ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Định lý: Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$ thì

* $\forall u;v\in(a;b): f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

* Phương trình $f(x)=k\ (k=const)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

2. Định lý: Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$, đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} f(x).\lim\limits_{x\to b^-} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=k(k=const)$ có duy nhất nghiệm trên $(a;b)$.

3. Tính chất của logarit:

1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số: Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c. ∘ Khi $a>1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$. ∘ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$.	**1.2. Hệ quả:** Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c. ∘ Khi $a>1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b>1$. ∘ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b<1$. ∘ $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$.
2. Logarit của một tích: Cho 3 số dương $a,\ b_1,\ b_2$ với $a\neq 1$, ta có $\log_a(b_1.b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2$	**3. Logarit của một thương**: Cho 3 số dương $a,\ b_1,\ b_2$ với $a\neq 1$, ta có $\log_a\frac{b_1}{b_2}=\log_a b_1-\log_a b_2$ Đặc biệt: với $a,\ b>0,\ a\neq 1$ $\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b$.
4. Logarit của lũy thừa: Cho $a,\ b>0,\ a\neq 1$, với mọi α, ta có $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$. Đặc biệt: $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$ (n nguyên dương).	**5. Công thức đổi cơ số**: Cho 3 số dương $a,\ b,\ c$ với $a\neq 1, c\neq 1$, ta có $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$. Đặc biệt: $\log_a c=\frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b$ với $\alpha\neq 0$.

BÀI TẬP MẪU

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình mũ, logarit.

Phương pháp

Tìm hàm đặc trưng của bài toán, đưa phương trình về dạng $f(u)=f(v)$.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đưa phương trình đã cho về dạng $f(u)=f(v)$.

B2: Xét hàm số $y=f(t)$ trên miền D.

* Tính y' và xét dấu y'.

* Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y=f(t)$ trên D.

B3: Tìm mối liên hệ giữa $x;y$ rồi tìm các cặp số $(x;y)$ rồi kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x>-1$.

Ta có $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$

$\Leftrightarrow 3\log_3(3x+3)+3^{\log_3(3x+3)}=3(2y+1)+3^{2y+1}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=3t+3^t$ trên $\mathbb{R}$, vì $f'(t)=3+3^t.\ln 3>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*) \Leftrightarrow f(\log_3(3x+3))=f(2y+1) \Leftrightarrow \log_3(3x+3)=2y+1$.

Mặt khác $0 \le x \le 2020 \Leftrightarrow \log_3(3x+3)\in[1;\log_3(6063)] \Rightarrow 2y+1\in[1;\log_3(6063)]$

$\begin{cases}1\le 2y+1\le \log_3(6063)\\ y\in Z\end{cases} \Leftrightarrow 0\le y\le 3$. Vậy có 4 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 47.1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Ta có

$$2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{mx-2m-1}{x-2}=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{m(x-2)-1}{x-2}=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x-2}=-m.\qquad (*)$$

Đặt $f(x)=2019^x+\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x-2}$. Khi đó

$$f'(x)=2019^x\ln 2019+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}>0\quad \forall x\in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $(*)$ có 3 nghiệm thực phân biệt thì

$$-m>2\Rightarrow m<-2.$$

Mà $m\in[-2019;\,2019]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 47.2: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y\ne 0\\ \frac{2^x-1}{y}>0\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 2^x>1\Leftrightarrow x>0$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3\left(2^x-1\right)+2^x-1=\log_3 y+y\qquad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ do đó hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f(2^x-1)=f(y)\Leftrightarrow y=2^x-1$

Vì $0\le y\le 2020\Leftrightarrow 0\le 2^x-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2^x\le 2021\Leftrightarrow 0\le x\le \log_2(2021)$

$\begin{cases}0\le x\le \log_2(2021)\\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 47.3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(3x+5y)=f(x+3y+1)\Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$ (2)

Đặt $t=\log_3 x$. Số nghiệm của phương trình (2) chính là số nghiệm của phương trình

$$t^2-(m+6)t+m^2+9=0 \qquad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta\ge 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 47.4: Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x>-\dfrac{m}{2}\end{cases}$

$\log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-2(x+2m)-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+2(x+2m)+1=\log_2 x^2+x^2$

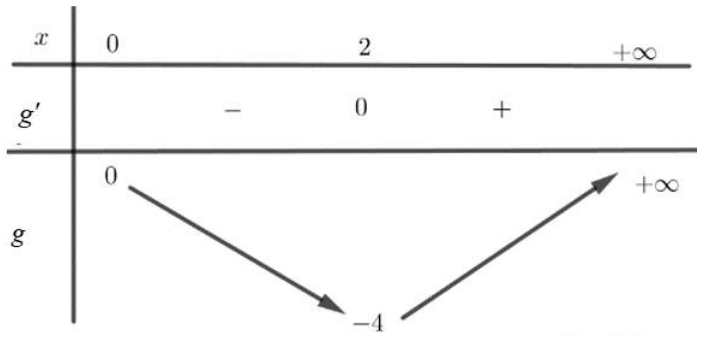
$\Leftrightarrow \log_2 2(2x+m)+2(x+2m)=\log_2 x^2+x^2 \qquad (1)$

Xét $f(u)=\log_2 u+u,(u>0)$

$f'(u)=\dfrac{1}{u\ln 2}+1>0$, do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(2(2x+m))=f(x^2)\Leftrightarrow 2(2x+m)=x^2 \Leftrightarrow x^2-4x=2m$

Xét hàm số $g(x)=x^2-4x,(x>0)$



Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4<2m<0 \Leftrightarrow -2<m<0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

Câu 47.5: Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0, x\neq\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7(4x^2-4x+1)+4x^2-4x+1=\log_7(2x)+2x$.

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0 \quad \forall t>0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó ta có $4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1+2x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}+2\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$ hoặc $x_1+2x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}+2\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4};x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a=9;b=5$ và $a+b=9+5=14$.

Câu 47.6: Biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)$ (1).

ĐKXĐ: $x>1$.

$(1)\Leftrightarrow\log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\log_3 2\sqrt{x}=\log_5 x+2\log_3\left(x-1\right)$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_5 t+2\log_3\left(t-1\right)$, với $t>1$.

$f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 5}+\frac{2}{\left(t-1\right)\ln 3}>0$ với mọi $t>1$, suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Từ (*) ta có $f\left(2\sqrt{x}+1\right)=f\left(x\right)$ nên suy ra $2\sqrt{x}+1=x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ (do $x>1$).

Suy ra $x=3+2\sqrt{2}\Rightarrow a=3;b=2\Rightarrow 2a+b=8$.

Câu 47.7: Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 45. **B.** 34. **C.** 27. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left[\left(x-3\right)^3+27+m-3x\right].3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x-3\right)^3+m-3x+27=3^3+3^{3-x}\left(1\right)$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 3^b+27+b^3-a^3=27.+3^a\Leftrightarrow 3^b+b^3=3^a+a^3$

Đặt $a=3-x;\ b=\sqrt[3]{m-3x}$, phương trình (1) trở thành

$3^b+27+b^3-a^3=27.+3^a\Leftrightarrow 3^b+b^3=3^a+a^3$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+t^3\Rightarrow f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+3t^2\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}$

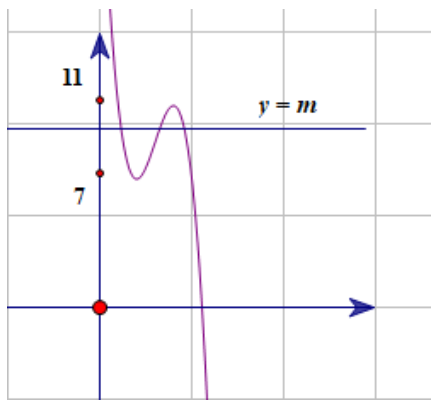
$(1)\Leftrightarrow f\left(a\right)=f\left(b\right)\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow 3-x=\sqrt[3]{m-3x}$

$\Leftrightarrow m=\left(3-x\right)^3+3x=-x^3+9x^2-24x+27$

$g\left(x\right)=-x^3+9x^2-24x+27\Rightarrow g'\left(x\right)=-3x^2+18\text{x}-24$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=4$

Đồ thị:



Dựa vào đồ thị ta thấy điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt là $7<m<11$ hay $m\in\left\{8;9;10\right\}$.

Câu 47.8: Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6}\le m\le\sqrt{6}$. **B.** $-5\le m\le 5$. **C.** $5-\sqrt{6}\le|m|\le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6}\le m\le 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}}{3^{|m|+5}}=\dfrac{\ln\left(|m|+5\right)}{\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}.\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=3^{|m|+5}.\ln\left(|m|+5\right)$ (1)

Xét $f(t)=\ln(t).3^t$, $\forall t\ge 5$, vì $f'(t)=\frac{1}{t}3^t+\ln(t)3^t\ln(3)>0,\forall t\ge 5$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(5;+\infty)$.

Khi đó

$(1)\Leftrightarrow f\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)=f\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+10=|m|+5$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+5=|m|$

Mà $-\sqrt{6}\le \sin x+\sqrt{5}\cos x\le\sqrt{6}$ nên để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6}\le|m|\le 5+\sqrt{6}$.

Câu 47.9: Số nghiệm thực của phương trình $6^x=3\log_6(5x+1)+2x+1$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>-\frac{1}{5}$.

PT: $\Leftrightarrow 6^x+3x=3\log_6(5x+1)+5x+1\Leftrightarrow 6^x+3x=6^{\log_6(5x+1)}+3\log_6(5x+1)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=6^t+3t$, vì $f'(t)=6^t.\ln 6+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\log_6(5x+1)\right)\Leftrightarrow x=\log_6(5x+1)\Leftrightarrow \log_6(5x+1)-x=0$

Xét hàm số $h(x)=\log_6(5x+1)-x$ trên $\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$, ta có

$h'(x)=\frac{5}{(5x+1)\ln 6}-1$

$h''(x)=-\frac{25}{(5x+1)^2\ln 6}<0,\forall x>-\frac{1}{5}$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{5}\right)^+}h'(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=-1$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{-1}{5}$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(x_0)$	$\searrow$	-1

Từ BBT suy ra phương trình $h(x)=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$

Mà $h(0)=0, h(1)=0$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x=0, x=1$.

Câu 47.10: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>-\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$\ln\left(5^x+3^x\right)-\ln\left(6x+2\right)+5\left(5^x+3^x\right)-5\left(6x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \ln\left(5^x+3^x\right)+5\left(5^x+3^x\right)=\ln\left(6x+2\right)+5\left(6x+2\right)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\ln t+5t, t>0$. Có $f'(t)=\frac{1}{t}+5>0$, $\forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(5^x+3^x\right)=f\left(6x+2\right)\Leftrightarrow 5^x+3^x=6x+2 \Leftrightarrow 5^x+3^x-6x-2=0$

Xét $g(x)=5^x+3^x-6x-2$, $g'(x)=5^x\ln 5+3^x\ln 3-6$

$g''(x)=5^x(\ln 5)^2+3^x(\ln 3)^2>0$, $\forall x>-\frac{1}{3}$.

Nên $g'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Mà $g(0)=g(1)=0$. Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{0,1\}$. Do đó $S=1$.

Câu 47.11: Số nghiệm của phương trình $\ln\frac{\sqrt{x^2+80}}{3^x}=2.3^{x+1}-2\sqrt{x^2+80}+\ln 3$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

PT $\Leftrightarrow \ln\sqrt{x^2+80}+2\sqrt{x^2+80}=\ln 3^{x+1}+2.3^{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\ln t+2t,\forall t>0$; Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t}+2>0,\forall t>0\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(\sqrt{x^2+80}\right)=f\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+80}=3^{x+1}\Leftrightarrow x^2+80=9^{x+1}\Leftrightarrow 9^{x+1}-x^2-80=0$

Xét hàm số $g(x)=9^{x+1}-x^2-80$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$g'(x)=2.9^{x+1}\ln 3-2x$

$g''(x)=4.9^{x+1}(\ln 3)^2-2$

$g''(x)=0\Leftrightarrow x=x_0=-\log_9\left(2\ln^2 3\right)-1\Rightarrow g'(x_0)=g'\left(-\log_9\left(2\ln^2 3\right)-1\right)\approx 3,7>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g'(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	6		$-log_9(2ln^2 3)-1$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g'(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mà $g(1)=0$

Do đó phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm .

Câu 47.12: Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm?

A. 20. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > m$

PT $\Leftrightarrow 2^x + x = x - m + \log_2(x-m) \Leftrightarrow 2^x + x = 2^{\log_5(x-m)} + \log_2(x-m)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$; Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) suy ra $f(x) = f(\log_2(x-m)) \Leftrightarrow x = \log_2(x-m) \Leftrightarrow x - m = 2^x \Leftrightarrow m = x - 2^x$

Xét hàm số $g(x) = x - 2^x$ trên $(m;+\infty)$. Ta có: $g'(x) = 1 - 2^x \ln 2$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 = 1 \Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e) \Rightarrow g(\log_2(\log_2 e)) = \log_2(\log_2 e) - \log_2 e$

$\lim\limits_{x \to m^+} g(x) = m - 2^m$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	m		$log_2(log_2 e)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$m - 2^m$	$\nearrow$	$log_2(log_2 e) - log_2 e$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó. Phương trình đã cho có 2 nghiệm

$m - 2^m < m < \log_2(\log_2 e) - \log_2 e \Leftrightarrow m < \log_2(\log_2 e) - \log_2 e \approx -0,91$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-18;18) \end{cases}$ nên $m \in \{-17;-16;-15;....;-1\}$

Vậy có 17 giá trị của m .

Câu 47.13: Cho phương trình

$$2^{-\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|}.\log_{81}\left(\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|+2\right)+2^{-\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|-2}.\log_3\left(\frac{1}{\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|+2}\right)=0$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có 6 nghiệm hoặc 7 nghiệm hoặc 8 nghiệm phân biệt . Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S.

A. 20. **B.** 19. **C.** 14. **D.** 28.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{-\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|}.\log_{81}\left(\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|+2\right)+2^{-\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|-2}.\log_3\left(\dfrac{1}{\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|+2}\right)=0$

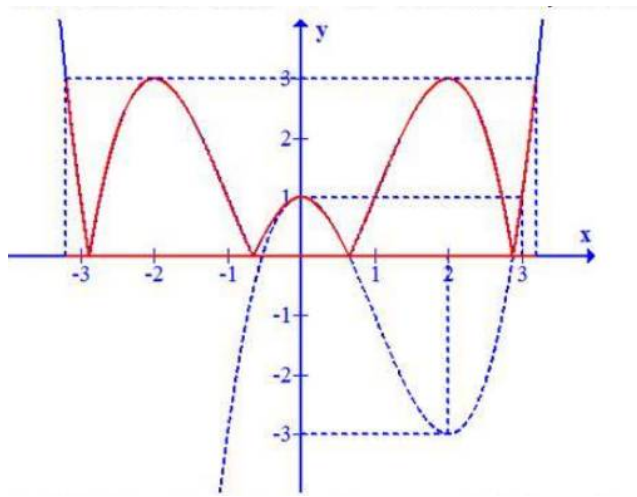
$\Leftrightarrow 2^{\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|+2}.\log_3\left(\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|+2\right)=2^{\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|+2}.\log_3\left(\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|+2\right)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_3 t$ với $t\ge 2$; Ta có $f'(t)=2^t\ln 2.\log_3 t+2^t.\dfrac{1}{t\ln 3}>0\forall t\ge 2$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Do đó phương trình tương đương với $\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|=\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|\quad(1)$.

Vẽ đồ thị hàm số $g(x)=x^3-3x^2+1$ từ đó suy ra đồ thị $\left|g(x)\right|$ và đồ thị của $\left|g(|x|)\right|$ như hình vẽ.



Từ đồ thị suy ra (1) có $6,7,8$ nghiệm $\Leftrightarrow 0<\left|g(|m|)\right|<3$.

Từ đồ thị suy ra các giá trị nguyên của m là $-3,-1,0,1,3$.

Vậy $S=20$.

Câu 47.14: Cho phương trình $2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=4^{|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$. Gọi S là tập hợp các giá trị a thuộc đoạn $[0;2020]$ và chia hết cho 3 để phương trình có hai nghiệm. Hãy tính tổng các phần tử của S.

A. 0. **B.** 2041210. **C.** 680403. **D.** 680430.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương

$2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=2^{2|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$

$\Leftrightarrow 4.2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=4.2^{2|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2}\log_2\left(x^2+2\right)=2^{2|x+a|+2}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t\log t,\ t\ge 2$. Có $f'\left(t\right)=2^t\ln 2.\log_2 t+\dfrac{2^t}{t\ln 2}>0,\forall t\ge 2$, nên $f\left(t\right)$ đồng biến $\left[2;+\infty\right)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x^2+2\right)=f\left(2|x+a|+2\right) \\ x^2+2\ge 2;\ 2|x+a|+2\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=2|x+a|$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2\left(x+a\right) \\ x^2=-2\left(x+a\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-2a=0 & (2) \\ x^2+2x+2a=0 & (3) \end{array}\right.$

Phương trình (2) $\Delta'_{(2)}=1+2a$, phương trình (3) có $\Delta'_{(3)}=1-2a$.

Vì $\Delta'_{(2)}+\Delta'_{(3)}=2>0$ nên ít nhất một trong hai phương trình (2), (3) luôn có hai nghiệm phân biệt. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, ta xét các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt: $\Delta'_{(2)}>0\Leftrightarrow 1+2a>0\Leftrightarrow a>-\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\Delta'_{(3)}<0$ nên (3) vô nghiệm. Trường hợp này thỏa mãn điều kiện bài toán.

* TH1: (3) có hai nghiệm phân biệt: $\Delta'_{(3)}>0\Leftrightarrow 1-2a>0\Leftrightarrow a<\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\Delta'_{(2)}<0$ nên (2) vô nghiệm. Trường hợp này cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Vì $a\in\left[0;2020\right]$ và chia hết cho 3 nên $a\in S=\left\{3;6;9;12;...,2019\right\}$

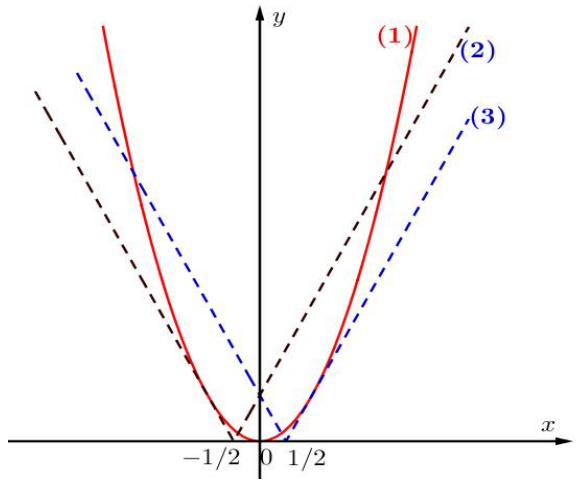
Tổng các phần tử của S là: $3+6+9+...+2019=3.1+3.2+3.3+...+3.673$

$=3\left(1+2+3+...+673\right)=3.\dfrac{673.674}{2}=680403$

<u>BỔ SUNG CÁCH 2:</u>

Xét phương trình $x^2=2|x+a|$ (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2$ (1); $y=2|x+a|$ (2) trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Xét 2 vị trí nhánh trái và phải của đồ thị hàm số (2) tiếp xúc với (1) khi đó dễ dàng tìm được $a=\frac{-1}{2}$; $a=\frac{1}{2}$ ứng với đồ thị (2); (3) (hình vẽ).

Từ đồ thị nhận xét :

Phương trình $(*)$ đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Vì $a\in[0;2020]$ và chia hết cho 3 nên $a\in S=\{3;6;9;12;...,2019\}$

Tổng các phần tử của S là: $3+6+9+...+2019=3.1+3.2+3.3+...+3.673$

$=3(1+2+3+...+673)=3.\frac{673.674}{2}=680403$

Câu 47.15: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để phương trình

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-a|+2\right)=0$$

có 3 nghiệm thực phân biệt ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

PT đã cho tương đương với $\frac{1}{2^{2|x-a|}}\log_{2^{\frac{1}{2}}}\left(x^2-2x+3\right)+\frac{1}{2^{x^2-2x}}\log_{2^{-1}}\left(2|x-a|+2\right)=0$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{2^{2|x-a|}}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=\frac{1}{2^{x^2-2x}}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-a|}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-a|+2}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_2 t, \forall t\ge 2$; Ta có: $f'(t)=2^t\ln t+\dfrac{2^t}{t\ln 2}>0, \forall t\ge 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-a|+2\right)\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-a|+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-a|$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-a) \\ x^2-2x+1=-2(x-a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+2a+1=0 & (2) \\ x^2=2a-1 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}>0 \\ \Delta'_{(3)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a>0 \\ 2a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}=0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a=0 \\ 2a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ $\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$$

- Khi $a=1$ ta có: (2) trở thành $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

  (3) trở thành $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

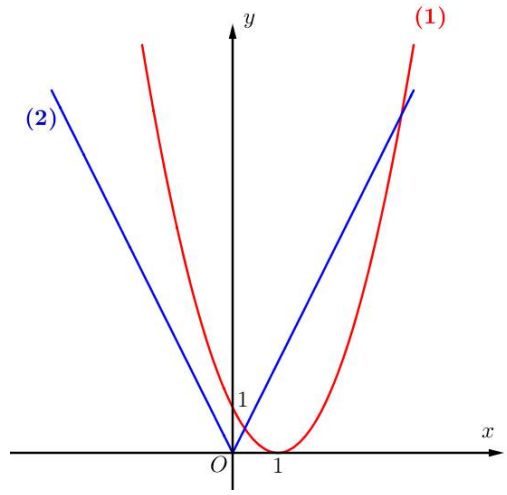
  Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy $a\in\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

BỔ SUNG CÁCH 2:

Xét phương trình $x^2-2x+1=2|x-a|$ $(*)$

Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$ (1); $y=2|x-a|$ (2) trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Nhận xét $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{nhánh bên trái của (2) tiếp xúc với (1)}\\ \text{nhánh bên phải của (2) tiếp xúc với (1)}\\ \text{(1) và (2) cùng trùng cực trị tại 1}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=2(a-x)\text{ có nghiệm kép}\\ x^2-2x+1=2(x-a)\text{ có nghiệm kép}\\ a=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{3}{2}\\ a=1\end{array}\right.$$

Vậy có 3 giá trị của a thỏa mãn bài toán.

Câu 47.16: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-a|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-a|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

PT đã cho tương đương với $3^{x^2-2x+3-(2|x-a|+2)}=\dfrac{\ln\left(2|x-a|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right)=3^{2|x-a|+2}.\ln\left(2|x-a|+2\right)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=3^t.\ln t, \forall t\ge 2$; Ta có: $f'(t)=3^t\ln 3.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t\ge 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-a|+2\right)\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-a|+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-a|$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-a) \\ x^2-2x+1=-2(x-a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+2a+1=0 & (2) \\ x^2=2a-1 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}>0 \\ \Delta'_{(3)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a>0 \\ 2a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}=0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a=0 \\ 2a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ $\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$$

- Khi $a=1$ ta có: (2) trở thành $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

  (3) trở thành $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

  Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy $a \in \left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 47.17: Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20;20]$ để phương trình

$\log_2(x^2+m+x\sqrt{x^2+4})=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm.

A. 12. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2+m+x\sqrt{x^2+4}>0$.

$$\log_2\left(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+4}-x}+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x+m\sqrt{x^2+4}-mx}{\sqrt{x^2+4}-x}\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(4x+m\sqrt{x^2+4}-mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+1=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$, $t\in(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\ \Leftrightarrow 8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx=\sqrt{x^2+4}-x$

$$\Leftrightarrow 2m\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)-8x$$

$$\Leftrightarrow 2m=1-\frac{8x}{\sqrt{x^2+4}-x}$$

$$\Leftrightarrow 2m=1-\frac{8x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2m=1-2x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+4}+x^2=\frac{1-2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x)=x\sqrt{x^2+4}+x^2$ với $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{\sqrt{x^2+4}}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1}=-2\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1\right)\right] = +\infty .$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1-2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Do m nguyên thuộc $[-20;20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 47.18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y} = \left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+18}{x}$ là

A. 9. **B.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4+9.3^{x^2-2y} = \left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \Leftrightarrow 4+3^{x^2-2y+2} = \left[4+3^{2(x^2-2y)}\right].7^{2y-x^2+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}} = \frac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}} (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4+3^t}{7^t}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(t) = 4.\left(\frac{1}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right) = f\left[2(x^2-2y)\right] \Leftrightarrow x^2-2y+2 = 2(x^2-2y) \Leftrightarrow x^2-2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2-2.$

Từ đó $P = \frac{x^2+x+16}{x} = x+\frac{16}{x}+1 \geq 2\sqrt{x.\frac{16}{x}}+1 \Leftrightarrow P \geq 9.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 4$.

Câu 47.19: Cho các số dương x, y thỏa mãn $\log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\le 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$ bằng

A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$. **B.** $11\sqrt{3}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $\begin{cases}\frac{x+y-1}{2x+3y}>0\\ x,y>0\end{cases}\Leftrightarrow x+y>1$

Ta có:

$$\log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\le 4$$
$$\Leftrightarrow\left(\log_5(x+y-1)+1\right)+5(x+y-1)\le\log_5(2x+3y)+2x+3y$$
$$\Leftrightarrow\log_5\left[5(x+y-1)\right]+5(x+y-1)\le\log_5(2x+3y)+2x+3y\,(*)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_5(t)+t$ trên $(0;+\infty)$, vì $f'(t)=\frac{1}{t\ln 5}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow 5(x+y-1)\le 2x+3y\Leftrightarrow 3x+2y\le 5$

Mặt khác, ta có

$$A=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=\left(9x+\frac{4}{x}\right)+\left(4y+\frac{9}{y}\right)-(3x+2y)\ge 2.6+2.6-5=19.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}9x=\frac{4}{x}\\ 4y=\frac{9}{y}\\ 3x+2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy GTNN của A là 19.

Câu 47.20: Cho hai số thực x, y lớn hơn 1 và thỏa mãn $y^x.(e^x)^{e^y} \ge x^y.(e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x, y > 1$, ta có

$$\begin{aligned}
&y^x.(e^x)^{e^y} \ge x^y.(e^y)^{e^x} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(y^x.(e^x)^{e^y}\right) \ge \ln\left(x^y.(e^y)^{e^x}\right) \\
&\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \ge y\ln x + ye^x \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} + \frac{e^y}{y} \ge \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} (1).
\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(t) = te^t - e^t + 1 - \ln t$ trên $[1;+\infty)$, có $g'(t) = te^t - \frac{1}{t} > 0, \forall t \ge 1$.

Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $g(t) > g(1) = 1 > 0, \forall t > 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{e^t}{t}$ trên $(1;+\infty)$, có $f'(t) = \frac{g(t)}{t^2} > 0, \forall t > 1$, nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Với $x, y > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow f(y) \ge f(x) \Leftrightarrow y \ge x$.

Đặt $u = \log_x y$. Do $y \ge x > 1$ nên $u \ge 1$. Ta có $P = h(u) = \frac{1+u}{2} + \frac{1}{u}$. Nhận thấy $h'(u) = \frac{u^2-2}{2u^2}$, nên $h'(u) = 0$ khi $u = \sqrt{2}$, $h'(u) < 0$ khi $1 \le u < \sqrt{2}$, $h'(u) > 0$ khi $u > \sqrt{2}$. Dẫn tới $P = h(u) \ge h\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \forall u \ge 1$, đẳng thức xảy ra khi $u = \sqrt{2}$.

Vậy $\min P = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $y = x^{\sqrt{2}}$ và $x > 1$.

Câu 47.21: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \le x, y \le 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1).(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy}>0;1-xy\neq 0\ \Rightarrow x+y>0;1-xy>0$ khi đó

$$\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)\quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\quad (t>0)$ có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\frac{1-x}{1+x}$

Xét hàm số $f(x)=2x+\frac{1-x}{x+1}$ với $x\in[0;1]$ có $f'(x)=2+\frac{-2}{(x+1)^2}$ cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$f(0)=1;f(1)=2\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x)=1\Rightarrow$ chọn **B**

Câu 47.22: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=4$. **C.** $P_{\min}=2$. **D.** $P_{\min}=16$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0<x<\frac{1}{2}$.

Từ giả thiết $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1\Leftrightarrow \ln(1-2x)+(1-2x)=\ln(x+y)+(x+y)\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\frac{1}{t}+1>0$, $\forall t>0$ do đó hàm $f(t)$ đơn điệu.

Vậy $(1)\Leftrightarrow 1-2x=x+y\Leftrightarrow 3x+y=1\ (2)$

Có $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq\frac{1}{x}+\frac{2}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-2x}$

Đặt $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-2x}$, ta có $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{(1-2x)^2}$ suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Do đó $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right)} g(x)=8$. Vậy $P_{\min}=8$.

Bổ sung: có thể đánh giá $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq\frac{1}{x}+\frac{2}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-2x}\geq\frac{4}{x+\frac{1}{2}-x}=\frac{1}{8}$

Câu 47.23: Cho hai số thực x, y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log_2\left(2(x+1)^2\right)=\log_2(2y+1)+(2y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ $,(t>0)$; $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 2}>0, \forall t>0$

Suy ra $2(x+1)^2=2y+1 \Rightarrow 2y=2(x+1)^2-1$.

$P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1 = e^{2x-1}+4x^2-2(x+1)^2+1+1 = e^{2x-1}+2x^2-4x=g(x)$.

$g'(x)=2e^{2x-1}+4x-4$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên $g'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm, nhẩm được nghiệm $x=\frac{1}{2}$ nên nghiệm đó là duy nhất.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P=-\frac{1}{2}$ tại $x=\frac{1}{2}$.

Câu 47.24: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1}=(x^2+y).2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=3$. **B.** $y_{\min}=2$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(xy-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy-1-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y+1}\ (1)$

Xét hàm $f(t)=(t-1).2^t$ với $t\ge 1$.

Khi đó $f'(t)=2^t+(t-1).2^t.\ln 2>0$ với $\forall t\ge 1$.

Từ $(1) \Leftrightarrow 2xy-1=x^2+y+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+2}{2x-1}$

$$y'=\frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$$

Loại $x=-1$ vì điều kiện của t nên $f(2)=2$.

Câu 47.25: Cho $\begin{cases}x,y\in\mathbb{R}\\x,y\geq 1\end{cases}$ sao cho $\ln\left(2+\frac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy(x+2y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $T=x+\frac{1}{x+3y}$.

A. $m=1+\sqrt{3}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{5}{4}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\ln\left(2+\frac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy(x+2y)\Leftrightarrow \ln(2y+x)+(2y+x)^3=\ln(3y)+(3y)^3\ \ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\ln(t)+t^3$ với $t>0$ có $f'(t)=\frac{1}{t}+3t^2>0\quad \forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến

Vậy $(1)\Leftrightarrow 2y+x=3y\Leftrightarrow x=y\Rightarrow T=x+\frac{1}{4x}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$T=x+\frac{1}{4x}=\frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}\geq\frac{3x}{4}+2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{4x}}=\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$

Câu 47.26: Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. 3. **B.** $5+2\sqrt{5}$. **C.** $3-2\sqrt{5}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+4y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$

$\Leftrightarrow\ 5^{x+4y}-3^{-x-4y}+x+4y=5^{xy-1}-3^{1-xy}+xy-1(1)$.

Xét hàm số $f(t)=5^t-3^{-t}+t$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f'(t)=5^t.\ln 5+3^{-t}.\ln 3+1>0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x+4y=xy-1(3)$. Dễ thấy $x=4$ không thỏa mãn (3).

Với $x\neq 4$, $(3)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-4}$ kết hợp điều kiện $y>0$ suy ra $x>4$.

Do đó $P = x + y = x + \dfrac{x+1}{x-4}$.

Xét hàm số $g(x) = x + \dfrac{x+1}{x-4}$ trên $(4;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{5}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4+\sqrt{5} \\ x = 4-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

x	4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \min\limits_{(4;+\infty)} g(x) = 5 + 2\sqrt{5}$.

Câu 47.27: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \dfrac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \dfrac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + y$.

A. $T_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$. **B.** $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\min} = 1 + \sqrt{5}$. **D.** $T_{\min} = 5 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề ra ta có

$$5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1$$

Xét $f(t) = 5^t - \dfrac{1}{3^t} + t$. $\Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$

$\Rightarrow x + 2y = xy - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-2}$.Do $y > 0, x > 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow x > 2$

Ta có: $T = x + y = x + \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x-2}$

$$T' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \in (2;+\infty) \\ x = 2-\sqrt{3} \notin (2;+\infty) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

Chỉnh lại bbt cho em,chỉ xét với $x > 2$ nhé,kết quả không thay đổi.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		0		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
T'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
T	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $T_{\min}=3+2\sqrt{3}$ tại $x=2+\sqrt{3}$.

Câu 47.28: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\dfrac{1}{y}$.

A. $A_{\min}=\dfrac{14}{3}$. **B.** $A_{\min}=-\dfrac{14}{3}$. **C.** $A_{\min}=-6$. **D.** $A_{\min}=6$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-3y>0$.

$\log_3\dfrac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1\Leftrightarrow\log_3(x-3y)-\log_3(xy+1)=xy+3y-x+1$

$\Leftrightarrow\log_3(x-3y)+(x-3y)=\log_3(xy+1)+xy+1(1)$.

Xét hàm $f(t)=\log_3 t+t,\ t>0$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(1)\Leftrightarrow x-3y=xy+1\Rightarrow y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

$A=x+\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{x+3}{x-1}$.

Đặt $A=A(x)=x+\dfrac{x+3}{x-1}\Rightarrow A'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=3$ do $x,y>0$.

x	0		3		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A	$-\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Câu 47.29: Cho $x,y>0$ thỏa $2019^{2(x^2-y+2)}-\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-4x$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2019^{2\left(x^2-y+2\right)}-\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow 2019^{2\left(x^2+4x+4\right)-2(4x+y+2)}=\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2019^{2(x+2)^2}.(x+2)^2=2019^{2(4x+y+2)}.(4x+y+2)(*)$.

Đặt $\begin{cases}u=(x+2)^2\\ v=4x+y+2\end{cases}(u,v>0)$

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 2019^{2u}.u=2019^{2v}.v\ \Leftrightarrow f(u)=f(v)$

với $f(t)=2019^{2t}.t,(t>0)$

$\Rightarrow f'(t)=2019^{2t}.2\ln 2019.t+2019^{2t}>0,\forall t>0$

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\ \Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y+2\Leftrightarrow y=x^2+2.$

$\Rightarrow P=2y-4x=2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2\geq 2$.

Vậy $P_{\min}=2\Leftrightarrow x=1$.

Câu 47.30: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]+(x-1)(y+1)=9$.

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)+x-1\right]=9$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x-1=\dfrac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1-2=\dfrac{9}{y+1}-2+\log_3\dfrac{9}{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $x+1=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{y+1}-1=\dfrac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y\in(0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\dfrac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\dfrac{9}{y+1}=2(y+1)+\dfrac{9}{y+1}-3\geq -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ khi $2(y+1) = \dfrac{9}{y+1} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 1$.

Câu 47.31: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \log_3(1-y) - \log_3(x+3xy) = 3xy + x + 3y - 4$

$\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (x+3xy)$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t,\ t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0,\ \forall t > 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (x+3xy) \Leftrightarrow 3(1-y) = x + 3xy$

$\Rightarrow x = \dfrac{3(1-y)}{1+3y} \Rightarrow x + y = y + \dfrac{3(1-y)}{1+3y} \geq \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Câu 47.32: Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, $t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} + 1 > 0,\ \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2$ $\quad (1)$

Từ (1) $\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$.

Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \le \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

Đặt $t = x+y$, $t > 0$.

Suy ra: $P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \le \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận)

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 47.33: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = 2y - 3x$.

A. $P_{\min} = \frac{1}{2}$. **B.** $P_{\min} = \frac{7}{8}$. **C.** $P_{\min} = \frac{3}{4}$. **D.** $P_{\min} = \frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2-y+1) = \log_{2018}\frac{2x+y}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2(2x+y) = \log_{2018}(2x+y) - \log_{2018}(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_{2018}(x+1)^2 = 2(2x+y) + \log_{2018}(2x+y)$

Có dạng $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y)$ với $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, $(\forall t > 0)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, $(\forall t > 0)$, ta có $f'(t) = 2 + \frac{1}{t.\ln 2018} > 0$ $(\forall t > 0)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y$ $\Leftrightarrow y = x^2+1$.

Ta có $P = 2y - 3x = 2(x^2+1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
P	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $P_{\min}=\frac{7}{8}$ khi $x=\frac{3}{4}$.

Câu 47.34: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\frac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]+(x-1)(y+1)=9$.

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)+x-1\right]=9$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x-1=\frac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1-2=\frac{9}{y+1}-2+\log_3\frac{9}{y+1}$ **(*).**

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1=\frac{9}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\frac{9}{y+1}-1=\frac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y\in(0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\frac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\frac{9}{y+1}=2(y+1)+\frac{9}{y+1}-3\ge -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$ khi $2(y+1)=\frac{9}{y+1}\Leftrightarrow y=\frac{3}{\sqrt{2}}-1$.

Câu 47.35: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2 x+x(x+y)\ge\log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{8}{y}$ bằng

A. $\frac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\frac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 0<y<6 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có:

$\log_2 x + x(x+y) \ge \log_2(6-y)+6x \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 \ge \log_2\left[x(6-y)\right]+x(6-y)(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t + t$ với $t>0$, Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t>0$ nên hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2) \ge f\left[x(6-y)\right] \Leftrightarrow x^2 \ge x(6-y) \Leftrightarrow x \ge 6-y \Leftrightarrow x+y \ge 6 (**)$(do $x>0$)

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức $(**)$, ta có:

$$P=3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{3}{2}(x+y)+\left(\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{8}{y}\right) \ge \frac{3}{2}.6+2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}}=19.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=6 \\ \frac{3x}{2}=\frac{6}{x} \\ \frac{y}{2}=\frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 19.

Câu 47.36: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2 \le 0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T=10M-m$.

A. $T=60$. **B.** $T=94$. **C.** $T=104$. **D.** $T=50$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2 \frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+5y^2)-\log_2(x^2+10xy+y^2)+\log_2 2+2(x^2+5y^2)-(x^2+10xy+y^2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+10y^2)+2(x^2+5y^2) \le \log_2(x^2+10xy+y^2)+(x^2+10xy+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+10y^2 \le x^2+10xy+y^2$$

$\Leftrightarrow x^2-10xy+9y^2\le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2-10\left(\frac{x}{y}\right)+9\le 0 \Leftrightarrow 1\le \frac{x}{y}\le 9$

$$P=\frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+9}{\frac{x}{y}+1}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, điều kiện : $1\le t\le 9$

$f(t)=\frac{t^2+t+9}{t+1}$; $f'(t)=\frac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=2 \end{array}\right.$

$f(1)=\frac{11}{2}$; $f(2)=5$; $f(9)=\frac{99}{10}$

Nên $M=\frac{99}{10}$, $m=5$. Vậy $T=10M-m=94$.

Câu 47.37: Vậy $A_{\min}=6$.Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+18}{x}$.

A. $P=9$.

B. $P=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

C. $P=1+9\sqrt{2}$.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta đặt $t=x^2-2y$, $t\in\mathbb{R}$.

Phương trình $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$ trở thành

$$4+9.3^t=\left(4+9^t\right).\frac{49}{7^t} \Leftrightarrow 4\left(7^t-49\right)+9^t\left[9.\left(\frac{7}{3}\right)^t-49\right]=0.$$

Nhận thấy $t=2$ là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☑ Xét $t>2$: $7^t>49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t>49$ nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.

☑ Xét $t<2$: $7^t<49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t<49$ nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $t = x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2-2}{2}$ thay vào $P = \dfrac{x+2y+18}{x} = \dfrac{x^2+x+16}{x}$

$= x + \dfrac{16}{x} + 1 \ge 2\sqrt{x.\dfrac{16}{x}} + 1 = 9$. Dấu bằng đạt được khi $x = \dfrac{16}{x} \Rightarrow x = 4$.

Câu 47.38: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có: $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \ge x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) \ge \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \ge y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln x + e^x} \ge \dfrac{y}{\ln y + e^y}$ (*) (vì $y = e^x + \ln x$ có

$y' = e^x + \dfrac{1}{x} > 0; \forall x > 1$ nên $y \ge y(1) = e > 0$)

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{t}{\ln t + e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t) = \dfrac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{\left(\ln t + e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t$ có $g'(t) = \left(\ln t + e^t - 1 - te^t\right)' = \dfrac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$

Nên $g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f'(t) < 0; \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x) \ge f(y) \Rightarrow y \ge x > 1$

Khi đó $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} \ge \dfrac{1}{2} + 2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x y.\dfrac{1}{\log_x y}} = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\dfrac{1}{2}\log_x y = \dfrac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$

Vậy: $P_{\min} = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47.39: Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ biết rằng $4^{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} = \log_2\left[14 - (y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x \ne 0$ và $-1 \le y \le \dfrac{13}{2}$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$.

Ta có $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\ge 4^{2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}-1}=4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\pm1$, .

Mặt khác $14-(y-2)\sqrt{y+1}=14+3\sqrt{y+1}-\left(\sqrt{y+1}\right)^3$.

Đặt $t=\sqrt{y+1}$ ta có $0\le t\le\frac{\sqrt{30}}{2}$. Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t+14$. Ta tìm GTLN – GTNN của hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]$ được $\min\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]}f(t)=f\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)=\frac{56-9\sqrt{30}}{4}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]}f(t)=f(1)=16$.

Suy ra $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le\log_2 16=4$, .

Từ và suy ra ta có $\begin{cases}x=\pm1\\t=\sqrt{y+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=0\end{cases}$. Thay vào $P=2$.

Câu 47.40: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x\le\frac{1}{2}$, $0\le y\le\frac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y)=2y+4x-1$. Xét biểu thức $P=16yx^2-2x(3y+2)-y+5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó giá trị của $T=(4m+M)$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\log(11-2x-y)=2y+4x-1\Leftrightarrow 2(2x+y)-\log(11-(2x+y))-1=0$

Đặt $t=2x+y$, $0<t<11$. Phương trình trở thành: $2t-\log(11-t)-1=0$. (1)

Xét hàm số $f(t)=2t-\log(11-t)-1$ trên khoảng $(0;11)$.

Có $y'=2+\frac{1}{11-t}>0$, $\forall t\in(0;11)$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến.

Dễ thấy (1) có nghiệm $t=1$. Do đó $t=1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Suy ra $2x=1-y$. Khi đó $P=16y\frac{(1-y)^2}{4}-(1-y)(3y+2)-y+5=4y^3-5y^2+2y+3$.

Xét hàm số $g(y)=4y^3-5y^2+2y+3$ trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, có

$g'(y)=12y^2-10y+2>0$, $\forall y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó, $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g\left(y\right)=g\left(0\right)=3$, $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g\left(y\right)=g\left(1\right)=4$.

Suy ra $m=3$, $m=4$.

Vậy $T=4.3+4=16$.