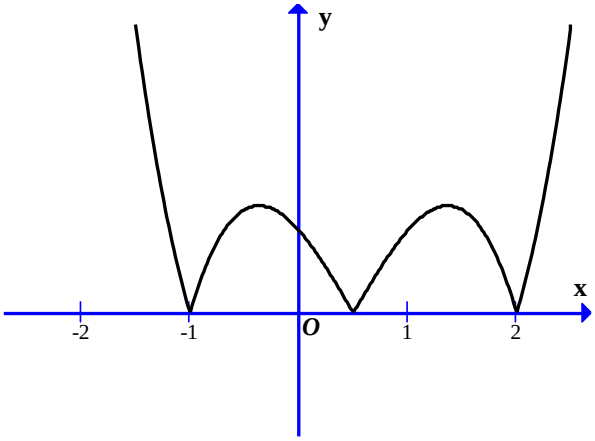
- Lại do: $a > 0$ nên $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists \beta > 1 : g(\beta) > 0$ và $\Rightarrow \exists \alpha < 0 : g(\alpha) < 0$.

Do đó: $\begin{cases} g(\alpha).g(0) < 0 \\ g(0).g(1) < 0 \\ g(1).g(\beta) < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\alpha;\beta)$.

Hay hàm số $y = g(x)$ có đồ thị dạng



Khi đó đồ thị hàm số $y = |g(x)|$ có dạng



Vậy hàm số $y = |f(x) - 2018|$ có 5 điểm cực trị.

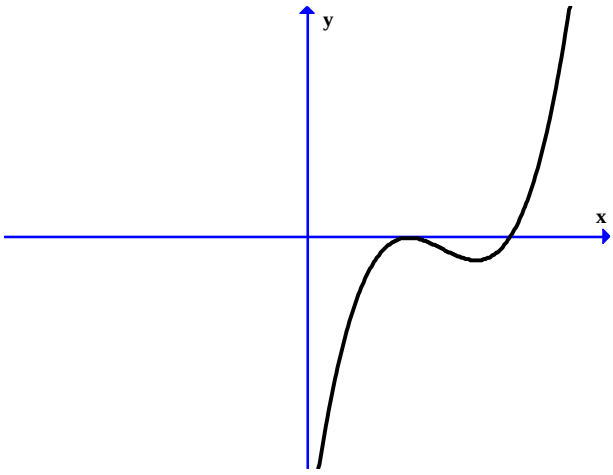
Câu 42. Biết rằng phương trình $2x^3 + bx^2 = -cx + 1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y = \left|2|x|^3 + bx^2 + c|x| - 1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

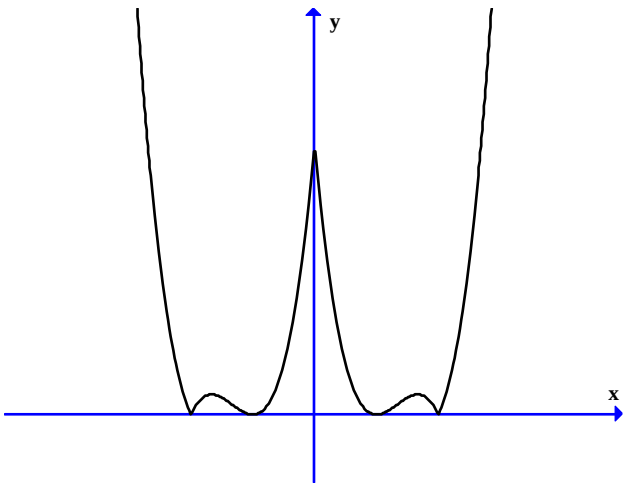
Lời giải

Chọn B

Vì phương trình $2x^3 + bx^2 = -cx + 1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt nên đồ thị hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx - 1 (C)$ phải cắt Ox tại đúng hai điểm có hoành độ dương trong đó điểm cực đại của đồ thị hàm số là một trong hai điểm đó.Vậy đồ thị (C) có dạng:



Bằng phép suy đồ thị ta có đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có dạng



Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b>1 \\ 3+2a+b<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=a+b-1>0$, $f(2)=4a+2b+6<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 44. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m,n\in\mathbb{R}$, biết $m+n>0$ và $7+2(2m+n)<0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

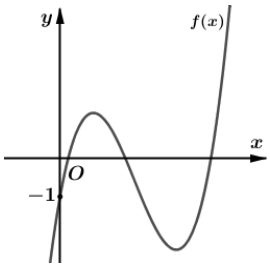
Chọn D

Cách 1: Ta có $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=m+n>0 \\ f(2)=7+4m+2n<0 \end{cases}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f(p)>0$.

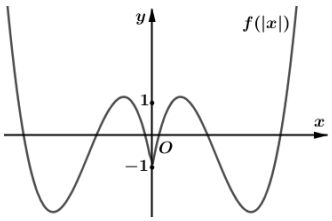
Suy ra $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in(0;1)$, $c_2\in(1;2)$ và $c_3\in(2;p)$. (1)

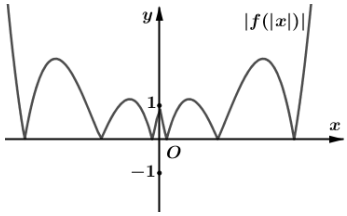
Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1\in(c_1;c_2)$ và $x_2\in(c_2;c_3)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow$ hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.



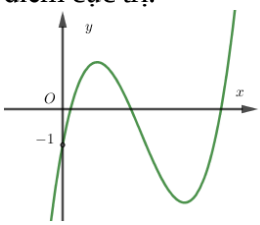


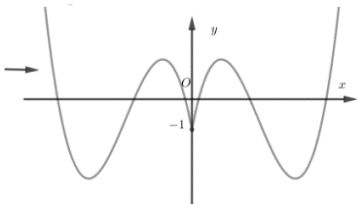
Cách 2: ta có $\begin{cases} m+n>0 \\ 7+2(2m+n)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)<0 \end{cases}$

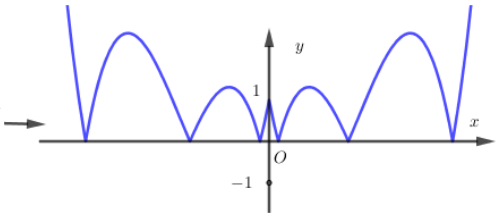
Vì $f(1)>0>f(2)$ nên hàm số $f(x)$ không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Ta có $f(0)=-1$, $f(1)=m+n>0$, $f(2)=7+4m+2n<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f(p)>0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in(0;1)$, $c_2\in(1;2)$ và $c_3\in(2;p)$. Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $x_1\in(c_1;c_2)$ và $x_2\in(c_2;c_3)$, dễ thấy x_1,x_2 là các số dương, hơn nữa hai giá trị cực trị này trái dấu $f(x_1)>0>f(x_2)$ (vì hệ số cao nhất là 1).

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 là các số dương nên đồ thị hàm số $f(|x|)$ sẽ có 5 điểm cực trị.







Do $f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu và $f(0)=-1$ nên phương trình $f(|x|)=0$ có 6 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có $5+6=11$ điểm cực trị.

Bình luận: Đây là dạng bài tập về đếm số điểm cực trị của hàm số dạng $|f(|x|)|$ trong đó số điểm cực trị

của hàm số $f(x)$ và những điều kiện liên quan bị ẩn đi.

Để giải quyết bài toán này bạn đọc cần dựa vào giả thiết bài toán để tìm:

□Số điểm cực trị n của hàm số $f(x)$

□Số điểm cực trị dương m (với $m<n$) của hàm số

□Số giao điểm p của đồ thị hàm số với trục hoành trong đó có q điểm có hoành độ dương

Bây giờ giả sử ta tìm được các dữ kiện trên khi đó ta suy ra

□Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có $2m+1$ điểm cực trị

□Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có $n+p$ điểm cực trị

□Đồ thị hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có $2m+2q+1$ điểm cực trị.

Ngoài vấn đề tìm số điểm cực trị, bài toán còn có nhiều hướng để ra đề khác ví dụ như hỏi số giao điểm với trục hoành, tính đồng biến nghịch biến của hàm số.

Câu 45. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị nhận hai điểm $A\left(0;3\right)$ và $B\left(2;-1\right)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|=\left|f\left(|x|\right)\right|$. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\longrightarrow$ hàm số $f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0;3)\in Oy$ và điểm cực trị $B(2;-1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Vẽ phát họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f\left(|x|\right)$, tiếp tục suy ra đồ thị $\left|f\left(|x|\right)\right|$.

Câu 46. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ bc<0 \end{cases}$. Đặt $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$. Số điểm cực trị của hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ lớn nhất có thể có là

A. 2. **B.** 9. **C.** 11 **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán ta có $f\left(1\right)<0$, $f\left(-2\right)>0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$ ta suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1<x_2$) và hai giá cực trị trái dấu nhau.

Khi $\begin{cases} b<0 \\ c>0 \end{cases}$ thì ta có $x_1x_2=\dfrac{b}{3}<0$ nên $x_1<0<x_2$ và $f\left(0\right)=c>0$ nên $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm dương. Do đó đồ thị hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Khi $\begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ thì ta có $x_1.x_2>0$ và $f\left(0\right)=c<0$ nên hàm số có hai điểm cực trị dương và ba giao điểm với trục hoành có hoành độ dương. Khi đó đồ thị hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b>1 \\ 3+2a+b<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f\left(x\right)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=-a+b-1>0$, $f(2)=2a+b+3<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ và $a>0$.

Biết $f(-1)<0, f(0)>0, f(1)<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ f(-1)<0\\ f(0)>0\\ f(1)<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).f(1)<0\\ f(0).f(-1)<0\\ f(0).f(1)<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).f(1)<0\end{cases} \Rightarrow \exists x_1<-1<x_2<0<x_3<1<x_4$

Sao cho $f(x_1)=0; f(x_2)=0; f(x_3)=0; f(x_4)=0$. Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, do đó hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị. Vì vậy hàm số $y=|f(x)|$ có $4+3=7$ điểm cực trị.

Chọn A

Câu 49. **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

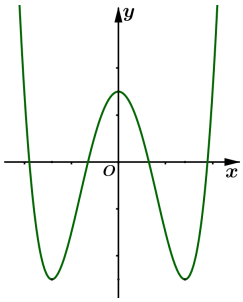
Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2018=ax^4+bx^2+c-2018$.

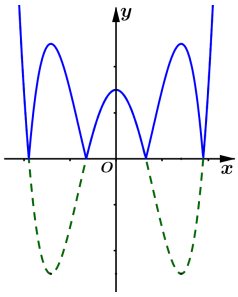
Ta có $\begin{cases}a>0\\ c>2018\\ a+b+c<2018\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>0\\ b<0\\ c>2018\end{cases} \Rightarrow a.b<0 \Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ là hàm trùng phương có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0)=c-2018 \Rightarrow g(0)>0$, $g(1)=a+b+c-2018<0 \Rightarrow g(x_{CT})\le g(1)<0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y=g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y=|g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y=|g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2017$ và $a+b+c<2017$. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)-2017|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

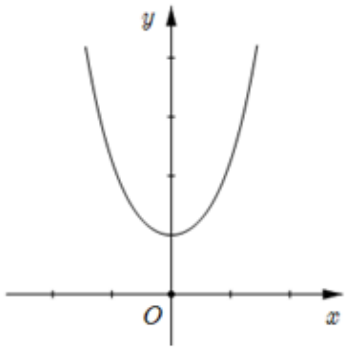
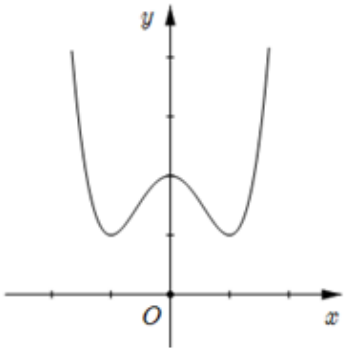
Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=|f(x)-2017|=\sqrt{(f(x)-2017)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{2(f(x)-2017).f'(x)}{2\sqrt{(f(x)-2017)^2}}$

Xét $f(x)=ax^4+bx^2+c\,(a>0)$ ta có: $\begin{cases} f(1)=a+b+c<2017 \\ f(0)=c>2017 \end{cases} \Rightarrow f(1)<f(0)$

Dựa vào 2 dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương khi $a>0$

$a>0$		

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị và PT: $f(x)-2017$ có 4 nghiệm phân biệt

Như vậy PT $y'=\dfrac{2(f(x)-2017).f'(x)}{2\sqrt{(f(x)-2017)^2}}=0$ có 7 nghiệm phân biệt do đó hàm số có 7 cực trị.

Câu 51. **(Nguyễn Du số 1 lần3)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=12x(x^2-x-2)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta thấy hàm $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 3 nghiệm của nó nên hàm số $f(x)$ có ba cực trị.

Để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$3x^4-4x^3-12x^2+m=0\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$.

Xét hàm số $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=12x(x^2-x-2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$ khi $-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+3x^2-x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-\frac{27}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 5 cực trị thì đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m-2<0<m-\dfrac{27}{256} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \dfrac{27}{256}<m<2 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên và $m\in[-5;5] \Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;1\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

do đó hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0;x=-1;x=2$

hàm số $f(|x|+m)$ luôn có 1 điểm cực trị $x=0$

phá trị tuyệt đối có $y=f(|x|+m)=\begin{cases} f(x+m)(x\ge 0) \\ f(-x+m)(x\le 0) \end{cases}$.

Hàm số $f(x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$x+m=-1;x+m=0;x+m=2 \Leftrightarrow x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Hàm số $f(-x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$-x+m=-1;-x+m=0;-x+m=2 \Leftrightarrow x=m+1;x=m;x=m-2.$

Do đó hàm số $f(|x|+m)$ có tối đa 7 điểm cực trị là $x=0;x=m+1;x=m;x=m-2;x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Điều kiện bài toán tương đương với $\begin{cases} -m-1>0 \\ -m>0 \\ -m+2>0 \\ m+1<0 \\ m<0 \\ m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1 \Rightarrow m\in\{-9,-8,...,-2\}$

Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 54. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 42. **B.** 21. **C.** 44. **D.** 22.

Lời giải

Hàm số $f(x)=3x^5-25x^3+60x+m$ có 4 điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 15x^4-75x^2+60=0 \Leftrightarrow x=\pm 2; x=\pm 1.$

Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3. Khảo sát hàm số dễ có $\left[\begin{array}{l}-38<-m<-16\\16<-m<38\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16<m<38\\-38<m<-16\end{array}\right.$

do đó có $21+21=42$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 55. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Lời giải

Nếu $x^2-2x+m\ge 0, \forall x$ thì $y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$ có đúng một điểm cực trị $x=0$ (loại).

Nếu $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2 \Leftrightarrow \Delta'=1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{\left|x^2-2x+m\right|}+2; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2+2=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\\\begin{cases}-(2x-2)+2=0\\x^2-2x+m<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\x^2-2x+m<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\m>0\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\m<0\end{cases}\end{array}\right.$$

+) Với $0<m<1$ rõ ràng không có số nguyên nào

+) Với $m<0$ ta có bảng xét dấu của y' như hình vẽ dưới đây

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m\in\{-19,...,1\}$.

Chọn C

Câu 56. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2019;2019)$ để hàm số $y=\left|x^2-4x+m\right|+6x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2013. **D.** 2015.

Lời giải

Nếu $x^2-4x+m\ge 0, \forall x \Rightarrow y=x^2-4x+m+6x+1=x^2+2x+m+1$ có đúng 1 điểm cực trị $x=-1$ (loại).

Nếu $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2 \Leftrightarrow \Delta'=4-m>0 \Leftrightarrow m<4$

Khi đó $y' = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+m)}{|x^2-4x+m|} + 6; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-4+6=0 \\ x^2-4x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-4)+6=0 \\ x^2-4x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ m>-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ m<-5 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $-5<m<4$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có đúng 1 cực trị $x=-1$ (loại).

Với $m<-5$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có 3 điểm cực trị $x=x_1; x=5; x=x_2$

Vậy $m \in \{-2018,...,-6\}$. Có 2013 số nguyên thỏa mãn.

Chọn C

Câu 57. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x-m+1| + 1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Lời giải

Ta có $y = \begin{cases} x^2 - 2m(x-m+1)(x-m+1 \ge 0) \\ x^2 + 2m(x-m+1)(x-m+1 \le 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m(x-m+1>0) \\ 2x + 2m(x-m+1<0) \end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m-1$ và

$$y' = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2m=0 \\ x-m+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2m=0 \\ x-m+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=m \\ 1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-m \\ -2m+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-m\left(m>\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên phải có $m > \dfrac{1}{2}$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau

Điều này chứng tỏ với $m > \dfrac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm, các số nguyên là $m \in \{1,...,19\}$. Có tất cả 19 số nguyên thỏa mãn.

Câu 58. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x-m+6| + 1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $y = \begin{cases} x^2 - 2m(x-m+6)(x-m+6 \ge 0) \\ x^2 + 2m(x-m+6)(x-m+6 \le 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m(x-m+6>0) \\ 2x + 2m(x-m+6<0) \end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m-6$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2m=0 \\ x-m+6>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2m=0 \\ x-m+6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ \begin{cases} x=-m \\ -2m+6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-m(m>3) \end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên ta phải có $m>3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau: Điều này chứng tỏ với $m>3$ là giá trị cần tìm, các số nguyên là $m\in\{4,...,19\}$ có tất cả 16 số nguyên thỏa mãn.

Câu 59. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Lời giải

Ta có $y=\left[\begin{array}{l}x^3-mx+5\left(x\ge 0\right)\\-x^3-mx+5\left(x<0\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow y'=\left[\begin{array}{l}3x^2-m\left(x>0\right)\\-3x^2-m\left(x<0\right)\end{array}\right.$ và hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$

Nếu $m=0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2>0\left(x>0\right)\\-3x^2<0\left(x<0\right)\end{cases}$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ nê hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=0$

Nếu $m>0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\left(x>0\right)\\-3x^2-m<0\left(x<0\right)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$ chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Nếu $m<0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m>0\left(x>0\right)\\-3x^2-m\left(x<0\right)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị

Chọn B