BAN TỔ CHỨC KÌ THI

# TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC

## 30 THÁNG 4, LẦN THỨ XIX – 2013

# TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

# LỜI NÓI ĐẦU

Mỗi năm, cứ vào dịp tháng 4 – tháng kỉ niệm miền Nam hoàn toàn giải phóng, đất nước thống nhất, các em học sinh giỏi lớp 10 và 11 của các trường THPT chuyên và không chuyên của các tỉnh miền Nam, miền Trung và Tây Nguyên lại nô nức tham dự kì thi OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4. Kì thi lần đầu được tổ chức vào năm học 1994 – 1995 theo sáng kiến của Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TP. Hồ Chí Minh. Từ đó đến nay, kì thi đã được tổ chức liên tục với quy mô ngày càng lớn, chất lượng ngày càng cao.

Tháng 4 năm 2013, kì thi OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4, LẦN THỨ XIX lại được tổ chức tại Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TP. Hồ Chí Minh. Kì thi năm nay có quy mô rất lớn gồm 3.756 thí sinh của 114 trường, thuộc 36 tỉnh thành tham gia tranh tài đủ 10 môn thi: Toán học, Vật lí, Hoá học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí, Tiếng Anh và Tiếng Pháp.

Sau khi thi, Ban tổ chức đã tập hợp, sắp xếp lại bộ đề chính thức và các đề thi đề nghị của các trường tham dự. Đây là một tư liệu có giá trị, rất cần thiết cho Quý thầy cô và các em học sinh tham khảo trong quá trình giảng dạy và học tập. Ban tổ chức đã phối hợp với Nhà sách Hồng Ân TP. Hồ Chí Minh và Nhà xuất bản Đại học Sư phạm xuất bản bộ sách: TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC 30/4, LẦN THỨ XIX – 2013. Bộ sách gồm 10 tập, mỗi tập là một môn thi. Trong mỗi tập sách gồm có hai phần chính: Phần I là đề thi chính thức và các đề thi đề nghị khối 10, 11; Phần II là đáp án đề thi chính thức và các đề thi đề nghị khối 10, 11. Trong mỗi phần đều có đáp án, thang điểm hoặc hướng dẫn trả lời chi tiết.

Chúng tôi xin trân trọng giới thiệu bộ sách: TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC 30/4, LẦN THỨ XIX – 2013 với Quý độc giả. Hi vọng rằng đây là những tập tư liệu có giá trị giúp cho Quý thầy cô và các em học sinh trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và trong việc tự học tập, tự rèn luyện.

Chúc Quý thầy cô và các em học sinh đạt nhiều thành công.

***Ban tổ chức***

# Phần I

# ĐỀ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIX – NĂM 2013

## A. LỚP 10

### ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**Câu 1.**

Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24$.

**Câu 2.**

Cho hình lục giác ABCDEF thỏa mãn các điều kiện sau:

Tam giác ABF vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành, BC = 19, AD = 2013 và DC + DE = $1994\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác ABCDEF.

**Câu 3.**

Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn: $2x(1-x) \geq y(y-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - y + 3xy$.

**Câu 4.**

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $p = x^2 + y^2$ là số nguyên tố và $x^3 + y^3 - 4$ chia hết cho p.

**Câu 5.**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 19 điểm có các tọa độ là những số nguyên, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm trong 19 điểm đã cho là 3 đỉnh của một tam giác có trọng tâm là điểm có tọa độ là số nguyên.

**Câu 6.**

Cho hàm số f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên) thỏa mãn các điều kiện sau:

$f(1) = 1$ ; $f(n+3) \leq f(n) + 3$ và $f(n+2012) \geq f(n) + 2012$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Tính f(2013).

### ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ CỦA CÁC TRƯỜNG TẠI TP. HỒ CHÍ MINH

## TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2+2} - y^3 + y = 0 & (1) \\ 2x + xy + 2 + (x+2)\sqrt{y^2+4x+4} = 0 & (2) \end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho hình lục giác ABCDEF thỏa mãn các điều kiện sau:

Tam giác ABF vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành, BC = 19, AD = 2013 và DC + DE = $1994\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác ABCDEF.

**Câu 3.**

Tìm hằng số thực k dương lớn nhất sao cho bất đẳng thức $|kxy + yz| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ đúng với mọi x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Câu 4.**

Tìm x; y; z; t nguyên thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$.

**Câu 5.**

Ta xếp 2013 số nguyên dương trên một đường tròn. Mỗi phép biến đổi ta cộng 1 vào số đứng kề nhau. Chứng minh rằng sau một số phép biến đổi ta thu được 2013 số bằng nhau. Nếu thay phép biến đổi bằng cách cộng 1 vào 30 số kề nhau thì kết quả trên còn đúng không?

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa các điều kiện $f(n + 1) > f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(f(f(n))) = n + 2013, \forall n \in \mathbb{N}^*$

# TRƯỜNG THPT MẠC ĐĨNH CHI – TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải phương trình: $2x + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 6} + 3 = 0$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC không có góc tù. Gọi I là trung điểm của đoạn BC và P, $P_1$, $P_2$ lần lượt là chu vi của các tam giác ABC, ABI, ACI. Chứng minh rằng $P^2 = P_1^2 + P_2^2$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại A.

**Câu 3.**

Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn: $\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1$ (1)

Chứng minh rằng: $abcd \geqslant 3$.

**Câu 4.**

Một nhóm gồm 7 em chơi bắn bi có tổng số bi bằng 100, ngoài ra tất cả 7 em đều có số bi khác nhau. Chứng minh rằng có 3 em trong số 7 em đó có tổng số bi ít nhất là 50 viên.

**Câu 5.**

Cho A ={1;2;3;4;5} và B là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lấy từ tập A. Chứng minh rằng trong tập B có ít nhất 7 phần tử khác nhau có cùng số dư khi chia cho 120.

**Câu 6.**

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $f(1)=2$;

ii) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$, $\forall x, y\in\mathbb{Q}$.

# TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho đường tròn cố định (O; R) và một điểm cố định A. I là một điểm di động trên (O; R). Gọi B và C là hai giao điểm của (O; R) và đường tròn tâm I bán kính IA. Chứng minh rằng BC tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**Câu 3.**

Cho a, b,c > 0 thỏa mãn a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\geqslant 3.$

**Câu 4:**

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^2+b}{b^2-a^3}$ và $\dfrac{b^2+a}{a^2-b^3}$ đều là các số nguyên.

**Câu 5:**

Cho tập $A=\{1;2;3;...;99;100\}$ được chia thành 7 tập hợp con. Chứng minh rằng ít nhất từ một trong các tập con ấy luôn tìm được 4 số a, b, c, d sao cho $a+b=c+d$ hoặc 3 số k, m, n sao cho $k+m=2n$.

**Câu 6:**

Trên tập số tự nhiên, cho hàm số f(x) thỏa mãn $\begin{cases} f(0)=f(1)=1 \\ f(x+1)=\dfrac{f^2(x)+1}{f(x-1)}, \forall x\geqslant 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng tập giá trị của hàm số chỉ chứa các phần tử là số nguyên tự nhiên.

# TRƯỜNG THPT TRẦN ĐẠI NGHĨA
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y \\ 2xy-3\left[\dfrac{x+y}{2}\right]=5 \end{cases}$

(Với [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{A-B}{2}+\cos^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{C-A}{2}\geqslant 24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

**Câu 3.**

Cho ba số không âm x, y, z thoả mãn: $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+12\geqslant 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

**Câu 4.**

Cho p là số nguyên tố khác 2 và a, b là hai số tự nhiên lẻ sao cho a + b chia hết cho p và a – b chia hết cho p – 1. Chứng minh rằng: $a^b + b^a$ chia hết cho 2p.

**Câu 5.**

Dùng 3 hình tròn đường kính 1cm có thể phủ kín hình vuông có cạnh bằng 1cm được không?

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa: $f\left(f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)\right)=2x \quad \forall x,y\in\mathbb{Q}$

# TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x\left(y^2+z^2\right)=13yz \\ 6y\left(z^2+x^2\right)=5zx \\ 6z\left(x^2+y^2\right)=5xy \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác ABC.

Chứng minh rằng $abc \geqslant 3\sqrt{3}IA.IB.IC$, với $a, b, c$ là độ dài các cạnh $BC, AC, AB$ của tam giác $ABC$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

**Câu 3.**

Cho các số thực dương $a, b, c$ thoả mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$.

**Câu 4.**

Cho p là số nguyên tố khác 2 và a, b là hai số tự nhiên lẻ sao cho a + b chia hết cho p và a – b chia hết cho p – 1. Chứng minh rằng: $a^b + b^a$ chia hết cho 2p.

**Câu 5.**

Cho tập hợp X gồm 10 số tự nhiên có hai chữ số. Chứng minh rằng tập hợp X có ít nhất hai tập hợp con không giao nhau, mà tổng những phần tử trong chúng bằng nhau.

**Câu 6.**

Cho $f$ là hàm số có giá trị nguyên, xác định trên tập hợp tất cả các số nguyên sao cho với mọi số nguyên $x$ ta có

$$f(x+3) \leqslant f(x) + 3 \text{ và } f(x+2012) \geqslant f(x) + 2012.$$

Hãy tính giá trị $f(2013)$ theo giá trị $f(1)$.

# TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG - TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{13}^4 = 1598, \text{ với } x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 2.**

Giải phương trình: $(x + 3)\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x - 24$.

**Câu 3.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 = 2(\sqrt{2x^3} + \sqrt{2x} - y) \\ y(y - x - 2) = 3 - 3x \end{cases}$

**Câu 4.**

Cho a, b, c > 0 và abc = 3.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{1}{a^3 + b^3 + 3} + \dfrac{1}{b^3 + c^3 + 3} + \dfrac{1}{a^3 + c^3 + 3}$

**Câu 5.**

Cho hình chữ nhật ABCD, AB = a, AD = b. Chọn M, N lần lượt trên đoạn BC và DN sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Đặt BM = x và DN = y, S là diện tích hình chữ nhật ABCD.

Chứng minh rằng: S = bx + ay + xy.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{2x+7y}=10 & (1) \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+y}}\right)=2 & (2) \end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC và các điểm D; E; F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại một điểm. Cho M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các FE; FD; DE. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi DM; EN; FP đồng quy.

**Câu 3.**

Cho các số thực dương $a,b,c$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 2.$$

**Câu 4.**

Với mỗi số nguyên $n\geqslant 2$; ta đặt: $A_n=2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$.

Chứng minh rằng: $A_n$ luôn là hợp số và có ít nhất n ước số nguyên tố phân biệt.

**Câu 5.**

Giả sử từ tập hợp $X=\{1;2;3;...;2013\}$ ta chọn ra $673$ số. Chứng minh rằng trong các số đã chọn có hai số a, b mà $671<|a-b|<1342$.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$ ta có:

i) $f(n+1)\geqslant f(n)$;

ii) $f(f(n))=n+2012$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH KONTUM

**Câu 1.**

Giải hệ sau: $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} & (1) \\ 8xy^3+2y^3+1\geqslant 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2} & (2) \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC nhọn (AB $\neq$ AC) có trực tâm H. Đường thẳng qua H và vuông góc với đường phân giác trong của góc BAC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại D và E. Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và ADE đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH.

**Câu 3.**

Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{5}$.

Chứng minh rằng: $\left|\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\right| \leqslant \sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Câu 4.**

Cho n là số nguyên dương lẻ và u là một ước nguyên dương lẻ của $3^n+1$.

Chứng minh u – 1 chia hết cho 3.

**Câu 5.**

Xét đa giác đều $A_1A_2\ldots A_8$ tâm O. Chúng ta tô màu các miền tam giác $OA_iA_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant 8, A_9 \equiv A_1)$ bằng 4 màu khác nhau sao cho hai miền tam giác kề nhau được tô bởi 2 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

**Câu 6.**

Xác định tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sao cho:

$$f(n+2012)+2013=f(n+f(m))-m;\forall n,m\in\mathbb{Z}.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}+x^2y=\sqrt{x}+\sqrt{3y}+y^2x & (1)\\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2y-1}=y^2-2x-1 & (2)\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng:

a) $IA^2=bc-4rR$.

b) $abc(a+b+c)\leqslant abc\left[(b+c)\sin\frac{A}{2}+(c+a)\sin\frac{B}{2}+(a+b)\sin\frac{C}{2}\right]+$

$$+4rR\left(a^2+b^2+c^2-2ab\sin\frac{C}{2}-2ca\sin\frac{B}{2}-2bc\sin\frac{C}{2}\right)$$

Trong đó các kí hiệu trên thường được sử dụng trong tam giác ABC.

**Câu 3.**

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+abc$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các số nguyên dương n có đúng 24 ước số nguyên dương $d_1, d_2, \ldots, d_{24}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_{23}<d_{24}=n;\ d_8=24 \text{ và } d_{10}-d_9=31.$$

**Câu 5.**

Cho tập X gồm 15 số nguyên dương phân biệt. Với mỗi tập con A của X, ta kí hiệu $|A|$ là số phần tử của A và $S_A$ là tổng các phần tử của A. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con A, B khác rỗng của X thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $|A|=|B|\leqslant 5$;

b) $A\cap B=\varnothing$;

c) $S_A-S_B$ chia hết cho 3000.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m+f(n))=f(m+n)+2n+2\ (1), \text{ với mọi số tự nhiên m, n.}$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN

**Câu 1.**

Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$ (*)

**Câu 2.**

Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') (với R > R') tiếp xúc trong với nhau. Từ ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn (O), vẽ ba tiếp tuyến đến đường tròn (O'). Chứng minh rằng độ dài tiếp tuyến lớn nhất bằng tổng độ dài hai tiếp tuyến còn lại.

**Câu 3.**

Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $0<a\leqslant b\leqslant c$.

Chứng minh rằng: với mọi số thực x,y,z ta có

$$(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\leqslant\frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x,y)$ sao cho $x^4+y^2$ chia hết cho $7^x-3^y$.

**Câu 5.**

Cho 1000 điểm $M_1, M_2, ..., M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính 1 bất kì. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn đó sao cho:

$$SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \geqslant 1000.$$

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn:

$$f(x) + f(y) + 2xy.f(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \quad (*)$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x = \left(2013 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^2$.

**Câu 2.**

Cho tam giác nhọn $ABC$ có $H$ là trực tâm và $M$ là trung điểm của $BC$. Đường thẳng qua $H$ và vuông góc $HM$ lần lượt lần lượt cắt $AB$, $AC$ tại $E$, $F$. Chứng minh tam giác $MEF$ cân.

**Câu 3.**

Cho $a,b,c \geqslant 0$ và $a + b + c = 2013$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (a + 2b + 3c)(3a + b + c).$$

**Câu 4.**

Cho các số $1,2,3,....,99,100$. Xếp tùy ý tất cả 100 số đó nối tiếp nhau thành dãy ta được số $P$. Chứng minh số $P$ không chia hết cho 2013.

**Câu 5.**

Cho sàn nhà kích thước $2013 \times 2013$. Hỏi sàn nhà này có lát được bằng các viên gạch có kích thước $4 \times 4$ và $5 \times 5$ không? (Các kích thước cùng đơn vị đo)

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho $f(1) = 2013$ và thỏa mãn:

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + 2013mn, \text{ với mọi } m,n \in \mathbb{N}^*.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3-(x+4)y^2+8y+x^2-4x=0 \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+\sqrt{x+2y+3}=4(x-1)^2+8y-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Các đường thẳng qua I vuông góc với AI, BI, CI cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P.

Chứng minh rằng M, N, P cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OI.

**Câu 3.**

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\dfrac{bc+a^2-b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$, trong đó a, b, c là ba số thực khác 0 và c > b.

**Câu 4.**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n$, $2^{n-1}+1$ không chia hết cho $n$.

**Câu 5.**

Có bao nhiêu tam thức bậc hai $f(x)=x^2-mx-n$ (với $x\in\mathbb{R}$, $m,n\in\mathbb{Z}^+$) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm âm và nghiệm còn lại thuộc khoảng $(0;2013)$?

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(m+f(n))=f(m)+n,\forall m,n\in\mathbb{N}.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG - CẦN THƠ

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 20.\dfrac{y}{x^2}+11y=2013 \ (1) \\ 20.\dfrac{z}{y^2}+11z=2013 \ (2) \\ 20.\dfrac{x}{z^2}+11x=2013 \ (3) \end{cases}$

**Câu 2.**

Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, lấy một điểm M khác A và B. Gọi P,Q,R,S lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng AD, AB, BC, CD.

a) Chứng minh $PQ$ vuông góc với $RS$.

b) Gọi I là giao điểm của $PQ$ và $RS$. Chứng minh I thuộc một đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$.

**Câu 3.**

Chứng minh: $1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+...+\sqrt[2013]{\frac{2013+1}{2013}}<2014.$

**Câu 4.**

Cho $x,y\in\mathbb{R}$, chứng minh rằng: $[3x]+[3y]\geqslant 2[x+y]+[x]+[y]$.

Từ đó hãy suy ra: $\frac{(3m)!(3n)!}{((m+n)!)^2 m!n!}$ là số nguyên với mọi m, n $\in\mathbb{N}^*$.

**Câu 5.**

Xét đa giác đều n đỉnh ($n\geqslant 8$). Biết rằng có 25 tứ giác có 4 cạnh là các đường chéo của đa giác. Hãy tìm n.

**Câu 6.**

Tồn tại hay không hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y))=f(x)-y,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}?$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU ĐỒNG THÁP

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3^{2+\sin\pi(x+y)}=9\\ x^2(2x^2+2y^2+1)+y^2(2y^2+x^2+1)=1\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp đường tròn $(C)$ vừa ngoại tiếp đường tròn $(C')$. Gọi $S$ và $p$ lần lượt là diện tích và nửa chu vi của tứ giác đó. Chứng minh $S\leqslant\frac{p^2}{4}$.

**Câu 3.**

Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{(3x+4y)(4x+3y)}+\frac{y^2}{(3y+4z)(4y+3z)}+\frac{z^2}{(3z+4x)(4z+3x)}$$

**Câu 4.**

Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $a,b$ sao cho $a < b$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2013}$?

**Câu 5.**

Có bao nhiêu số nguyên dương gồm 6 chữ số mà tích các chữ số này bằng 8000?

**Câu 6.**

Cho hàm số $f:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $f\big(f(m)+f(n)\big)=m+n \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}^+$.

Tìm $f(2013)$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN CÀ MAU

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3x^2y=\dfrac{8}{x} \\ y^3-1=\dfrac{6}{x} \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác đều ABC. Gọi I là điểm đối xứng với C qua AB, vẽ đường tròn tâm I đi qua A và B. M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (I) (M khác A và B). Chứng minh rằng MA, MB, MC là ba cạnh của một tam giác vuông.

**Câu 3.**

Cho ba số thực dương $a,b,c$ thỏa mãn $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=8$.

Chứng minh rằng: $abc+bc+ca+ab \leqslant 4$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các số nguyên $n>1$ sao cho bất kì ước nguyên tố nào của $n^6-1$ cũng là ước của $(n^3-1)(n^2-1)$.

**Câu 5.**

Trên mặt phẳng cho n đường thẳng. Biết rằng không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy.

Hãy tính số các miền được tạo thành và số các đa giác lồi trong miền này.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm f đơn ánh, xác định và lấy giá trị trên tập hợp các số nguyên dương và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n), \forall m,n \in \mathbb{N}^*$;

ii) $f(1)=2, f(2)=4$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO BÌNH THUẬN

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 16x^2 - 8\left(\sqrt{3}-1\right)x - 8\sqrt{3} = 0.$

**Câu 2.**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại n số nguyên dương liên tiếp sao cho bất kì số nào trong chúng cũng chia hết cho n số nguyên tố liên tiếp.

**Câu 3.**

Chỉ dùng thước thẳng và compa, hãy nêu cách dựng tam giác có độ dài các đường cao là 2, 3, 6.

**Câu 4.**

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1.$

**Câu 5.**

Lấy 13 điểm phân biệt bất kì trong tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

**Câu 6.**

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $2a+3b-6=0;\ 4c+6d-25=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2+b^2-6a-10b+34} + \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd} + \\ + \sqrt{c^2+d^2-8c-2d+17}.$$

# TRƯỜNG THPT HUỲNH THÚC KHÁNG QUẢNG NAM

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)\left(x+y+y^2\right) = x(y+1) \\ \sqrt{x^3+4x} = 1 + \frac{(y+2)^2}{3} \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$ $(n \geqslant 3)$. Lấy các điểm $B_1;B_2;...;B_{n-1};B_n$ lần lượt nằm trên các cạnh $A_1A_2;A_2B_3;...;A_{n-1}A_n;A_nA_1$ sao cho

$$A_1B_1 = A_2B_2 = ... = A_{n-1}B_{n-1} = A_nB_n.$$

Xác định vị trí của các điểm $B_1;B_2;...;B_{n-1};B_n$ để chu vi đa giác $B_1B_2...B_n$ là nhỏ nhất.

**Câu 3.**

Cho các số dương a;b;c;d thỏa mãn $abcd = 1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+1}+\frac{1}{b^4+c^4+d^4+1}+\frac{1}{c^4+d^4+a^4+1}+\frac{1}{d^4+a^4+b^4+1}\leqslant 1.$$

**Câu 4.**

Cho $x,y\in\mathbb{Z}, x\neq -1; y\neq -1$ sao cho $\frac{x^3+1}{y+1}+\frac{y^3+1}{x+1}\in\mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2016}-1}{y+1}\in\mathbb{Z}$.

**Câu 5.**

Trong mặt phẳng, cho 2013 điểm sao cho trong mỗi nhóm gồm 3 điểm bất kì trong 2013 điểm đó bao giờ cũng có thể chọn được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong 2013 điểm đó, có ít nhất 1007 điểm nằm trong một đường tròn có bán kính bằng 1.

**Câu 6.**

Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ (x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2), \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

# TRƯỜNG THPT PLEIKU - GIA LAI

**Câu 1.**

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm thuộc BC. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm P và Q tương ứng. Các đường thẳng qua P và Q song song với AD theo thứ tự cắt các cạnh BC tại N và M.

Chứng minh rằng $dt(MNPQ)\leqslant \max\{dt(ABD), dt(ACD)\}$. Đẳng thức xảy ra khi nào? Ở đó dt (MNPQ) là diện tích tứ giác MNPQ...

**Câu 2.**

Giả sử a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a^3(b+c)}+\frac{2}{b^3(c+a)}+\frac{2}{c^3(a+b)}\geqslant 3 \quad (*)$$

**Câu 3.**

Cho $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Với a, b, c, d là những hằng số.

Giả sử f(1) = 10, f(2) = 20, f(3) = 30. Hãy tính $\frac{f(12)+f(-8)}{10}+15$.

**Câu 4.**

Cho tứ giác lồi ABCD, trên các đoạn thẳng AB, BC,CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AQ = DP = CN = BM. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông thì ABCD là hình vuông.

**Câu 5.**

Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=a\ (x\geqslant 4) \qquad (1)$$

**Câu 6.**

Giải phương trình sau: $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$, với $0<a<1$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH – TRÀ VINH

**Câu 1.**

Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2-4x+2013}=x^4-4x^3+3x^2+2x-2013 \quad (1)$$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\widehat{C}=30^0$ nội tiếp trong đường tròn (O; R). Gọi AD, BE là các đường cao của tam giác ABC; M và N lần lượt là trung điểm BC, AC; K là điểm đối xứng của D qua M; F là điểm đối xứng của E qua N; I là giao điểm của OC và KF. Tính tỉ số diện tích hai tam giác OFK và CFK.

**Câu 3.**

Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn: $2x(1-x)\geq y(y-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-y+3xy$.

**Câu 4.**

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n^2+n+1$ phân tích được thành tích của 4 số nguyên tố.

**Câu 5.**

Trong mặt phẳng mỗi điểm được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm của nó được tô cùng màu.

**Câu 6.**

Hãy tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức:

$$xf(y)-yf(x)=f(\frac{y}{x}),\forall x\neq 0,\forall y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

# TRƯỜNG THPT KRÔNG NÔ - ĐẮK NÔNG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x+\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

**Câu 2.**

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có A(2; 2), B(–3; –7), C(4; –1) và đường thẳng $\Delta: x+2y+10=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường $\Delta$ sao cho:

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 3.**

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

**Câu 4.**

Cho tam giác ABC không cân có BC = a, CA = b, AB = c và thỏa: $a^3+b^3=3ab^2$. Đường phân giác trong của góc C cắt AB tại D sao cho CD + DA = a. Chứng minh: a > AI (với I là trung điểm của BC).

**Câu 5.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+1=2x+2y\\(2x-y)y=1+2y\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH - HẬU GIANG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 & (1)\\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} & (2)\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có $BC=a, AB=c, AC=b$; R, r lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leqslant 8R(R-2r)$.

**Câu 3.**

Cho các số thực dương $a,b,c$ thỏa mãn đẳng thức

$$3(ab+bc+ca)=4+3(a+b+c).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{2} + \dfrac{16}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+1\right)$.

**Câu 4.**

Cho hai số nguyên dương $a,b$ sao cho $(a,b)=1$. Gọi $p$ là một ước nguyên tố lẻ của $a^{2^k}+b^{2^k}$ (k là số nguyên dương). Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$

**Câu 5.**

Trong hình vuông cạnh 8 lấy 100 điểm bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 4 điểm nằm trong hình tròn có bán kính bằng 1.

**Câu 6.**

Cho $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $f(m^2+n^2)=f^2(n)$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}$;

ii) $f(1)>0$

Tính f(6).

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI SÓC TRĂNG

**Câu 1.**

Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$.

**Câu 2.**

Giả sử M là một điểm trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, H là điểm thuộc AB, trên đường thẳng MB lấy các điểm P, Q sao cho HM là phân giác trong của $\widehat{PHQ}$ và PM.QB = MQ PB. Đường tròn (O') đường kính MH cắt MA, MB và (O) lần lượt tại E, F và C (C ≠ M). Chứng minh AB, EF, CM đồng quy.

**Câu 3.**

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+4\sqrt{b})^2}+\frac{1}{(\sqrt{b}+4\sqrt{c})^2}+\frac{1}{(\sqrt{c}+4\sqrt{a})^2}$$

$$\geqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{a+3b+c}+\frac{1}{b+3c+a}+\frac{1}{c+3a+b}\right)$$

**Câu 4.**

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $p = x^2 + y^2$ là số nguyên tố và $x^3 + y^3 - 4$ chia hết cho p.

**Câu 5.**

Trong mặt phẳng cho 50 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu: tím, vàng, xanh. Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong 50 điểm trên được tô bởi một trong ba màu: đỏ, trắng, đen. Chứng minh rằng luôn có ba điểm trong 50 điểm trên được tô cùng màu và ba đoạn thẳng nối chúng được tô cùng màu.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả điều kiện:

$$f(1)+2.f(2)+...+n.f(n)=\frac{n(n+1)}{2}.f(n+1)-\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{3}n,\ \forall n\to\mathbb{N}^*$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG ĐÀ LẠT

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (C) có tâm O. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt cạnh BC của tam giác ABC tại L và cắt đường trung trực của cạnh BC tại Q. Chứng minh rằng: AI.LQ = I L.IQ.

**Câu 3.**

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S=\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$.

**Câu 4.**

Cho 2013 số nguyên $x_1; x_2; ...; x_{2013}$ sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_{2013} = 0$.

Chứng minh rằng $S = x_1^{37}+x_2^{37}+x_3^{37}+\ldots+x_{2013}^{37}$ chia hết cho 399.

**Câu 5.**

Chứng minh rằng trong 70 số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2,..., a_{70}$ thỏa mãn điều kiện $a_i \le 200$ với i = 1, 2, ..., 70, luôn có hai số mà hiệu của hai số đó bằng 4 hoặc 5 hoặc 9.

**Câu 6.**

Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM VĨNH LONG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $(x-1)^2\left(1+2x+3x^2+...+2013x^{2012}\right)=1$.

**Câu 2.**

Cho đường tròn tâm $O$, bán kính 1. Kẻ hai đường kính vuông góc $AB$ và $CD$. Một điểm $M$ trên cung nhỏ $BD$, không trùng với $B$ hoặc $D$; $MA$ cắt $CD$ ở $E$, $MC$ cắt $AB$ ở $F$. Chứng minh rằng $OM$ đi qua trung điểm của $EF$ khi và chỉ khi đoạn $EF$ có độ dài ngắn nhất.

**Câu 3.**

Giải hệ phương trình nghiệm nguyên: $\begin{cases} 2x^3-7x^2+8x-2=y \\ 2y^3-7y^2+8y-2=z \\ 2z^3-7z^2+8z-2=x. \end{cases}$

**Câu 4.**

Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x(y+z)}{4-9yz}+\frac{y(z+x)}{4-9zx}+\frac{z(x+y)}{4-9xy}\geqslant 6xyz.$$

**Câu 5.**

Kí hiệu $\mathbb{Q}^+$ là tập hợp tất cả các số hữu tỉ dương. Hãy tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $f(x+1)=f(x)+1$, với mọi $x\in\mathbb{Q}^+$;

b) $f(x^2)=f(x)^2$, với mọi $x\in\mathbb{Q}^+$.

**Câu 6.**

Một bàn cờ $8\times 8$ được tô bởi k màu sao cho nếu mỗi ô vuông được tô bởi một màu nào đó thì trong các ô kề với nó (chung cạnh) có ít nhất hai ô nữa cùng màu với nó. Tìm giá trị lớn nhất của k.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC – LÂM ĐỒNG

**Câu 1.**

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+x^2-x-3=\sqrt{5x+7}$

b) $x=\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{3-x}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh huyền BC. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC bằng IB.IC.

**Câu 3.**

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b+bc^2-1}{ac(a+c)}+\frac{ab^2+ac^2-1}{bc(b+c)}+\frac{a^2c+b^2c-1}{ab(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} p+7=2x^2 & (1) \\ p^2+7=2y^2 & (2) \end{cases}$$ có nghiệm x, y nguyên dương.

**Câu 5.**

Cho một hình vuông và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là 2 : 3. Chứng minh rằng trong số 13 đường thẳng đó, có ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ biết rằng tồn tại $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(n_0)=1$ và

$$f(n+f(n))=f(n),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\ (1)$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU - ĐẮK LẮK

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xy+3x+2y+6+2(x+2)\sqrt{y+2}}-\sqrt[3]{xy+2x+y+2}=1 \\ \sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{y-3x+2}+2x^2y-7x^3+7x^2-6x=0 \end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn thỏa mãn hệ thức:

$$(\tan A-1)(\tan B-1)(\tan C-1)=6\sqrt{3}-10.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

**Câu 3.**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=16x^5-20x^3+5x$ trên đoạn [–2; 2].

**Câu 4.**

Xác định tất cả bộ ba số nguyên dương (a, b, c ) sao cho $a^2+1, b^2+1$ là các số nguyên tố và $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$.

**Câu 5.**

Cho n là số nguyên dương tùy ý. Ta tô màu tất cả các điểm (x; y) trong hệ tọa độ Oxy bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, trong đó x, y là các số tự nhiên thỏa mãn x + y < n. Biết rằng nếu điểm (x; y) tô màu đỏ thì các điểm (x', y') cũng được tô màu đỏ, với $x' \leqslant x$ và $y' \leqslant y$. Gọi A là số cách chọn n điểm màu xanh có hoành độ khác nhau và B là số cách chọn n điểm màu xanh có tung độ khác nhau. Chứng minh rằng A = B.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(m+n)+f(mn-1)=f(m).f(n)+2 \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z}.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG
# TIỀN GIANG

**Câu 1.**

Giải phương trình $8x^3+10x-17=8\sqrt[3]{30x-24x^2-7}$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Gọi $R_1$, $R_2$ lần lượt là bán kính đường tròn $(T_1)$, $(T_2)$ qua C và lần lượt tiếp xúc với đường thẳng AB tại A, B.

a) Chứng minh rằng các số $R_1$, R, $R_2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

b) Tính các góc của tam giác ABC nếu bán kính của đường tròn tiếp xúc với các đường tròn $(T_1)$, $(T_2)$ và đường thẳng AB bằng $\frac{R}{4}$.

**Câu 3.**

Cho x, y, z > 0 thỏa xy + yz + zx = 1.

Chứng minh $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leqslant 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

**Câu 4.**

Tính tổng tất cả các số có dạng $\frac{a}{b}$, trong đó $a$ và $b$ là các ước nguyên dương của 21168.

**Câu 5.**

Có 2013 chiếc tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách đều được đặt ngửa. Mỗi bước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong số chúng lật ngược lại. Sau một số bước đi, có thể làm tất cả chúng đều úp xuống được không? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 2012 tách.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(m+f(n))=n+f(m+2013),\forall m,n\in\mathbb{N}^*.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{y+2x}=1\\ \dfrac{4}{\sqrt{y}}-\dfrac{4}{y+2x}=1\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho hình chữ nhật ABCD có $BC=1$ và $AB=3$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $0,2<AN<1$. Đường trung trực của DN lần lượt cắt AD tại E và cắt DC tại F. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác EFD.

**Câu 3.**

Với m, n là các số nguyên dương sao cho tổng của m số dương chẵn khác nhau và n số dương lẻ khác nhau bằng 2369. Tìm giá trị lớn nhất của $P=3m+2n$.

**Câu 4.**

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên trong khoảng $(0;2011!)$ thỏa điều kiện $n^{2011}+1$ chia hết cho $2011!$ thì $n=2011!-1$..

**Câu 5.**

Cho $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Một tập $X\subset A$ được gọi là tập đẹp nếu với mọi $x,y\in X$ ta đều có $x+y\neq 1$.

a) Một tập đẹp có nhiều nhất là bao nhiêu phần tử?

b) Tính số lượng tập đẹp.

**Câu 6.**

Giả sử hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(mf(n))=n^2.f(m),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p$ thì $f(p)$ là một số nguyên tố hoặc là bình phương của một số nguyên tố.

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BẠC LIÊU

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x^3+5x^2+6x=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có $AB=c$; $BC=a$; $CA=b$ và G là trọng tâm.

Biết góc $\widehat{BGC}=120^0$. Chứng minh rằng $\dfrac{b^2+c^2}{a^2}\geqslant 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**Câu 3.**

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+2y^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2-xy}{x^2+1}$.

**Câu 4.**

Đặt $A_n=2012^n+1$ với $n\in\mathbb{Z}^+$

a) Chứng minh rằng có vô số các số nguyên dương k thỏa mãn $A_k \vdots k$.

b) Tìm tất cả số nguyên tố p thỏa mãn $A_p \vdots p$.

**Câu 5.**

Cho tập hợp A chứa 1008 số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng trong tập A tồn tại hai phần tử mà có tổng hoặc hiệu chia hết cho 2013.

**Câu 6.**

Cho hàm số $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $(m^2+n)^2 \vdots (f(m)^2+f(n))$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$

Tính $f(4)$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3-y^2+\sqrt[3]{2x^3-3y+1}-\sqrt[3]{y^2+1}=3y & (1)\\ x^5+x^3y^2+xy^4-yx^4-x^2y^3-y^5+2013(x-y)=0 & (2)\end{cases}$$

**Câu 2.**

Trong mặt phẳng, cho ba đường tròn $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi $P_1$ là tiếp điểm của $(C_1)$, $(C_3)$ và $P_2$ là tiếp điểm của $(C_2)$, $(C_3)$. Gọi A, B là hai điểm trên $(C_3)$ (A, B khác $P_1$, $P_2$) sao cho AB là đường kính của đường tròn $(C_3)$. Biết rằng $AP_1\cap(C_1)=X$, $BP_2\cap(C_2)=Y$, $AP_2\cap BP_1=Z$.

Chứng minh rằng ba điểm X, Y, Z thẳng hàng.

**Câu 3.**

Tìm giá trị nhỏ nhất của hằng số k sao cho bất đẳng thức sau đây đúng với mọi số thực a, b, c không âm:

$$k(a+b+c)^4 \geqslant (a^3b+b^3c+c^3a)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c).$$

**Câu 4.**

Cho $(u_n),(v_n)$ là hai dãy số xác định như sau: $u_1=1; v_1=2$ và

$$\begin{cases} u_{n+1}=22v_n-15u_n \\ v_{n+1}=17v_n-12u_n \end{cases} \text{ với mọi } n \geqslant 1$$

a) Chứng minh $u_n, v_n$ khác không với mọi $n \geqslant 1$.

b) Khi $n=1999^{1945}$, xét xem $u_n, v_n$ có chia hết cho 7 hay không?

**Câu 5.**

Có n $(n>1)$ thí sinh ngồi xung quanh bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau luôn có đề khác nhau, biết rằng trong ngân hàng đề có đúng m $(m>1)$ đề và mỗi đề có nhiều bản?

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $f(f(n))=n+4, \forall n\in\mathbb{N}$;

b) $f(2013)=2016$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG BÌNH DƯƠNG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $8x^2-13x+7=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2-2}$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Đường thẳng đi qua O song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại $C_2, B_1$. Đường thẳng đi qua O song song với CA cắt BC, BA lần lượt tại $A_2, C_1$. Đường thẳng đi qua O song song với AB cắt CA, CB lần lượt tại $B_2, A_1$. Vẽ các hình bình hành $OA_1A_3A_2$, $OB_1B_3B_2$, $OC_1C_3C_2$. Chứng minh ba đường thẳng $AA_3$, $BB_3$, $CC_3$ đồng quy.

**Câu 3.**

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+ab \geqslant c^2+2c$.

Chứng minh rằng: $a^3+b^3 \geqslant 2c^3$.

**Câu 4.**

Cho n là số nguyên dương và ký hiệu $U(n)=\{d_1,d_2,...,d_m\}$ là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của n. Chứng minh rằng $d_1^2+d_2^2+...+d_m^2 \leqslant n^2\sqrt{n}$.

**Câu 5.**

Trong đường tròn (C) tâm O, bán kính R = 2,5 cho 10 điểm bất kì. Chứng minh rằng có 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.

**Câu 6.**

Tìm tất cả $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} g(x+y)=g(x)+g(y)+4026xy, \ \forall x,y\in\mathbb{Q} \\ g(1)=2014 \end{cases}$$

## TRƯỜNG THPT KON TUM - KON TUM

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{xy+x+2}+\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x}=0 \\ xy+x^2+2=x\left(\sqrt{xy+2}+3\right) \end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho tam giác nhọn $ABC$ với $Q$ là tâm đường tròn Euler của nó. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ với bán kính $R$ cắt $AQ, BQ, CQ$ lần lượt tại $M, N, P$. Chứng minh rằng $\frac{1}{QM}+\frac{1}{QN}+\frac{1}{QP}\geqslant\frac{3}{R}$.

**Câu 3.**

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2013.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$.

**Câu 4.**

Cho $m$ và $a$ là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương x, y sao cho $x,y\leqslant\sqrt{m}$ và $a^2x^2-y^2$ chia hết cho $m$.

**Câu 5.**

Các bức tường của một phòng triển lãm chắn trên nền nhà thành một đa giác phẳng n cạnh. Hãy chứng minh rằng để chiếu sáng toàn bộ các gian của phòng triển lãm người ta chỉ cần $\left[\frac{n}{3}\right]$ ngọn đèn (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số $x$).

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x) = 2013 \text{ với mọi x, y, z dương.}$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC QUẢNG NAM QUẢNG NAM

**Câu 1.**

Giải phương trình: $(2\sqrt{2x-1}-4)x^2 + (7-4\sqrt{2x-1})x + \sqrt{2x-1} - 3 = 0$.

**Câu 2.**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. M là trung điểm của đường chéo AC. Chứng minh rằng: AB.CD = AD.BC là điều kiện cần và đủ để AC là đường phân giác của góc $\widehat{BMD}$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và độ dài các đường phân giác trong tương ứng là $l_a$, $l_b$, $l_c$. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

Chứng minh: $a(l_b + l_c - l_a) + b(l_c + l_a - l_b) + c(l_a + l_b - l_c) \geqslant 6S$.

**Câu 4.**

Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\sqrt{x + 10\sqrt{11}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

**Câu 5.**

Trong mặt phẳng Oxy cho 19 điểm có các tọa độ là các số nguyên, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm trong 19 điểm trên là 3 đỉnh của một tam giác có trọng tâm có các tọa độ là các số nguyên.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sao cho với $\forall$ x,y $\in \mathbb{Q}$ ta có:

$$f[f(x) + y] = x + f(y) \quad (*)$$

($\mathbb{Q}$: kí hiệu tập hợp các số hữu tỉ)

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE – BẾN TRE

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} = (20-3y)\sqrt{6-y} \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} = -3x^2 + 14x + 8 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho tam giác $ABC$ và $P$ là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi $A', B', C'$ lần lượt là hình chiếu của $P$ xuống các cạnh BC, CA, AB. Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $PA' + PB' + PC' + \dfrac{PI^2}{2r}$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của: $T = \cos\dfrac{A}{2}\sqrt{\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}}$.

**Câu 4.**

Cho p là số nguyên tố $p \geqslant 7$. Chứng minh rằng trong dãy các số 1, 11, 111, 1111, ... có vô số số hạng chia hết cho p.

**Câu 5.**

Cho 183 tập hợp hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_{183}$ có các tính chất:

a) $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{183}| = 2013$;

b) $|A_i| = |A_j|$ $|A_i \cap A_j|$ với $i, j = 1, 2, 3, \ldots, 183$ và $i \neq j$.

Tính $\left|\bigcup_{i=1}^{183} A_i\right|$, trong đó $|X|$: số phần tử của tập hữu hạn X.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) $f(x+1) = f(x) + 1; \forall x \in \mathbb{Q}^+$

2) $f(x^3) = f^3(x), x \in \mathbb{Q}^+$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT KIÊN GIANG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2 + \dfrac{4xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x+y} + 4x = (3x+y-6)^2 + 4\sqrt{x+y} \end{cases}$

**Câu 2.**

Tam giác ABC có điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, $BC = a$, $AB = AC = b$. Một đường thẳng đi qua I cắt cạnh AB tại E, cắt cạnh AC tại F.

Đường thẳng CE và BF cắt nhau tại M. Chứng minh $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} \geqslant 1 + \dfrac{4b}{a}$.

**Câu 3.**

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3abc$.

Chứng minh: $\dfrac{bc}{a^3(c+2b)} + \dfrac{ca}{b^3(a+2c)} + \dfrac{ab}{c^3(b+2a)} \geqslant 1$.

**Câu 4.**

Cho p là số nguyên tố.

Chứng minh rằng: $\underbrace{22...2}_{p\,số}\underbrace{00...0}_{p\,số}\underbrace{11...1}_{p\,số}\underbrace{33...3}_{p\,số} \equiv 2013 \pmod{p}$.

**Câu 5.**

Cho $S = \{1;2;...;2013\}$. Gọi A là một tập con của S sao cho A không chứa 2 phần tử nào là ước của nhau. Tìm giá trị lớn nhất của $|A|$.

**Câu 6.**

Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau.

- $f(ab) = f(a).f(b);\ a,b \in \mathbb{N}^*, (a,b) = 1$
- $f(a+b) = f(a) + f(b)$, với mọi số nguyên tố a, b.

Hãy tính $f(2013)$.

# ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIX – NĂM 2013

## A. LỚP 10

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Câu 1.**

Đặt $u = \sqrt{-x^2 - 8x + 48}$ và $v = x + 3$ $(u \geq 0) \Rightarrow u^2 + v^2 = -2x + 57$

Phương trình trở thành

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = -2x + 57 \\ 2uv = 2x - 48 \end{cases} \Rightarrow (u+v)^2 = 9 \Leftrightarrow u + v = \pm 3.$$

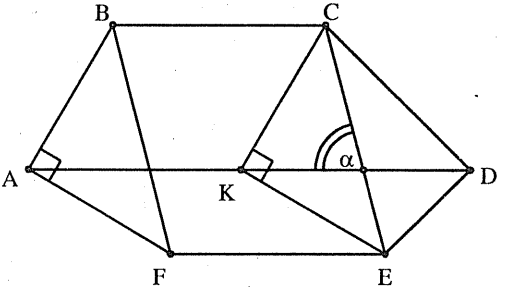
▸ $u + v = 3 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 2x^2 + 8x - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{7}.$$

▸ $u + v = -3 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -x - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -6 \\ x^2 + 10x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5 - \sqrt{31}.$$

**Câu 2.**




Xét phép tịnh tiến

$T_{\overrightarrow{BC}}: A \to K;\ B \to C$ và $F \to E$.

Ta có tam giác CKE vuông cân tại K nên:

$$KC = KE = \frac{CE}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{CE}{KE} = \sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Ptoleme cho tứ giác CKED ta có:

$KC.DE + CD.KE \geq CE.KD$ (*)

$$\Rightarrow (DE + CD).KE \geq CE.KD \Rightarrow DE + DC \geq KD.\frac{CE}{KE}$$

$\Rightarrow 1994\sqrt{2} \geqslant KD.\sqrt{2} \Rightarrow KD \leq 1994.$

Mặt khác $AK = BC = 19$ nên:

$AD \leq AK + KD \leq 19 + 1994 = 2013 = AD \Rightarrow KD = 1994 \Rightarrow$ K thuộc đoạn AD.

Do $KD = 1994$ nên bất đẳng thức Ptoleme (*) xảy ra đẳng thức

$\Rightarrow$ C, K, E, D cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CKE} = 90^0$ và $DE + DC = 1994\sqrt{2}$.

Đặt $\alpha = \left(\widehat{KD,CE}\right)$, ta có:

$S_{ABCDEF} = S_{ABF} + S_{BCEF} + S_{CDE} = S_{BCEF} + S_{CKE} + S_{CDE} = S_{BCEF} + S_{CKED}$

$$= BC.CE.\sin\alpha + \frac{1}{2}.CE.KD.\sin\alpha$$

$$= 19.CE\sin\alpha + \frac{1}{2}.1994.CE\sin\alpha = 1016.CE.\sin\alpha.$$

Mặt khác: $DC = EC\sin\widehat{CED}$ và $DE = EC\sin\widehat{DCE}$ và $\widehat{KDC} = \widehat{KDE} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{DCE} = \alpha - \widehat{CDK} = \alpha - 45^0$ và $\widehat{CED} = 180^0 - (\alpha + 45^0)$. Do đó:

$$1994\sqrt{2} = DE + DC = EC\left[\sin\widehat{DCE} + \sin\widehat{DEC}\right]$$

$$= EC\left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2EC.\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{4} = EC.\sin\alpha.\sqrt{2}.$$

Suy ra $EC.\sin\alpha = 1994$. Do đó $S_{ABCDEF} = 2025904$.

**Câu 3.**

**Cách 1**

Ta có: $2x(1-x) \geq y(y-1) \Rightarrow 2x - 2x^2 \geq y^2 - y$

$\Rightarrow 2x - x^2 \geq x^2 + y^2 - y \geq 2xy - y$

$\Rightarrow 2xy - y - 1 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 2xy \leq 1 + y.$

Do đó: $P \leq x - y + \frac{3}{2}(1+y) = \frac{2x+y+3}{2}$.

Lại có: $2x(1-x) \geq y(y-1) \Rightarrow 2x - 2x^2 \geq y^2 - y$

$\Rightarrow 2x + y \geq \frac{1}{3}(2+1)(2x^2 + y^2) \geq \frac{(2x+y)^2}{3}$

$\Rightarrow (2x+y)^2 - 3(2x+y) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 2x + y \leq 3.$

Suy ra $P \leq \frac{3+3}{2} = 3$. Khi $x = y = 1$ thì $P = 3$. Vậy max $P = 3$.

**Cách 2**

Ta có: $2x(1-x) \geq y(y-1) \Rightarrow 2x - 2x^2 \geq y^2 - y$

$\Rightarrow 2x + y = \frac{1}{3}(2+1)(2x^2 + y^2) \geq \frac{(2x+y)^2}{3}$

Đặt $t = 2x + y$, ta được $t^2 - 3t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3$.

$3P = 3x - 3y + 9xy = 3x - 3y + 9xy - 1 + 1 = (3x-1)(3y+1) + 1$

$$= \frac{1}{2}(6x-2)(3y+1) + 1 \leq \frac{(6x+3y-1)^2}{8} + 1 = \frac{1}{8}(3t-1)^2 + 1$$

Ta có $t \in [0; 3] \Leftrightarrow -1 \le 3t - 1 \le 8$

$\Rightarrow (3t-1)^2 \le 64 \Rightarrow 3P \le \frac{1}{8}.64 + 1 = 9 \Rightarrow P \le 3.$

Khi $t = 3$ và $6x - 2 = 3y + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ thì $P = 3$.

Vậy max $P = 3$.

**Câu 4.**

Ta có: $x^3 + y^3 - 4 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy) - 4 \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow -xy(x+y) - 4 \equiv 0 \pmod p$ (vì $x^2 + y^2 = p$)

$\Rightarrow 3xy(x+y) + 12 \equiv 0 \pmod p$ (1)

Mặt khác: $x^3 + y^3 - 4 \equiv 0 \pmod p$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được: $(x+y)^3 + 8 \equiv 0 \pmod p$

$\Leftrightarrow (x+y+2)(x^2 + y^2 + 2xy - 2(x+y) + 4) \equiv 0 \pmod p$

Vì p là số nguyên tố, ta có các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** $x + y + 2$ chia hết cho p

Khi đó: $x^2 + y^2 \leqslant x + y + 2 \Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) \leqslant 2$.

Vì x, y là số nguyên dương nên ta có các trường hợp:

$x = y = 1$; $x = 2, y = 1$; $x = 1, y = 2$.

Thử lại, ta có các cặp số (x, y) thoả mãn là: (1; 1), (2; 1), (1; 2).

**Trường hợp 2:** Nếu $x^2 + y^2 + 2xy - 2(x+y) + 4$ chia hết cho p

Khi đó: $x^2 + y^2 + 2xy - 2(x+y) + 4 \vdots (x^2 + y^2)$

$\Rightarrow 2xy - 2(x+y) + 4 \vdots (x^2 + y^2)$

Do $2xy - 2(x+y) + 4 = 2[(x-1)(y-1) + 1] > 0$

$\Rightarrow 2xy - 2(x+y) + 4 \geqslant x^2 + y^2 \Rightarrow 4 \ge (x-y)^2 + 2(x+y) \ge 4$

$\Rightarrow x = y = 1$. Thử lại ta có cặp số (1; 1) thỏa mãn.

Vậy các số nguyên dương x, y cần tìm là: (1; 1), (2; 1), (1; 2).

**Câu 5.**

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ là 19 điểm đã cho trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và $A_i(x_i ; y_i)$ với $x_i ; y_i \in Z$ $(i \in \{1; 2; \ldots; 19\})$.

Một số khi chia cho 3 thì dư 0; 1 hoặc 2.

Vì 19 > 3.6 nên theo nguyên lí Dirichlet: có ít nhất 7 trong 19 số $x_i$ có cùng số dư khi chia cho 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử các số đó là $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

Xét bảy điểm $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

Vì $7 > 3.2$ nên theo nguyên lí Dirichlet: có ít nhất 3 trong 7 số $y_i$ ( $i \in \{1; 2; \ldots; 7\}$ ) có cùng số dư khi chia cho 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử các số đó là $y_1, y_2, y_3$.

Xét ba điểm $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ và $A_3(x_3; y_3)$.

Vì $x_1, x_2, x_3$ có cùng số dư khi chia cho 3 và $y_1, y_2, y_3$ cũng là ba số có cùng số dư khi chia cho 3 nên $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \in Z$; $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \in \mathbb{Z}$.

Vậy trọng tâm của tam giác $A_1, A_2, A_3$ có các tọa độ đều là các số nguyên.

Bài toán được chứng minh.

**Câu 6.**

Theo tính chất $f(n+3) \leqslant f(n) + 3$, với mọi số nguyên $n$ ta có

$$f(n+2013) = f\left[(n+670.3)+3\right] \leqslant f(n+670.3)+3 \leqslant \ldots \leqslant f(n)+2013 \quad (1)$$

Mặt khác theo tính chất $f(n+2012) \geqslant f(n)+2012$ ta cũng có

$$f(n+2013) = f\left[(n+1)+2012\right] \geqslant f(n+1)+2012,$$

với mọi số nguyên n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(n+1)+2012 \leqslant f(n)+2013$

hay $f(n+1) \leqslant f(n)+1$, với mọi số nguyên n. (3)

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức (3) ta được $f(n+2012) \leqslant f(n)+2012$ (4)

Theo giả thiết ta có $f(n+2012) \geqslant f(n)+2012$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $f(n+2012) = f(n)+2012$, với mọi số nguyên n.

Thay $n$ bằng 1 ta được $f(2013) = f(1)+2012 = 2013$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

(1) $\Leftrightarrow x^2+2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y=0$

$\Leftrightarrow x^2+2-y\sqrt{x^2+2}+(y^2-1)\sqrt{x^2+2}-y(y^2-1)=0.$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2}-y\right)\left(\sqrt{x^2+2}+y^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}$ (vì $\sqrt{x^2+2}+y^2-1>0$)

Thay vào (2) ta được:

$2x+x\sqrt{x^2+2}+2+(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}=0$

$\Leftrightarrow x+x\sqrt{x^2+2}+x+2+(x+2)\sqrt{(x+2)^2+2}=0$

$\Leftrightarrow (x+2)+(x+2)\sqrt{(x+2)^2+2}=(-x)+(-x)\sqrt{(-x)^2+2}$ (3)

Đặt $u=x+2$ và $v=-x$. Ta có $u+v=2$ và

(3) $\Leftrightarrow u+u\sqrt{u^2+2}=v+v\sqrt{v^2+2}$

$\Leftrightarrow u-v+u\sqrt{u^2+2}-v\sqrt{v^2+2}=0$ (4)

Ta có: $u\sqrt{u^2+2}=-v\sqrt{v^2+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} uv\leqslant 0 \\ u^4-v^4+2(u^2-v^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv\leqslant 0 \\ (u^2-v^2)(u^2+v^2+2)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(u-v)=0 \Rightarrow u=v \Rightarrow u^2\leq 0 \Rightarrow u=v=0 \Rightarrow x+2=-x=0$ (vô lí).

Do đó:

(4) $\Leftrightarrow u-v+\dfrac{u^4-v^4+2(u^2-v^2)}{u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}}=0$

$\Leftrightarrow (u-v)\left[1+\dfrac{(u+v)(u^2+v^2+2)}{u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}}\right]=0$

$\Leftrightarrow u=v$ hay $1+\dfrac{2u^2+2v^2+4}{u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}}=0$ (5)

Ta có:

$$0<\left|u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}\right|\leq\sqrt{u^2+v^2}.\sqrt{u^2+v^2+4}\leq\frac{2u^2+2v^2+4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2u^2+2v^2+4}{\left|u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}\right|}\geqslant 2 \Rightarrow 1+\frac{2u^2+2v^2+4}{u\sqrt{u^2+2}+v\sqrt{v^2+2}}\neq 0.$$

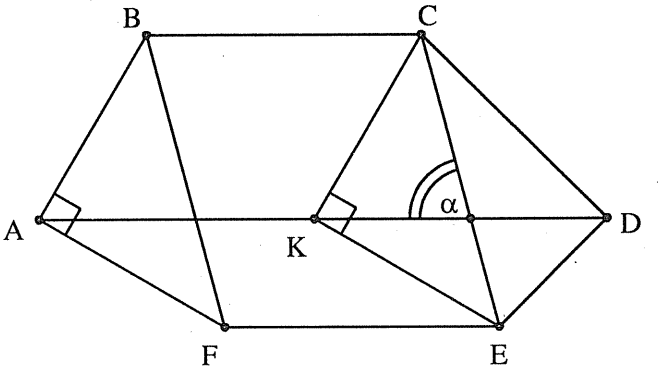
Suy ra (5) vô nghiệm. Vậy ta được $u = v \Rightarrow x + 2 = -x \Rightarrow x = -1$.

Khi đó $y = \sqrt{3}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -1$ và $y = \sqrt{3}$.

**Câu 2.**

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$:

$A \to K$; $B \to C$ và $F \to E$.




Ta có tam giác CKE vuông cân tại K nên: $KC = KE = \dfrac{CE}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{CE}{KE} = \sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Ptoleme cho tứ giác CKED ta có:

$KC.DE + CD.KE \geq CE.KD$ (*)

$\Rightarrow (DE + CD).KE \geq CE.KD$

$\Rightarrow DE + DC \geq KD.\dfrac{CE}{KE} \Rightarrow 1994\sqrt{2} \geqslant KD.\sqrt{2} \Rightarrow KD \leq 1994$.

Mặt khác $AK = BC = 19$ nên:

$AD \leq AK + KD \leq 19 + 1994 = 2013 = AD \Rightarrow KD = 1994 \Rightarrow$ K thuộc đoạn AD.

Do $KD = 1994$ nên bất đẳng thức Ptoleme (*) xảy ra đẳng thức

$\Rightarrow$ C, K, E, D cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CKE} = 90^0$ và $DE + DC = 1994\sqrt{2}$.

Đặt $\alpha = \left(\widehat{KD,CE}\right)$, ta có:

$S_{ABCDEF} = S_{ABF} + S_{BCEF} + S_{CDE} = S_{BCEF} + S_{CKE} + S_{CDE} = S_{BCEF} + S_{CKED}$

$= BC.CE.\sin\alpha + \dfrac{1}{2}.CE.KD.\sin\alpha$

$= 19.CE\sin\alpha + \dfrac{1}{2}.1994CE\sin\alpha = 1016.CE\sin\alpha$.

Mặt khác: $DC = EC\sin\widehat{CED}$ và $DE = EC\sin\widehat{DCE}$ và $\widehat{KDC} = \widehat{KDE} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{CEK} - \widehat{CDK} = \alpha - 45^0$ và $\widehat{CED} = 180^0 - (\alpha + 45^0)$. Do đó:

$$1994\sqrt{2} = DE + DC = EC\left[\sin\widehat{DCE} + \sin\widehat{DEC}\right]$$
$$= EC\left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 2EC.\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{4} = EC.\sin\alpha.\sqrt{2}\ .$$

Suy ra EC.sin α = 1904. Do đó $S_{ABCDEF} = 2025904$.

**Câu 3.**

Ta có: $P = |kxy + yz| = |y||kx + z| \le |y|\sqrt{(k^2+1)(x^2+z^2)}$

$$= \sqrt{k^2+1}\sqrt{(x^2+z^2)y^2} \leqslant \sqrt{k^2+1}\frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{k} = \dfrac{z}{1} \\ y^2 = x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ (*).

Chọn $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{k}{\sqrt{2(k^2+1)}}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{2(k^2+1)}}$

thì (x; y; z) thỏa mãn (*) và $P = \dfrac{\sqrt{k^2+1}}{2}$.

Vậy max $P = \max|kxy + yz| = \dfrac{\sqrt{k^2+1}}{2}$.

Do đó: yêu cầu bài toán tương đương với $\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{2} \leqslant \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |k| \leqslant 2 \Leftrightarrow k \leqslant 2$.

Vì k lớn nhất nên k = 2.

Vậy giá trị k cần tìm là $k = 2$.

**Câu 4.**

Từ (I) $\Rightarrow 7x^2 + 7y^2 = z^2 + t^2$ (1)

- Ta thấy (0; 0; 0; 0) là một nghiệm của (I).
- Giả sử (I) có nghiệm khác (0; 0; 0; 0).

Gọi $(x_0; y_0; z_0; t_0)$ là nghiệm khác (0; 0; 0; 0) của (I) sao cho

$|x_0| + |y_0| + |z_0| + |t_0|$ bé nhất trong các nghiệm khác (0; 0; 0; 0) của (I).

(1) $\Rightarrow 7(x_0^2 + y_0^2) = z_0^2 + t_0^2 \Rightarrow z_0^2 + t_0^2 \vdots 7$

$\Rightarrow z_0^2 \equiv -t_0^2[7]$ (2), ở đó [7] là kí hiệu khác của mod 7.

* Nếu $z_0 \not\vdots 7$ thì $t_0 \not\vdots 7$. Khi đó: $\begin{cases} z_0^6 \equiv 1[7] \\ t_0^6 \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow z_0^6 \equiv t_0^6[7]$ (3)

Từ (2) $\Rightarrow z_0^6 \equiv -t_0^6 \left[7\right]$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ Vô lí.

Vậy $z_0 \vdots 7 \Rightarrow t_0 \vdots 7$ $\Rightarrow$ Tồn tại $z_1; t_1 \in Z$ sao cho $z_0 = 7z_1$ và $t_0 = 7t_1$.

Thế vào (1) $\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 7(z_1^2 + t_1^2)$.

Lập luận tương tự ta có $x_0 \vdots 7$ và $t_0 \vdots 7$.

$\Rightarrow$ Tồn tại $x_1; y_1 \in Z$ sao cho $x_0 = 7x_1$ và $y_0 = 7y_1$.

Do đó ta được: $x_0 = 7x_1$; $y_0 = 7y_1$; $z_0 = 7z_1$ và $t_0 = 7t_1$.

$\Rightarrow (x_1; y_1; z_1; t_1)$ thỏa mãn (I) và ta có:

$$|x_1| + |y_1| + |z_1| + |t_1| = \frac{1}{7}\left(|x_0| + |y_0| + |z_0| + |t_0|\right) < |x_0| + |y_0| + |z_0| + |t_0| \text{ (vô lí).}$$

Do đó hệ (I) không có nghiệm khác (0; 0; 0; 0).

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là (0; 0; 0; 0).

**Câu 5.**

▸ Ta đánh số thứ tự 2013 số trên đường tròn theo một chiều nhất định sao cho số nhỏ nhất trong 2013 số đó là số ở vị trí 1.

Thực hiện liên tiếp các phép biến đổi ở các vị trí {1;2;3;4}, {5;6;7;8}....

Sau 1510 phép biến đổi ta đã cộng 1 vào các số trên 6040 lần, mà 6040 = 3.2013 + 1, nghĩa là các số trên đường tròn được cộng thêm 3 đơn vị, trừ số đầu tiên được cộng vào 4 đơn vị.

Do đó, sau 1510 phép biến đổi như trên thì ta được 2013 số mới mà khoảng cách giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giảm đi 1 đơn vị.

Vì vậy, tiếp tục thực hiện quá trình biến đổi như trên, sau hữu hạn phép ta sẽ thu được 2013 số bằng nhau.

▸ Khi thay phép biến đổi bằng cách cộng vào 30 số thì chưa chắc thu được 2013 số bằng nhau. Thậy vậy, nếu ban đầu tổng các số không chia hết cho 3, mỗi lần cộng vào 30 số thì cũng tạo thành 1 tổng không chia hết cho 3.

Vì tổng không chia hết cho 3 nên không thể chia thành 2013 số bằng nhau.

**Câu 6.**

▸ Giả sử hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

$f(n + 1) > f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

và $f(f(f(n))) = n + 2013, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow f(n + 1) \geqslant f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$f(n) + 2013 = f(f(f(f(n)))) = f(n + 2013)$

$\geqslant f(n + 2012) + 1$

$\geqslant f(n + 2011) + 2$

$\geqslant f(n + 2010) + 3$

$\geqslant \ldots$

$\geqslant f(n + 1) + 2012 \geqslant f(n) + 2013$

$\Rightarrow f(n+2013) = f(n+2012) + 1 = f(n+2011) + 2$

$= f(n+2010) + 3 = \ldots = f(n+1) + 2012 = f(n) + 2013, \forall n \in N^*$

$\Rightarrow f(n+1) = f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (4)

$\Rightarrow f(n) = f(1) + n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f(n) = n + a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (5) với $a = f(1) - 1$.

Từ (5) ta có $f(f(n)) = f(n+a) = n + 2a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow n + 2013 = f(f(f(n))) = f(n+2a) = n + 3a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow a = \dfrac{2013}{3} = 671$

$\Rightarrow f(n) = n + 671, \forall n \in \mathbb{N}^*$

▸ Ngược lại nếu $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = n + 671, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$f(n+1) = n + 1 + 671 > n + 671 = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(f(f(n))) = f(f(n+671)) = f(n+1522) = n + 2013, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $f(n) = n + 671, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm số cần tìm.

# TRƯỜNG THPT MẠC ĐĨNH CHI
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

**Cách 1.** Phương trình đã cho tương đương với.

$$(x+1)\left(1+\sqrt{x^2+2x+3}\right) + (x+2)\left(1+\sqrt{(x+2)^2+2}\right) = 0.$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+2x+3}, u > 0$ và $v = \sqrt{x^2+4x+6}, v > 0$.

Khi đó: $\begin{cases} v^2 - u^2 = 2x + 3 \\ x = \dfrac{v^2 - u^2 - 3}{2}. \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$\dfrac{v^2 - u^2 - 1}{2}(1+u) + \dfrac{v^2 - u^2 + 1}{2}(1+v) = 0;$

$\Leftrightarrow (v^2 - u^2)(2 + u + v) + v - u = 0;$

$\Leftrightarrow (v-u)[(v+u)(2+u+v)+1] = 0;$

$\Leftrightarrow v = u$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+6} = \sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\dfrac{3}{2}$.

**Cách 2.**

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$4x+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+2(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}+(x^2+4x+6)$$

$$-(x+1)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}-(x^2+2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right)^2-\left(x+1-\sqrt{x^2+2x+3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\left(2x+3+\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+6)+\sqrt{x^2+4x+6}-(x^2+2x+3)-\sqrt{x^2+2x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$$

$$+\left(\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2+2x+3}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+6}=\sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-\frac{3}{2}$.

**Câu 2.**

Ta có $P = BC + CA + AB = a + b + c$

$\Rightarrow P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$P_1 = AB + BI + AI$

$$= c+\frac{a}{2}+m_a \Rightarrow P_1^2 = c^2+\frac{a^2}{4}+m_a^2+ca+am_a+2cm_a$$

$P_2 = AC + CI + AI$

$$= b+\frac{a}{2}+m_a \Rightarrow P_2^2 = b^2+\frac{a^2}{4}+m_a^2+ba+am_a+2bm_a$$

$$\Rightarrow P_1^2+P_2^2-P^2 = -\frac{a^2}{2}+2m_a^2+2am_a+2bm_a+2cm_a-ab-ac-2bc$$

$$= -\frac{a^2}{2} + b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + 2m_a(a+b+c) - ab - ac - 2bc$$

$$= -a(a+b+c) + 2m_a(a+b+c) + b^2 + c^2 - 2bc$$

$$= (2m_a - a)(a+b+c) + (b-c)^2.$$

Tam giác ABC không có góc tù

$$\Rightarrow A \leqslant 90^0 \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \geqslant \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2m_a^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4m_a^2 \geqslant a^2 \Leftrightarrow 2m_a \geqslant a \Leftrightarrow 2m_a - a \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = 90^0$.

Ta được $P_1^2 + P_2^2 - P^2 \geqslant 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m_a - a = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ b = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow$Tam giác ABC vuông cân tại A.

Do đó $P^2 = P_1^2 + P_2^2 \Leftrightarrow P_1^2 + P_2^2 - P^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC vuông cân tại A.

**Câu 3.**

Đặt $\begin{cases} a^2 = \tan x \\ b^2 = \tan y \\ c^2 = \tan z \\ d^2 = \tan t \end{cases}$ $(\tan x, \tan y, \tan z, \tan t \geqslant 0)$

Theo đó giả thiết (1) biến đổi thành

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\tan^2 y} + \frac{1}{1+\tan^2 z} + \frac{1}{1+\tan^2 t} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - \cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 t = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z \geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z}$$

(Bất đẳng thức AM - GM)

Chứng minh tương tự, ta có:

$\sin^2 x \geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 y.\cos^2 z.\cos^2 t}$; $\sin^2 y \geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 z.\cos^2 t.\cos^2 x}$;

$\sin^2 z \geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 t.\cos^2 x.\cos^2 z}$.

Nhân vế với vế các bất phương trình trên, ta có:

$\sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z.\sin^2 t \geqslant 81.\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z.\cos^2 t$

$\Leftrightarrow \tan^2.\tan^2 y.\tan^2 z.\tan^2 t \geqslant 81$

$\Leftrightarrow a^4.b^4.c^4.d^4 \geqslant 81$

$\Leftrightarrow a.b.c.d \geqslant 3$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \sqrt[4]{3}$.

**Câu 4.**

Ta sắp xếp các em theo thứ tự để số bi của các em giảm dần.

Do đó, em thứ 1 có nhiều bi nhất, em thứ 7 có ít bi nhất.

Nếu em thứ 4 có số bi lớn hơn hay bằng 15 viên thì 3 em đầu có số bi lớn hơn hay bằng 16 + 17 + 18 = 51 viên.

Nếu em thứ 4 có số bi ít hơn hay bằng 14 viên thì 4 em sau có số bi không quá 14 + 13 + 12 +11 = 50 viên. Như vậy, 3 em đầu có không ít hơn 50 viên.

**Câu 5**

Ta có $|B| = 5! = 120$ nên khi chia các phần tử của B cho 120 ta được 120 số dư (có thể trùng nhau).

Gọi x là phần tử bất kì của B và r là số dư khi chia x cho 120. Ta có:

$x = \overline{abcde}$ với a, b, c, d, $e \in A$ và $x = 120k + r$ với $k, r \in \mathbb{N}$

và $r \in M = \{0; 1; 2; 3;... 119\}$.

Vì $a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ và $15 \vdots 3$ nên $x \vdots 3$.

Suy ra $r \vdots 3$ (vì $120k \vdots 3$)

Vì $x - r = 120k$ chia hết cho 10 nên chữ số hàng đơn vị của r và x bằng nhau.

Ta suy ra $r \in C = \{3; 12; 15; 21; 24; 33; 42; 45; 51; 54; 63; 72; 75; 81; 84; 93; 102; 105; 111; 114\}$

Ta còn chứng minh được $r \neq 24$. Thật vậy, giả sử $r = 24$.

Ta có $x = \overline{abcde} = 120k + 24 \Rightarrow e = 4$ và $x \vdots 4 \Rightarrow \overline{de} \vdots 4 \Rightarrow d = 2$ (vì 14, 34, 54 đều không chia hết cho 4)

Ta còn có $x \vdots 8 \Rightarrow \overline{cde} \vdots 8$. Vô lí vì 124, 324 và 524 đều không chia hết cho 8.

Vậy $r \neq 24$.

Ta được $r \in D = C \setminus \{24\}$ và $|D| = 19$.

Vì 120 > 114 = 6.19 nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 6 + 1 = 7 số dư trùng nhau.

Từ đó ta được điều phải chứng minh.

**Câu 6.**

Thay $y = 1$ vào ii), ta được:

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1 = 2f(x) - f(x+1) + 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ . (1)

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z}$ .(2)

Từ (1) và (2), thay $x = n, \forall n \in \mathbb{Z}$, ta được: $f(n+1) = f(n) + 1$

$\Rightarrow f(n) = f(n+1) - 1 = f(1) + n - 1 = n + 1$ (4)

Từ i), ii) và (2), thay $x = \frac{1}{n}, y = n, \forall n \in \mathbb{Z}$, ta được:

$$2 = f(1) = f\left(\frac{1}{n}.n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1$$

$$= f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1) - \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + n\right] + 1 = nf\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1$$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$ (5)

Từ ii), (1) và (5), thay $x = p, y = \frac{1}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, ta được:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1 = (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \left(p + \frac{1}{q} + 1\right) + 1 = \frac{p}{q} + 1$$

Suy ra $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ .

Thử lại, ta thấy $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

# TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Điều kiện: $x + y \neq 0$.

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \dfrac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases}$$

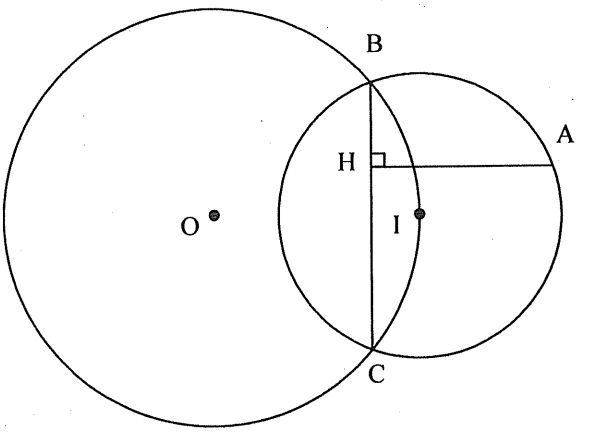
Đặt $\begin{cases} a = x + y + \dfrac{1}{x+y} \ (|a| \geqslant 2) \\ b = x - y \end{cases}$

Hệ phương trình tuong đương với $\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 13 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ (do $|a| \geqslant 2$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (x; y) = (1; 0).

**Câu 2.**




Gọi H là hình chiếu của A lên BC, ta có:

$HI^2 - IA^2 = HO^2 - R^2$ (H thuộc trục đẳng phương BC của ( O ) và ( I ))

$\Rightarrow IA^2 - R^2 = HI^2 - HO^2$ (1)

Gọi p và p' là phương tích của A đối với hai vòng ( O ) và ( I ).

(M là trung điểm OI, A' và H' lần lượt là hình chiếu của A và H lên OI, p' = 0)

$\Rightarrow HA = \dfrac{p}{2OI} = \dfrac{p}{2R}$ không đổi .

Do đó đường thẳng BC luôn cách điểm A cố định một đoạn không đổi $\dfrac{p}{2R}$ nên BC tiếp xúc đường tròn $(A; \dfrac{p}{2R})$ .

**Câu 3.**

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geqslant a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a + 1 - \frac{b + ab}{2}.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{b+1}{c^2+1} \geqslant b+1-\frac{c+bc}{2};$$

$$\frac{c+1}{a^2+1} \geqslant c+1-\frac{a+ca}{2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geqslant \frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}=\frac{9}{2}-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\geqslant \frac{9}{2}-\frac{(a+b+c)^2}{6}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Câu 4.**

Do vai trò của a và b là tương đương nên không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Nếu $a=b$ ta có $\frac{a^2+b}{b^2-a^3}=\frac{a+1}{a(1-a)} \in \mathbb{Z}$ nên $a+1 \vdots a \Rightarrow a=b=1$, không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Do đó $a>b \geqslant 1$, ta có $a^3-b^2>0$.

Khi đó $\frac{a^2+b}{b^2-a^3}=\frac{a^2+b}{a^3-b^2} \in \mathbb{Z}$ nên $a^2+b \vdots a^3-b^2>0$

$\Rightarrow a^3-b^2<a^2+b \Rightarrow a^3-a^2<b^2+b<2b.$

Ta có $2a>2b>a^3-a^2 \Rightarrow 2>a^2-a \Rightarrow a=1$ (mâu thuẫn với $a>1$).

Vậy không tồn tại các số a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.**

Tập A có 100 số được chia thành 7 tập hợp con, nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất một tập hợp con B chứa ít nhất 15 số.

Trong tập B xét cặp (a;b) trong đó $a>b$. Xét hiệu $a-b>0$, vì B có ít nhất 15 số nên có ít nhất $C_{15}^2=105$ hiệu.

Do $B \subset A=\{1;2;3;...;99;100\}$ nên các hiệu trên thuộc $\{1;2;3;...;99\}$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai hiệu bằng nhau, giả sử $a-c=d-b$

Nếu $a=d$ thì $c=b$, vô lí vì hai cặp này khác nhau, do đó $a \neq d$.

Khi đó nếu a, b, c, d đôi một khác nhau thì $a+b=c+d$.

Nếu $a=b$ ta có $2a=c+d$ với $c \neq d$ (vì nếu $c=d$ thì $a=d$, vô lí).

Nếu $c=d$ thì $2d=a+b$ với $a \neq b$ (vì nếu $a=b$ thì $a=d$, vô lí).

Các trường hợp còn lại đều không xảy ra.

Bài toán được chứng minh.

**Câu 6.**

Với x = 1 ta có: $f(2) = \dfrac{f^2(1)+1}{f(0)} = 2 \in \mathbb{N}$.

Tương tự $f(3) \in \mathbb{N}$

Giả sử $f(x)$ nguyên với $x = k$ và $x = k-1$.

Ta có: $f(x+1) = \dfrac{f^2(x)+1}{f(x-1)} \Rightarrow f(x+1).f(x-1) = f^2(x)+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(k+1).f(k-1) = f^2(k)+1 \\ f(k).f(k-2) = f^2(k-1)+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(k+1).f(k-1) - f(k).f(k-2) = f^2(k) - f^2(k-1)$$

$$\Rightarrow f(k-1)[f(k+1)+f(k-1)] = f(k)[f(k)+f(k-2)]$$

$$\Rightarrow \frac{f(k)}{f(k+1)+f(k-1)} = \frac{f(k-1)}{f(k)+f(k-2)} = \ldots = \frac{f(1)}{f(2)+f(0)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(k+1) = 3f(k) - f(k-1) \in \mathbb{N}.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp $f(x) \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$.

# TRƯỜNG THPT TRẦN ĐẠI NGHĨA
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4}} \geqslant \frac{|x+y|}{2} \geqslant \frac{x+y}{2};$$

$$\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geqslant \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} \geqslant \frac{x+y}{2}.$$

Các đẳng thức trên xảy ra khi $x = y \geqslant 0$.

Phương trình trên suy ra: $x = y$.

Thế vào phương trình dưới, ta có: $2x^2 - 5 = 3[x]$

Do $x - 1 < [x] \leqslant x$ nên:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5 > 3(x-1) \\ 2x^2 - 5 \leqslant 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \text{ hay } x < -\dfrac{1}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 < x \leqslant \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2x^2 - 5 = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{22}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{22}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\sqrt{22}}{2} \ (\text{do } [x] = 2)$$

Vậy $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{22}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{22}}{2} \end{cases}$

**Câu 2.**

$$\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} = \left(\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2 \geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Tương tự suy ra:

$$\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} \geqslant 24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

**Câu 3.**

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM: $x^3 + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geqslant 5x$.

Tương tự, suy ra: $4\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \geqslant 5(x + y + z) - \left(x^3 + y^3 + z^3\right)$.

Mặt khác, ta có: $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Do đó:

$$4\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \geqslant 5(x + y + z) + 3(x + y)(y + z)(z + x) - (x + y + z)^3.$$

Hay: $4\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) + 12 \geqslant 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

**Câu 4.**

Giả sử $a > b$.

Gọi r là số dư khi a chia cho p, ta có: $a \equiv r \pmod p \Rightarrow a^b \equiv r^b \pmod p$.

Mà $a + b \vdots p$ nên $b \equiv -r \pmod p \Rightarrow b^a \equiv (-r)^a \equiv -r^a \pmod p$ (vì a là số lẻ).

Khi đó: $a^b + b^a \equiv r^b - r^a \equiv r^b\left(1 - r^{a-b}\right) \pmod p$

Ta có: $a - b \vdots p - 1 \Rightarrow a - b = k(p - 1), k \in \mathbb{N}^*$.

Do đó: $a^b + b^a \equiv r^b\left(1 - r^{k(p-1)}\right) \pmod p$

Theo định lí Fermat nhỏ: $r^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Vậy $a^b + b^a \equiv 0 \pmod p \Rightarrow a^b + b^a \vdots p$.

Do $a^b + b^a$ là số chẵn và p nguyên tố lẻ nên $a^b + b^a$ chia hết cho 2p.

**Câu 5.**

Giả sử có thể phủ kín được hình vuông ABCD cạnh bằng 1cm bởi ba đường tròn $(O_1)$; $(O_2)$; $(O_3)$ đường kính bằng 1cm.

Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 2 trong 4 đỉnh A, B, C, D thuộc một đường tròn, do đường chéo của ABCD bằng $\sqrt{2}$ nên hai đỉnh này chỉ có thể là hai đỉnh kề nhau, giả sử là A, B thuộc $(O_1)$. Do AB = 1cm nên $(O_1)$ phải là đường tròn đường kính AB. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai đỉnh C và D cùng thuộc một đường tròn: giả sử là $(O_2)$. Tương tự suy ra CD là đường kính của $(O_2)$. Khi đó trung điểm P của BC và trung điểm Q của AD phải thuộc $(O_3)$ (do chúng không thuộc $(O_1)$ và $(O_2)$). Do PQ = 1 nên $(O_3)$ là đường tròn đường kính PQ. Khi đó trung điểm E của BP không thuộc cả 3 đường tròn trên (vô lí).

Trường hợp 2: C, D thuộc hai đường tròn khác nhau, giả sử C thuộc $(O_2)$ và D thuộc $(O_3)$. Lấy M tuỳ ý trên cạnh AD (M khác A, D). Vì MC > 1 nên M thuộc $(O_3)$. Do đó $(O_3)$ là đường tròn đường kính AD, tương tự suy ra $(O_2)$ là đường tròn đường kính BC. Khi đó trung điểm N của CD không thuộc cả ba đường tròn trên (vô lí)

**Câu 6.**

$f\left(f(x+y) + f(x-y)\right) = 2x \quad \forall x,y \in \mathbb{Q} \quad (1)$

$y = 0 : (1) \Rightarrow f\left(2f(x)\right) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad (2)$

Với $p,q \in \mathbb{Q}$ sao cho $f(p) = f(q) \Rightarrow 2f(p) = 2f(q)$

$\Rightarrow f\left(2f(p)\right) = \left(2f(q)\right) \Rightarrow 2p = 2q \Rightarrow p = q$.

Suy ra f(x) là đơn ánh

$(1);(2) \Rightarrow f\left(f(x+y) + f(x-y)\right) = f\left(2f(x)\right)$

$\Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q} \qquad (3)$

$y = 1 : (3) \Rightarrow f(x+1) - f(x) = f(x) - f(x-1) \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad (4)$

$x \in \mathbb{N}^* : f(x) - f(x-1) = f(x-1) - f(x-2) = \ldots = f(1) - f(0)$

$\Rightarrow f(x) = f(x-1) + f(1) - f(0) = f(x-2) + 2\left[f(1) - f(0)\right] = \ldots$

$= f(1) + (x-1)\left[f(1) - f(0)\right] = xf(1) - (x-1)f(0).$

Ta chứng minh: $f(nx) = nf(x) - (n-1)f(0) \quad \forall x \in \mathbb{Q};\ n \in \mathbb{N}$ (*) bằng quy nạp.

+) $n = 0$: $f(0) = 0.f(x) - (0 - 1)f(0)$.

+) $n = 1$: $f(x) = 1.f(x) - (1 - 1)f(0)$.

+) Giả sử (*) đúng đến $n = k$ ($k \geqslant 1$), nghĩa là: $f(kx) = kf(x) - (k - 1)f(0)$;

$f((k - 1)x) = (k - 1)f(x) - (k - 2)f(0)$

Ta chứng minh (*) đúng đến $n = k + 1$, nghĩa là chứng minh:

$f((k + 1)x) = (k + 1)f(x) - kf(0)$

Thay x bởi kx; y bởi x vào (3): $f(kx + x) + f(kx - x) = 2f(kx)$

$\Rightarrow f\big((k + 1)x\big) + (k - 1)f(x) - (k - 2)f(0) = 2kf(x) - 2(k - 1)f(0)$

$\Rightarrow f\big((k + 1)x\big) = (k + 1)f(x) - kf(0)$

Suy ra: $f(nx) = nf(x) - (n - 1)f(0)\ \forall x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}$ (5)

Với $x \in N^*$: (5) $\Rightarrow f(1) = f\left(x.\dfrac{1}{x}\right) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right) - (x - 1)f(0)$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}f(1) - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)f(0)\ \ \forall x \in \mathbb{N}^*$

Với $x \in \mathbb{Q}^+$:

Đặt

$x = \dfrac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbb{N}^*)$ : (5) $\Rightarrow f(x) = f\left(p.\dfrac{1}{q}\right) = pf\left(\dfrac{1}{q}\right) - (p - 1)f(0)$

$= \dfrac{p}{q}f(1) - \left(\dfrac{p}{q} - p\right)f(0) - (p - 1)f(0)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{p}{q}f(1) - \left(\dfrac{p}{q} - 1\right)f(0) = xf(1) - (x - 1)f(0)$

(3) $\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2f(0) \Rightarrow f(-x) = -f(x) + 2f(0)$

$= -xf(1) + (x - 1)f(0) + 2f(0) = (-x)f(1) - (-x - 1)f(0)$.

Suy ra : $f(x) = xf(1) - (x - 1)f(0)\ \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Vậy $f(x) = x$ hay $f(x) = -x$.

# TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Trường hợp 1:

Nếu $y = 0$ và $z = 0$ thì $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $x = 0$ và $z = 0$ thì $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $y = 0$ và $x = 0$ thì $z \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$

Ta có: $\begin{cases} 6x\left(y^2+z^2\right) = 13yz \\ 6y\left(z^2+x^2\right) = 5zx \\ 6z\left(x^2+y^2\right) = 5xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y} = 13 \\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6yz}{x} = 10 \\ \dfrac{6xz}{y}+\dfrac{6yz}{x} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y} = 13 \\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6yz}{x} = 10 \\ \dfrac{6xz}{y}+\dfrac{6yz}{x} = 5 \\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y}+\dfrac{6yz}{x} = 14 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6yz}{x} = 1 \\ \dfrac{6xz}{y} = 4 \\ \dfrac{6xy}{z} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6yz}{x} = 1 \\ \dfrac{6xz}{y} = 4 \\ \dfrac{6xy}{z} = 9 \\ xyz = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = \dfrac{1}{4} \\ z^2 = \dfrac{1}{9} \\ xyz = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Thử lại ta có các cặp số thỏa mãn hệ là:

$$\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là

$$\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$$

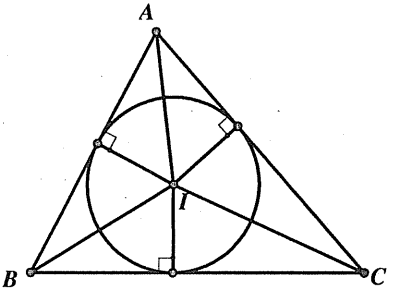
$$\left\{(x;0;0) \mid x \in \mathbb{R}\right\},\left\{(0;y;0) \mid y \in \mathbb{R}\right\},\left\{(0;0;z) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$$

**Câu 2.**

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác IBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin I} \Leftrightarrow \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+A\right)} \Leftrightarrow \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow IB = \frac{a\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$




Tương tự ta có $IC = \dfrac{b\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$, $IA = \dfrac{c\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

Suy ra: $IA.IB.IC = abc.\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$. (1)

Mặt khác $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$, $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$, ta có:

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $abc \geqslant 3\sqrt{3}IA.IB.IC$, dấu bằng xảy ra khi tam $\Delta ABC$ đều.

**Câu 3.**

Ta có: $(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geqslant 9 \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geqslant \frac{9}{ab+bc+ca}$.

Suy ra $P \geqslant \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{9}{ab+bc+ca}$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}} + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\geqslant \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{21}{3(ab+bc+ca)} = 9 + \frac{21}{2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)}$$

$$\geqslant 9 + \frac{21}{2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2} = 9 + \frac{21}{(a+b+c)^2} = 30.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min P = 30$.

**Câu 4.**

Giả sử: $a \geqslant b$. Gọi r là số dư của a khi chia cho p thì $a \equiv r \pmod p$

Do $a + b \vdots p$ nên $b = -r \pmod p$

$\Rightarrow a^b + b^a \equiv r^b - r^a \pmod p \Rightarrow a^b + b^a \equiv r^b(1 - r^{a-b}) \pmod p$

Mặc khác $a - b$ chia hết cho $p - 1$ nên $a - b = k(p - 1)$

Vì r không chia hết cho p nên theo định lí phec-ma nhỏ ta có:

$r^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow r^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow r^{a-b} \equiv 1 \pmod p$

Do đó ta có $a^b + b^a \equiv 0 \pmod p$ hay $a^b + b^a$ chia hết cho p.

Ngoài ra ta có: a, b là hai số tự nhiên lẻ

$\Rightarrow a^b, b^a$ là các số nguyên lẻ nên $a^b + b^a$ chia hết cho 2.

Vậy $a^b + b^a$ chia hết cho 2p.

**Câu 5.**

Nhận xét rằng nếu có hai tập hợp con giao nhau mà tổng những phần tử trong chúng bằng nhau, thì ta có thể bỏ các phần tử chung đi. Khi đó ta được hai tập hợp không giao nhau, mà tổng những phần tử trong chúng vẫn bằng nhau.

Số tập hợp con khác rỗng của X là

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Tổng các số trong mỗi tập con của X không lớn hơn $10.99 = 990$.

Như vậy số lượng các tổng khác nhau nhiều nhất là 990. Do đó, theo nguyên lí đirichlet trong số 1023 tập hợp con khác rỗng của X sẽ có ít nhất hai tập hợp mà tổng các phần tử trong chúng bằng nhau.

**Câu 6.**

Theo tính chất $f(x+3) \leqslant f(x) + 3$, với mọi số nguyên n ta có

$$f(n+2013) = f\left[(n+670.3)+3\right] \leqslant f(n+670.3) + 3 \leqslant \ldots \leqslant f(n) + 2013 \quad (1)$$

Mặt khác theo tính chất $f(x+2012) \geqslant f(x)+2012$ ta cũng có

$f(n+2013) = f\left[(n+1)+2012\right] \geqslant f(n+1)+2012$, với mọi số nguyên $n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(n+1)+2012 \leqslant f(n)+2013$

Hay $f(n+1) \leqslant f(n)+1$ (3)

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức (3) ta được $f(n+2012) \leqslant f(n)+2012$ (4)

Mà $f(x+2012) \geqslant f(x)+2012$, suy ra $f(n+2012) \geqslant f(n)+2012$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $f(n+2012) = f(n)+2012$, với mọi số nguyên $n$.

Thay $n=1$ ta được $f(2013) = f(1)+2012$.

# TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Xét x là một số nguyên tuỳ ý.

Nếu $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $x^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}$

Nếu $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $x^2 = 4k(k+1)+1$

$\Rightarrow x^4 = 16k^2 + 8k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod{16}$

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{13}^4 \equiv r\left(\bmod 16\right)$ với $r \in \mathbb{Z}$ và $r \leqslant 13$ (1)

Mặt khác: $1598 \equiv 14 \pmod{16}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có phương trình không có nghiệm nguyên.

**Câu 2.**

$(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24$ (1)

$x = -3$ không thỏa phương trình (1)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2-8x+48} = \dfrac{x-24}{x+3}$ (2)

Điều kiện: $x < -3 \vee x \geqslant 24$

(2) là phương trình hoành độ giao điểm của: $\begin{cases} y = -x^2-8x+48 & (3) \\ y = \dfrac{x-24}{x+3} & (4) \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y^2 = -x^2-8x+48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ (x+4)^2 + y^2 = 64 \end{cases}$

Đặt $x+4 = 8\sin t$; $y = 8\cos t$

(4) $\Leftrightarrow 8\cos t = \dfrac{8\sin t - 28}{8\sin t - 1} \Leftrightarrow 16\sin t\cos t - 2(\sin t + \cos t) + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 8(\sin t + \cos t)^2 - 2(\sin t + \cos t) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t = \dfrac{1}{2} \vee \sin t + \cos t = -\dfrac{1}{4})$

- $\sin t + \cos t = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{x+4}{8} + \frac{y}{8} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{x-24}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = \frac{x-24}{x+3} \end{cases}$$

$$\frac{x-24}{x+3} = -x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{7} \text{ (loại)} \\ x = -2 - 2\sqrt{7} \end{cases}$$

- $\sin t + \cos t = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \frac{x+4}{8} + \frac{y}{8} = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{x-24}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 6 \\ y = \frac{x-24}{x+3} \end{cases}$$

$$\frac{x-24}{x+3} = -x - 6 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2\sqrt{31} \text{ (loại)} \\ x = -5 - 2\sqrt{31} \end{cases}$$

Thử lại hai nghiệm $x = -2 - 2\sqrt{7}$ ; $x = -5 - 2\sqrt{31}$ thỏa mãn (1)

Kết luận: $\begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{7} \\ x = -5 - 2\sqrt{31} \end{cases}$

**Câu 3.**

Điều kiện: $x \geqslant 0$

(1) $\Leftrightarrow y^3 + 2y = (\sqrt{2x})^3 + 2\sqrt{2x}$

Đặt $f(t) = t^2 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy $f(y) = f(\sqrt{2x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x}$

(2) $\Leftrightarrow (y-3)(y-x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} y = 3 \\ y = x - 1 \end{array} \right.$

- $y = 3$

$y = \sqrt{2x} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{2x} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

- $y = x - 1$

$x - 1 = \sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$

$y = x - 1 \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{3}$.

Kết luận tập nghiệm của hệ là: $S = \{ (\frac{9}{2}; 3), (2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}) \}$.

**Câu 4.**

Ta có: $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b$)

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geqslant ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geqslant ab(a+b)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3 \geqslant ab(a+b) + abc \Leftrightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 3} \leqslant \frac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự: $\dfrac{1}{b^3+c^3+3} \leqslant \dfrac{1}{bc(a+b+c)}$

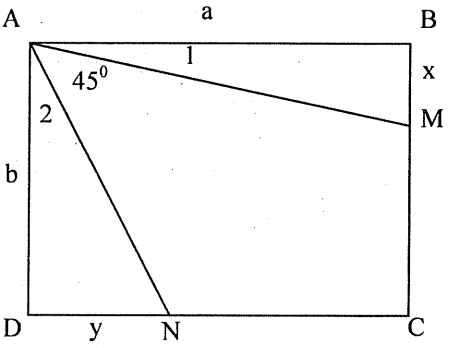
$$\frac{1}{a^3+c^3+3} \leqslant \frac{1}{ac(a+b+c)}$$

Khi đó: $P \leqslant \dfrac{1}{ab(a+b+c)} + \dfrac{1}{bc(a+b+c)} + \dfrac{1}{ac(a+b+c)}$

$$\Leftrightarrow P \leqslant \frac{(c+a+b)}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc} = \frac{1}{3}$$

Vậy $\max P = \dfrac{1}{3}$ khi đó $\begin{cases} a=b=c \\ abc=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt[3]{3}$

**Câu 5.**




$\tan\widehat{MAN} = \tan[90^0 - (A_1 + A_2)]$

$\Leftrightarrow \tan 45^0 = \cot(A_1 + A_2)$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{1 - \tan A_1 \tan A_2}{\tan A_1 + \tan A_2}$

$\Leftrightarrow 1 - \tan A_1 \tan A_2 = \tan A_1 + \tan A_2$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{xy}{ab} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \Leftrightarrow ab - xy = bx + ay$

$\Leftrightarrow ab = xy + bx + ay$

$\Leftrightarrow S = xy + bx + ay.$

## ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ CỦA CÁC TRƯỜNG

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI

**Câu 1.**

Điều kiện: $\begin{cases} x,y \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{x}{x+y}.\dfrac{x+y}{x+3y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{x+y}{x+3y}\right) \\ \sqrt{\dfrac{y}{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}.\dfrac{2y}{x+3y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2y}{x+3y}\right) \end{cases}$$

Suy ra: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{3}{2}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{3x+y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$

Suy ra $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+y}}\right) \leqslant 2$.

Đẳng thức có khi $x = y$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x = y$ thay vào (1) ta có được: $2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=10 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 4$.

**Câu 2.**

Giả sử AM cắt BC tại X; BN cắt CA tại Y, CP cắt AB tại Z.

Theo định lí Ceva, điều kiện để AM, BN, CP đồng quy là:

$$\frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB}.\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}.\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA}=1 \qquad (*)$$

Theo định lí Ceva điều kiện để DM;EN;FP đồng quy là:

$$\frac{MF}{ME}.\frac{PE}{PD}.\frac{ND}{NF}=1 \qquad (**)$$

Áp dụng định lí hàm số sin đối với tam giác AFM và AEM, ta có:

$$\frac{FM}{\sin\angle BAX}=\frac{FM}{\sin\angle FAM}=\frac{AF}{\sin\angle AMF}(1)$$

$$\frac{EM}{\sin\angle XAC}=\frac{EM}{\sin\angle MAE}=\frac{AE}{\sin\angle EMA}(2)$$

Chia (1) cho (2) và chú ý rằng $\sin\angle AMF = \sin\angle AME$ ta được:

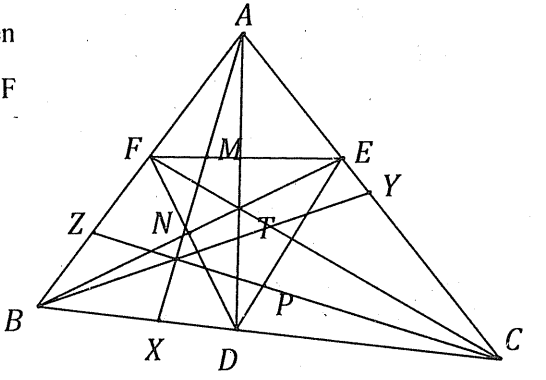
$$\frac{MF}{ME}=\frac{FA.\sin\angle BAX}{EA.\sin\angle XAC}.$$

Tương tự trên ta được: $\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{CE.\sin\angle ACZ}{CD.\sin\angle ZCB}$; $\dfrac{ND}{NF}=\dfrac{BD.\sin\angle CBY}{BF.\sin\angle YBA}$

Nhân ba đẳng thức trên lại với nhau ta được:

$$\frac{MF}{ME}.\frac{PE}{PD}.\frac{ND}{NF}=\frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB}.\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}.\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA}.\left(\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}\right)$$

Mà ta lại có: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=1$ nên áp dụng định lí Ceva cho AD; BE; CF trong tam giác ABC, suy ra đpcm.



**Câu 3.**

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a,b,c\}$.

Do $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + a^2}{1 + a^2}$.

Hay $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \dfrac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(a+c)}$.

Ta chứng minh: $\dfrac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2$

$\Leftrightarrow (b+c)(2a^2 + b^2 + c^2) + 8abc \geqslant 2(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 2a^2b + b^3 + bc^2 + 2a^2c + cb^2 + c^3 + 4abc$

$\geqslant 2(a^2b + ac^2 + b^2c + b^2a + a^2c + bc^2)$

$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + 4abc - bc^2 - cb^2 - 2c^2a - 2b^2a \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 - 2a(b-c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (b-c)^2(b+c-2a) \geqslant 0$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 4.**

Ta có $A_n \geqslant 7 > 1$. (1)

Từ hằng đẳng thức: $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1).(a^2 + a + 1)$ ta có:

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2^{2^n} + 1 = \left(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1\right).\left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right) \quad (2)$$

nếu đặt: $B_n = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow B_n > 1$ nhưng do $B_n$ là số lẻ nên $B_n \geqslant 3$;

Từ (2) ta có thể viết: $A_{n+1} = A_n.B_n$. (3)

Từ (1); (3) suy ra $A_n$ luôn là hợp số với mọi n nguyên dương.

Ta sẽ chứng minh: $A_n$ và $B_n$ là hai số nguyên tố cùng nhau, hay: $(A_n, B_n) = 1$ với mọi n nguyên dương .

Thật vậy: Giả sử $A_n$ và $B_n$ có ước chung nguyên tố $p$; do $A_n$ và $B_n$ là những số lẻ nên $p$ là số nguyên tố lẻ.

Khi đó p cũng sẽ là ước của $A_n - B_n = 2.2^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}+1}$ điều này vô lí vì $2^{2^{n-1}+1}$ là một số chỉ có ước nguyên tố duy nhất là 2.

Sự vô lí đó chứng tỏ $(A_n, B_n) = 1$ (4).

Để ý rằng $B_n \geqslant 3 \Rightarrow B_n$ có ít nhất một ước nguyên tố lẻ (5).

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow$ Số ước nguyên tố của $A_{n+1}$ nhiều hơn số ước nguyên tố của $A_n$ ít nhất là 1 (*)

Ta lại có $A_1 = 7$ có 1 ước nguyên tố là 7; $A_2 = 21$ có 2 ước nguyên tố là 3; 7.

Theo nhận xét (*) thì $A_3$ có ít nhất là 3 ước nguyên tố; $A_4$ có ít nhất là 4 ước nguyên tố ,....; $A_n$ có ít nhất là n ước nguyên tố.

**Câu 5.**

Giả sử trong 673 số chọn ra không có hai số nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

Tức là, với hai số a,b bất kì trong 673 số chọn ra ta luôn có

$$|a - b| \leqslant 671 \text{ hoặc } |a - b| \geqslant 1342.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b$, khi đó:

* $0 < a - b \leqslant 671 \Rightarrow 0 < a - b < 672$ và $a > 672$.

Đặt $a' = a - 672$, khi đó: $-672 < a' - b < 0 \Rightarrow 0 < b - a' < 672$.

* $1342 \leqslant a - b \leqslant 2012$, suy ra $a - b > 1341$, đặt $a' = a - 1341$ ta có:

$0 < a' - b < 671$.

Tóm lại, với mỗi số $x > 672$ ta luôn chọn được một số $x' \in [1;672]$ mà $x'$ thoả mãn điều kiện bài toán. Hay nói cách khác là ta có thể đưa 673 số đã chọn về trong đoạn $[1;672]$ và các số mới này đôi một khác nhau. Nhưng trong đoạn $[1;672]$ có tối đa 672 số nguyên, điều này trái với giả thiết là 673 số lấy ra phân biệt.

**Câu 6.**

Ta chứng minh bất đẳng thức (i) không xảy ra dấu "=". Thật vậy:

Giả sử $\exists m \in \mathbb{Z}^+ : f(m+1) = f(m)$ thì:

$$f[f(m+1)] = f[f(m)] = m + 2012, \text{ suy ra}$$

$$m + 1 + 2012 = m + 2012 \text{ ( vô lí)}$$

Vậy: $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : f(n+1) > f(n)$.

Do $f(n+1)$ và $f(n)$ là các số nguyên dương nên:

$$f(n+1) \geqslant f(n) + 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta có:

$$n + 2012 = f[f(n)] \Rightarrow f(n + 2012) = f[f(f(n))] = f(n) + 2012 \text{ (1) (do ii)}$$

Ta lại có:

$$f(n + 2012) \geqslant f(n + 2011) + 1 \geqslant f(n + 2010) + 2 \geqslant \ldots \geqslant f(n) + 2012 \text{ (2)}$$

Từ (1) nên hệ bất đẳng thức (2) phải xảy ra dấu "="

Do đó: $f(n+1) = f(n) + 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .

Ta có: $f(n+1) = f(n) + 1 = f(n-1) + 2 = ... = f(1) + n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Do đó $f(n) = f(1) + n - 1\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow f(f(n)) = f(f(1) + n - 1) = f(1) + [f(1) + n - 1] - 1 = 2f(1) + n - 2$

Mà $f(f(n)) = n + 2013 \Rightarrow 2f(1) + n - 2 = n + 2012 \Rightarrow f(1) = 1007$.

Vậy $f(n) = n + 1006$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH KOMTUM

**Câu 1.**

$$VP(1) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow VT(1) = y^6 + y^3 + 2x^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \leqslant 1 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$8xy^3 + 2y^3 + 2 \geqslant 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 + 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 8xy^3 + 2 \geqslant 2y^6 + 8x^2 + 2\sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4xy^3 + 1 \geqslant y^6 + 4x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2} \geqslant y^6 - 4xy^3 + 4x^2 = (y^3 - 2x)^2 \qquad (4)$$

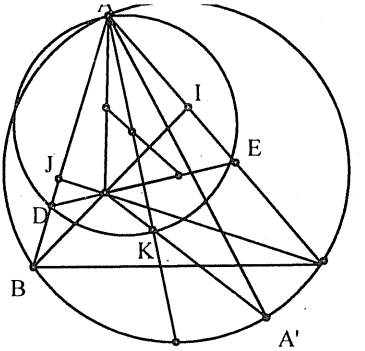
$VT(4) \leqslant 0, VP(4) \geqslant 0$. Do đó:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có: $(x;y) = (-\frac{1}{2};-1)$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-\frac{1}{2};-1)$.

**Câu 2.**




- Gọi BI và CJ là các đường cao của $\Delta$ ABC, ta có $BI \cap CJ = H$.

- Dựng đường kính AA' của đường tròn (ABC) và gọi K là giao điểm của HA' với đường phân giác trong của góc BAC.

Ta có các kết quả sau:

- $\angle JHD = \angle BAK = \dfrac{\angle A}{2} = \angle IHE = \angle DHB$ và do đó HD là phân giác trong của góc BHJ.

- $\angle BAH = \angle CAA'$ (cùng phụ với góc ABC), từ đó suy ra AK là phân giác trong của góc HAA'.

- Theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{JD}{DB} = \dfrac{HJ}{HB}$ (1) và $\dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{HK}{KA'}$ (2).

- Từ các cặp tam giác đồng dạng: $\Delta$ HJB và $\Delta$ AIB; $\Delta$ AIB và $\Delta$ AJC; $\Delta$ AJH và $\Delta$ ACA', cho ta kết quả sau:

$$\frac{HJ}{HB} = \frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{AH}{AA'} \quad (3)$$

- Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\dfrac{JD}{DB} = \dfrac{HK}{KA'}$, lại vì A'B//HJ (cùng vuông góc với AB), suy ra: KD // HJ // A'B. Mà HJ $\perp$ AB nên KD $\perp$ AB.

Dễ thấy AD = AE, do vậy cũng có KE $\perp$ AC.

Từ đây suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

- Gọi O và O' lần lượt là tâm các đường tròn (ABC) và (ADE) thì O và O' là trung điểm của AA' và AK, suy ra: OO' là đường trung bình của tam giác AKA' và từ đây ta suy ra OO' // HA và OO' đi qua trung điểm của AH (đpcm).

**Câu 3.**

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a,b,c\}$.

Ta có $b + c = \sqrt{5} - a \leqslant \sqrt{5}$.

Đặt $P = \left|\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - c^2\right)\left(c^2 - a^2\right)\right|$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$P^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2\left(b^2 - c^2\right)^2\left(c^2 - a^2\right)^2 \leqslant b^4c^4\left(b - c\right)^2\left(b + c\right)^2 \leqslant 5b^4c^4\left(b - c\right)^2$$

$$\leqslant 5\left[\frac{bc + bc + bc + bc + \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)}{5}\right]^5 = 5\left[\frac{\left(b + c\right)^2}{5}\right]^5 \leqslant 5.$$

Suy ra $P \leqslant \sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và các hoán vị.

**Câu 4.**

+ Với n = 1 thì u = 1: đề bài thỏa mãn.

+ Với n > 2:

Giả sử p là một ước nguyên tố lẻ của $3^n + 1$, hiển nhiên p > 3.

Đặt $3^{\frac{n+1}{2}} = 2q + 1$, ta được $p|q^2 + q + 1$.

Thật vậy, từ $3^{\frac{n+1}{2}} = 2q+1 \Rightarrow q = \frac{3^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2}$

$$\Rightarrow q^2+q+1 = \left(\frac{3^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2}\right)^2 + \frac{3^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 2.3^{\frac{n+1}{2}} + 1}{4} + \frac{3^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2} + 1$$

$$= \frac{3^{n+1} - 2.3^{\frac{n+1}{2}} + 1}{4} + \frac{3^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2} + 1 = \frac{3\left(3^n + 1\right)}{4}.$$

Suy ra $p|q^2 + q + 1$. Suy ra $q \not\equiv 0, 1 \pmod p$ và $q^3 \equiv 1 \pmod p$.

Dẫn đến $q^{3k+1} \neq 1 \pmod p$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. (1)

Mặt khác, do (p, q) =1, theo định lí Fermat nhỏ ta có $qp^{-1} \equiv 1 \pmod p$.

Kết hợp với (1), suy ra $p - 1 \neq 3k + 1$ hay $p \neq 3k + 2$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Vì vậy $p \equiv 1 \pmod 3$.

Suy ra, nếu u là ước nguyên dương lẻ của

$3^n + 1$ thì $u \equiv 1 \pmod 3$, hay $u - 1$ chia hết cho 3.

**Câu 5.**

Gọi $P_{(8,4)}$ là số cách tô màu của đa giác đều 8 cạnh bởi 4 màu tô: sao cho hai miền tam giác kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau.

- Ta có: 4 cách tô màu miền tam giác $OA_1A_2$, ứng với mỗi cách tô miền này ta lại có 3 cách tô màu cho miền tam giác $OA_2A_3$; khi đó ta cũng có 3 cách tô màu cho miền tam giác $OA_3A_4$, ..., 3 cách tô màu cho miền tam giác $OA_8A_1$.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách tô là: $4.3^7$.

- Tuy nhiên, chúng ta phải trừ đi số cách tô sai khi miền tam giác $OA_8A_1$ và $OA_1A_2$ có màu giống nhau. Đối với mỗi cách tô sai, ta lại coi miền $OA_8A_2$ như một miền tam giác ( bỏ qua đỉnh $A_1$) sẽ tương ứng 1-1 với cách tô đúng của đa giác đều 7 đỉnh với 4 màu tô.

Do đó chúng ta có công thức truy hồi:

$$P_{(8,4)} = 4.3^7 - P_{(7,4)} = 4.3^7 - (4.3^6 - P_{(6,4)}) = 4.3^7 - 4.3^6 + [4.3^5 - P_{(5,4)})]$$
$$= 4.3^7 - 4.3^6 + 4.3^5 - [4.3^4 - P_{(4,4)})] = 4.3^7 - 4.3^6 + 4.3^5 - 4.3^4 + [4.3^3 - P_{(3,4)})]$$

Nhưng dễ dàng nhận thấy: $P_{(3,4)} = 4.3.2 = 24$.

- Vậy số cách tô thỏa bài toán:

$$P_{(8,4)} = 4.3^7 - 4.3^6 + 4.3^5 - 4.3^4 + 4.3^3 - 24 = 3^8 + 3 = 6564.$$

**Câu 6.**

Đặt $g(n) = f(n) - 4025;\ n \in \mathbb{Z}$.

+ Với mọi $n,m \in \mathbb{Z}$; ta có:

$$g(n + g(m)) = g(n + f(m) - 4025) = f((n - 4025) + f(m)) - 4025$$
$$= f(n - 4025 + 2012) + 2013 + m - 4025$$
$$= g(n - 2013) + m + 2013$$

ta được $g(n + g(m)) = g(n - 2013) + m + 2013$ (1).

+ Suy ra

$$g(g(n + g(m))) = g(m + 2013 + g(n - 2013))$$
$$= g(m) + n - 2013 + 2013 = n + g(m)$$

ta được $g(g(n + g(m))) = n + g(m)$ (2).

Thay $m = 0$ và $n$ bởi $n - g(0)$ vào (2) ta được $g(g(n)) = n$ (3); $\forall n \in \mathbb{Z}$.

+ Từ (1) và (3) ta có

$$g(n + m) = g(n + g(g(m))) = g(n - 3013) + g(m) + 2013.$$

Tương tự $g(m + n) = g(m - 3013) + g(n) + 2013$.

Suy ra $g(n) - g(n - 2013) = g(m) - g(m - 2013) = C$ (C là hằng số).

Suy ra $g(n + m) = g(n) + g(m) + 2013 - C$

hay $g(n + m) = g(n) + g(m) - g(0)$.

+ Đặt $h(n) = g(n) - g(0)$ ta có $h(n + m) = h(n) + h(m)$,

nên bằng quy nạp ta chứng minh được $h(n) = an$ với $a = h(1)$.

Suy ra $g(n) = an + b$, thay vào (1) và đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 2013(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; b = 0 \\ a = -1; b = -4026 \end{array}\right..$$

Ta được $g(n) = n; \forall n \in \mathbb{Z}$, $g(n) = -n - 4026; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $f(n) = n + 4025; \forall n \in \mathbb{Z}$ hoặc $f(n) = -n - 1; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Thử lại ta thấy hai hàm số này thỏa mãn đề bài.

Vậy, $f(n) = n + 4025; \forall n \in \mathbb{Z}$ hoặc $f(n) = -n - 1; \forall n \in \mathbb{Z}$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

**Câu 1.**

Điều kiện: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + 2y \geqslant 0 \\ 2x - y \geqslant 0 \\ x^2 + 2y - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x \geqslant y \\ x^2 + 2y - 1 \geqslant 0 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2y} - \sqrt{3y} + \sqrt{2x-y} - \sqrt{x} + x^2y - y^2x = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}} + \frac{1}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}} + xy\right) = 0 \Leftrightarrow y = x$$

(Do biểu thức trong ngoặc luôn dương với x, y thỏa mãn (*)).

Với y = x , thay vào (2) ta được:

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right) - 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} - 4x = 0 (3)$$

Đặt $u = \sqrt{x^2+2x-1}, u \geqslant 0$

Phương trình (3) trở thành: $u^2 - 2(1-x)u - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2 \\ u = -2x \end{array}\right.$

+) $u = -2x$ (loại)

+) $u = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x-1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{6} \\ x = -1+\sqrt{6} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được nghiệm của hệ phương trình:

$$x = y = -1 + \sqrt{6}.$$

**Câu 2.**

a) Gọi H là hình chiếu của I trên AB thì $AH = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Ta có: $r = \dfrac{S}{p}$, $R = \dfrac{abc}{4S} \Rightarrow 4rR = \dfrac{2abc}{a+b+c}$.

Do đó $bc - 4rR = bc - \dfrac{bc(b+c-a)}{a+b+c}$ (1)

Mặt khác

$$IA^2 = \frac{AH^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{2AH^2}{1+\cos A} = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} \text{ (sử dụng định lí côsin) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Tương tự câu a) ta có hai đẳng thức còn lại đối với $IB^2$ và $IC^2$.

Trong tam giác ABC ta có hệ thức quen thuộc $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (3)

Bình phương vô hướng hai vế của (3) ta có

$$a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA} = 0 \text{ (4)}$$

Thay $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IA.IB\cos(90^0 + \frac{C}{2}) = -IA.IB\sin\frac{C}{2}$ và các hệ thức tương tự cùng với ước lượng:

$2IA.IB \leqslant IA^2 + IB^2 = c(a+b) - 8rR$ và các ước lượng tương tự

Chuyển vế ba số hạng sau của (4) qua vế phải và sử dụng câu a) và các đánh giá ở trên ta có đpcm.

**Câu 3.**

Ta có: $2P = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc = a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 2abc)$

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geqslant \frac{3}{4} \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

- Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$

Ta có tích của ba thừa số

$(2a-1)(2b-1)$, $(2b-1)(2c-1)$, $(2c-1)(2a-1)$ là $(2a-1)^2(2b-1)^2(2c-1)^2$ không âm nên có ít nhất một trong ba thừa số trên không âm.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$(2a-1)(2b-1) \geqslant 0 \Rightarrow 4ab \geqslant 2(a+b) - 1$

$$\Rightarrow 4ab \geqslant 2\left(\frac{3}{2} - c\right) - 1 = 2 - 2c \Rightarrow 2ab \geqslant 1 - c \Rightarrow 2abc \geqslant (1-c)c$$

Do đó: $Q = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2 + c^2 + (1-c)c$

$$= \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - c)^2 + c = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - 3c + c^2\right) + c$$

$$= \frac{1}{8}(4c^2 - 4c + 9) = \frac{1}{8}\left[(2c-1)^2 + 8\right] \geqslant 1 \qquad (2)$$

$Q = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 2c - 1 = 0 \\ a = b \\ a + b + c = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra $2P = P + Q \geqslant \dfrac{7}{4} \Rightarrow P \geqslant \dfrac{7}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{8}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

**Câu 4.**

Với số nguyên dương $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ với $p_i$ là các số nguyên tố $\forall i = 1,2,...,m$, $p_i \neq p_j$ nếu $i \neq j$ thì số các ước số nguyên dương của n là $\prod_{i=1}^{m}(\alpha_i + 1)$.

Do $24 = 2^3.3$ nên 24 có 8 ước số nguyên dương là 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Từ đó và do n có đúng 24 ước số nguyên dương nên hoặc $n = 2^7.3^2$, $n = 2^3.3^5$, $n = 2^5.3^3$ và $n = 2^{12}.3$ hoặc $n = 2^3 3p^2$ hoặc $n = 2^3 3^2 p$ với p là số nguyên tố lớn hơn 24.

- Bằng cách thử trực tiếp khi $n = 2^3.3^5$ hoặc $n = 2^7.3^2$ hoặc $n = 2^5.3^3$ hoặc $n=2^{12}.3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $n = 2^3 3^2 p$ $(p > 24)$ thì $d_8 = 12 \neq 24$ nên cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $n = 2^3 3p^2$ thì p không thể nhỏ hơn 24.

+ Nếu $24 < p < 48 \Rightarrow d_9 = p$, $d_{10} = 2p$, suy ra $d_{10} - d_9 = 2p - p = 31 \Rightarrow p = 31$.

Thử lại $n = 2^3.3.31^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p > 48$ thì $d_9 = p$, $d_{10} = 2p \Rightarrow d_{10} - d_9 = 2p - p = p = 31$ (loại)

Vậy tồn tại duy nhất số n nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2^3.3.31^2$.

**Câu 5.**

Số tập con có 5 phần tử của X là $C_{15}^5 = 3003$.

Vì $3003 > 3000$ nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại hai tập con M, N có 5 phần tử của X sao cho $S_M - S_N \equiv 0 \pmod{3000}$

Đặt $A = M \setminus (M \cap N)$

$B = N \setminus (M \cap N)$

Khi đó A, B đều khác rỗng và thỏa mãn

$$|A| = |B| \leqslant |M| = 5, A \cap B = \varnothing$$

$$S_A - S_B \equiv S_M - S_N = 0 \pmod{3000}$$

Vậy tồn tại hai tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6.**

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán..

Trong (1), cho m = 0, ta có: $f\left(f\left(n\right)\right) = f\left(n\right) + 2n + 2 \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

Ta chứng minh f là đơn ánh.

Giả sử tồn tại $n_1, n_2$ sao cho $f\left(n_1\right) = f\left(n_2\right)$

$$\Rightarrow f\left(f\left(n_1\right)\right) = f\left(f\left(n_2\right)\right) \Rightarrow f(n_1) + 2n_1 + 2 = f\left(n_2\right) + 2n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

Do đó f là đơn ánh.

- Đặt $f(0) = a$

Trong (1) cho n=0 ta có:

$$f\left(m + f\left(0\right)\right) = f(m) + 2 \Rightarrow f(m + a) = f(m) + 2 \forall m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Áp dụng (3) và (1) ta có:

$$f(m + f\left(n\right)) = f\left(m + n\right) + 2n + 2 = \left[f\left(m + n\right) + 2\right] + 2n$$

$$= f\left(m + n + a\right) + 2n = \left[f\left(m + n + a\right) + 2\right] + 2(n - 1)$$

$$= \ldots = f\left[\left(m + n\right) + \left(n + 1\right)a\right] \forall m,n \in \mathbb{N}$$

Do f là đơn ánh nên suy ra

$$m + f\left(n\right) = m + n + (n + 1)a \Rightarrow f(n) = (a + 1)n + a \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta có:

$$f\left(m + \left(a + 1\right)n + a\right) = \left(a + 1\right)(m + n) + a + 2n + 2$$

$$\Rightarrow \left(a + 1\right)\left[m + \left(a + 1\right)n + a\right] + a = \left(a + 1\right)m + (a + 1)n + a + 2n + 2$$

$$\Rightarrow \left(a + 1\right)^2 n - \left(a + 3\right)n = -a^2 - a + 2 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \left(n + 1\right)\left(a^2 + a - 2\right) = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -2 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow f(n) = 2n + 1.$$

Thử lại $f(n) = 2n + 1$ (thỏa mãn).

Vậy $f(n) = 2n + 1$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN

**Câu 1.**

Điều kiện: $x^3+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.

Đặt $u=\sqrt{x^3+1} \geqslant 0 \Rightarrow u^2 = x^3+1$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$(4x-1)u = 2(x^3+1)+2x-1 \quad \Leftrightarrow 2u^2-(4x-1)u+2x-1=0$$

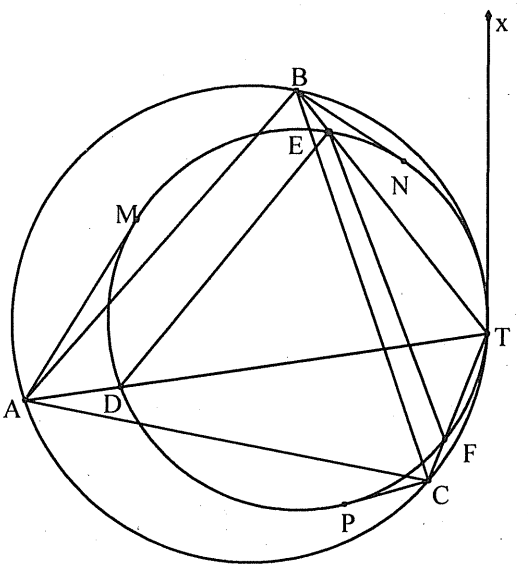
Ta có $\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2$

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{2} \\ u=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+1=\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ x^3+1=(2x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}};2\right\}$.

**Câu 2.**




Gọi T là tiếp điểm của (O) và (O');

ABC là tam giác đều nội tiếp (O);

M, N, P lần lượt là một trong hai tiếp điểm xuất phát từ A, B, C;

D, E, F lần lượt là giao của AT, BT, CT với (O').

Không mất tổng quát ta giả sử A và T nằm khác phía so với BC.

Ta có DE//AB vì $\widehat{BAT} = \widehat{EDT} = \widehat{BTx}$.

Tương tự, ta có: DF//BC, FD//CA.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BE}{AD} = \dfrac{BT}{AT} \\ \dfrac{CF}{AD} = \dfrac{CT}{AT} \end{cases}$$

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác ABTC nội tiếp trong (O), ta có:

$$AT.BC = AB.CT + AC.BT$$

Mà BC = AB = AC nên ta có: AT = BT + CT

Ta lại có:

$$\begin{cases} AM^2 = AD.AT \\ BN^2 = BE.BT \\ CP^2 = CF.CT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BN^2}{AM^2} = \dfrac{BE}{AD}.\dfrac{BT}{AT} = \dfrac{BT^2}{AT^2} \\ \dfrac{CP^2}{AM^2} = \dfrac{CF}{AD}.\dfrac{CT}{AT} = \dfrac{CT^2}{AT^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BN}{AM} = \dfrac{BT}{AT} \\ \dfrac{CP}{AM} = \dfrac{CT}{AT} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BN + CP}{AM} = \frac{BT + CT}{AT} = 1 \Rightarrow AM = BN + CP.$$

và không mất tính tổng quát nên ta suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3.**

Ta sử dụng kết quả: $AB \leqslant \frac{1}{4}(A + B)^2$

Đặt: $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{b} \Rightarrow 0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta.$

Khi đó: $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha\beta \leqslant \alpha + \beta.$

Ta có: $(ax + by + cz)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = b\left(\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b}z\right).\frac{1}{b}\left(\frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z\right)$

$$= (\alpha x + y + \beta z)\left(\frac{1}{\alpha}x + y + \frac{1}{\beta}z\right) = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha x + y + \beta z)(\beta x + \alpha\beta y + \alpha z)$$

$$\leqslant \frac{1}{4\alpha\beta}\left[(\alpha + \beta)x + (1 + \alpha\beta)y + (\alpha + \beta)z\right]^2$$

$$\leqslant \frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha\beta}(x + y + z)^2 = \frac{(a + c)^2}{4ac}(x + y + z)^2$$

**Câu 4.**

Ta có $7^x - 3^y$ là số chẵn nên $x^4 + y^2$ cũng là số chẵn.

Nếu x, y cùng lẻ thì $x^4 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$, trong khi

$$7^x - 3^y = 7 - 3 = 0 \pmod 4 \text{ (vô lí).}$$

Do đó $x = 2u, y = 2v\ (u,v \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 7^x - 3^y = \dfrac{7^u - 3^v}{2}.2\left(7^u + 3^v\right)$.

Suy ra $x^4 + y^2 = 2(8u^4 + 2v^2) \vdots 2(7^u + 3^v) \Rightarrow 7^u + 3^v \leqslant 8u^4 + 2v^2$.

Dễ dàng chứng minh được: nếu $u \geqslant 4$ thì $7^u \geqslant 8u^4$ và $3^v > 2v^2$ (mâu thuẫn).

Vì thế $u \in \{1;2;3\}$.

+ Với $u = 1$ ta có: $8 + 2v^2 \vdots 7 + 3^v$.

Nếu $v \geqslant 3$ thì $8 + 2v^2 < 7 + 3^v$ (vô lí). Vì thế $v \leqslant 2$.

- Với $v = 1 \Rightarrow (x,y) = (2,2)$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $v = 2 \Rightarrow (x,y) = (2,4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $u = 2 \Rightarrow x = 4$, ta có:

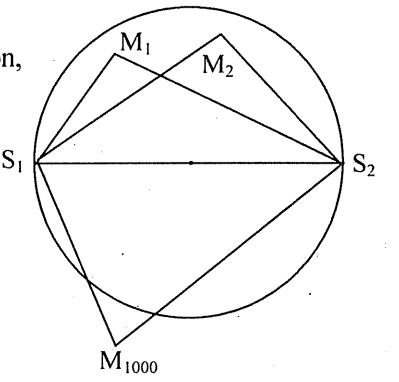
$\left|7^4 - 3^v\right| = \left|49 - 3^v\right|\left(7^2 + 3^v\right) \geqslant 22\left(7^2 + 3^v\right) > 4^4 + 4v^2 = x^4 + y^2$ (mâu thuẫn).

+ Với $u = 3 \Rightarrow x = 6$, ta có:

$\left|7^6 - 3^v\right| = \left|343 - 3^v\right|\left(7^3 + 3^v\right) \geqslant 100\left(7^3 + 3^v\right) > 6^4 + 4v^2 = x^4 + y^2$ (mâu thuẫn).

Vậy $(x,y) = (2,4)$.

**Câu 5.**




Xét đường đường kính $S_1S_2$ bất kì của đường tròn, ở đây $S_1$ và $S_2$ là hai đầu của đường kính.

Vì $S_1S_2 = 2$, nên ta có:

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 \geqslant S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 \geqslant 2 \\ \ldots \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \geqslant 2 \end{cases}$$

Cộng từng vế 1000 bất đẳng thức trên ta có

$$\left(S_1M_1 + S_1M_2 + \ldots + S_1M_{1000}\right) + \left(S_2M_1 + S_2M_2 + \ldots + S_2M_{1000}\right) \geqslant 2000 \ (*)$$

Từ (*) và theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái (*), có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

Giả sử $\left(S_1M_1 + S_1M_2 + \ldots + S_1M_{1000}\right) \geqslant 1000$, khi đó lấy $S = S_1$.

**Câu 6.**

- Cho $x = y = 1$. Thay vào (*), ta được

$$4f(1) = \frac{f(1)}{f(2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ta sẽ loại $f(1) = 0$ vì $f(x) \in \mathbb{Q}^+, \forall x \in \mathbb{Q}^+$.

Vậy ta có $f(1) = \frac{1}{4}$.

- Cho $x = y = 2$. Thay vào (*), ta được

$$2f(2) + 8f(4) = \frac{f(4)}{f(4)} = 1 \Leftrightarrow 2.\frac{1}{4} + 8.f(4) = 1 \Leftrightarrow f(4) = \frac{1}{16}$$

- Cho $x = 2$ và $y = 1$. Thay vào (*), ta được

$$f(2) + f(1) + 2.2.1.f(2) = \frac{f(2)}{f(3)} \Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{5 + 4f(1)}$$

- Cho $x = 3$ và $y = 1$. Thay vào (*), ta được

$$f(3) + f(1) + 2.3.1.f(3) = \frac{f(3)}{f(4)} \Leftrightarrow 7.f(3) + f(1) = 16f(3) \Leftrightarrow f(1) = \frac{9}{5 + 4.f(1)}$$

$$\Leftrightarrow 4\left[f(1)\right]^2 + 5.f(1) - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -\frac{9}{4} \end{array}\right.$$

Ta sẽ loại $f(1) = -\frac{9}{4}$ vì $f(x) \in \mathbb{Q}^+, \forall x \in \mathbb{Q}^+$. Vậy ta có $f(1) = 1$

- Cho $y = 1$. Thay vào (*), ta được

$$f(x) + f(1) + 2x.f(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} \Leftrightarrow f(x).(2x+1) + 1 = \frac{f(x)}{f(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x+1)} = 2x + 1 + \frac{1}{f(x)}$$

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$\frac{1}{f(x+n)} = 2nx + n^2 + \frac{1}{f(x)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ (**)$$

Thật vậy, giả sử (**) đúng với $n \leqslant k$, nghĩa là ta có

$$\frac{1}{f(x+n)} = 2nx + n^2 + \frac{1}{f(x)} \quad \forall n \leqslant k, \ n,k \in \mathbb{N}^*$$

Ta sẽ chứng minh (**) đúng với $n = k + 1$

$$\frac{1}{f(x+n+1)} = 2(x+n)+1+\frac{1}{f(x+n)} = \frac{1}{f(x)} + 2nx + n^2 + 2x + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{f(x)} + 2(n+1)x + (n+1)^2.$$

Vậy: $\dfrac{1}{f(x+n)} = 2nx + n^2 + \dfrac{1}{f(x)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Cho $x = n$ và $y = 1$. Thay vào (*), ta được

$$f(n) + f(1) + 2n.f(n) = \frac{f(n)}{f(n+1)} \Leftrightarrow f(n).(1+2n) + f(1) = f(n).\frac{1}{f(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f(n).(1+2n) + 1 = f(n).\left(\frac{1}{f(1)} + 2n + n^2\right)$$

$$\Leftrightarrow f(n).(1+2n) + 1 = f(n).(1+2n+n^2)$$

$$\Leftrightarrow f(n).(1+2n+n^2-1-2n) = 1 \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{n^2}.$$

- Cho $y = n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (*), ta được

$$f(x) + f(n) + 2xn.f(nx) = \frac{f(nx)}{f(x+n)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{n^2} = f(nx).\left(\frac{1}{f(x+n)} - 2nx\right) = f(nx).\left(\frac{1}{f(x)} + 2nx + n^2 - 2nx\right)$$

$$= f(nx)\left(\frac{1}{f(x)} + n^2\right) \Leftrightarrow f(n) = \frac{f(x) + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{f(x)} + n^2} \quad (***)$$

- Cho $x = \dfrac{p}{n}$ với $n, p \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (***), ta được

$$f\left(n.\frac{p}{n}\right) = \frac{f\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{f\left(\frac{p}{n}\right)} + n^2} \Leftrightarrow f(p) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{f\left(\frac{p}{n}\right)}} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{f\left(\frac{p}{n}\right)}{n^2} \Leftrightarrow f\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{n^2}{p^2} = \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)^2}.$$

Vậy: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN

**Câu 1.**

Phương trình có nghĩa khi $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Đặt $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ , $0 \leqslant y \leqslant 1$ ta có $\sqrt{x} = 1 - y^2, x = \left(1-y^2\right)^2$

Ta có: $\left(1-y^2\right)^2 = \left(2014 - y^2\right)\left(1-y\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(1-y\right)^2\left(y^2 + y - \dfrac{2013}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ (vì $y^2 + y - \dfrac{2013}{2} < 0$ với $0 \leqslant y \leqslant 1$)

Ta có: $y = 0$ nên $x = 0$.

**Câu 2.**

Gọi D là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với AO.

Ta dễ chứng minh BHCD là hình bình hành (1)

Ta có BEHD, CFHD nội tiếp nên $\widehat{HBD} = \widehat{DEH}$; $\widehat{HCD} = \widehat{DFH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

**Câu 3.**

Ta có: $\sqrt{\left(a+2b+3c\right)\left(3a+b+c\right)} \leqslant \dfrac{4a+3b+4c}{2}$.

Suy ra: $P \leqslant \left(\dfrac{4.2013 - b}{2}\right)^2 \Rightarrow P \leqslant 4.2013^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = c = \dfrac{2013}{2}; b = 0$.

Vậy $4.2013^2$ là giá trị lớn nhất của P.

**Câu 4.**

Ta thấy trong số P mỗi số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 xuất hiện xuất hiện 20 lần; số 1 xuất hiện 21 lần

Tổng các chữ số của P là $(2+3+4+5+6+7+8+9).20 + 1.21 = 901$.

Như vậy P không chia hết cho 3 và hiển nhiên không chia hết cho 2013

**Câu 5.**

Tô màu sàn nhà bởi 2 màu đen trắng sao cho các ô ở hàng lẻ tô màu đen, các ô ở hàng chẵn tô màu trắng.

Suy ra số ô đen nhiều hơn số ô trắng là 2013 ô.

Giả sử ta lát được theo yêu cầu của bài toán.

Vì mỗi viên $4 \times 4$ phủ 8 ô trắng, 8 ô đen; mỗi viên $5 \times 5$ phủ 15 ô trắng (đen), 10 ô đen (trắng) nên số ô đen và số ô trắng chênh nhau một số chia hết cho 5 (mâu thuẫn).

Vậy không thể lát được theo yêu cầu bài toán.

**Câu 6.**

Với $m = 1$ ta có: $f(n+1) = f(1) + f(n) + 2013n = f(n) + 2013(n+1)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Ta dự đoán $f(n) = \dfrac{2013(n+1)n}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh được dự đoán trên bằng quy nạp.

Thử lại, ta thấy hàm số trên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN

**Câu 1.**

Điều kiện $\begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ x + 2y + 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Phương trình thứ nhất được viết lại theo phương trình bậc hai đối với x.

$$x^2 - (y^2 + 4)x + 2y^3 - 4y^2 + 8y = 0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = (y^2 + 4)^2 - 4(2y^3 - 4y^2 + 8y) = (y^2 - 4y + 4)^2$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y^2 + 4 - y^2 + 4y - 4}{2} = 2y \\ x = \dfrac{y^2 + 4 + y^2 - 4y + 4}{2} = y^2 - 2y + 4 \geqslant 3 \qquad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Thế $y = \dfrac{x}{2}$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{2x+3} = 4x^2 - 4x + \frac{7}{2} \ (2).$$

Ta có:

*) $4x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} = (2x-1)^2 + \dfrac{5}{2} \geqslant \dfrac{5}{2}, \forall x$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

*) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + \sqrt{2x+3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-2x} + \sqrt{2x+3} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1}.\sqrt{5} = \dfrac{5}{2}$,

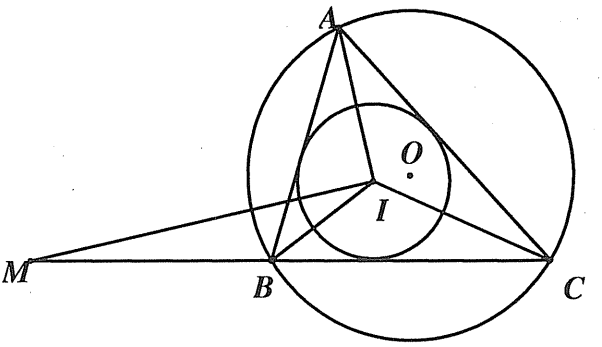
$\forall x \in [-\dfrac{3}{2};1]$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{2-2x} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + \sqrt{2x+3} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $y = \frac{1}{4}$, thỏa mãn các điều kiện nói trên.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

**Câu 2.**




Giả sử AB < AC suy ra M nằm trên tia đối của tia BC,

$$\angle AIB = 90^0 + \frac{C}{2} \Rightarrow \angle MIB = \frac{C}{2} = \angle MCI$$

Suy ra tam giác MIB đồng dạng với tam giác MIC, suy ra $MI^2 = MB.MC$.

Suy ra M nằm trên trục đẳng phương $d$ của (O) và đường tròn điểm tâm I.

Rõ ràng $d$ vuông góc với OI.

Tương tự, ta cũng chứng minh được N, P thuộc $d$.

**Câu 3.**

Ta có: $S = \dfrac{bc + a^2 - b\sqrt{a^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$

$$= \frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} + \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} =$$

$$= \frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} + \frac{-b(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+c^2}} \text{ (vì } c > b).$$

Vì ba số a, b, c khác không nên trong hệ trục tọa độ Oxy chọn ba điểm không trùng gốc O: $A(0;a), B(b;0), C(c;0)$, với $b < c$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (b;-a)$, $\overrightarrow{AC} = (c;-a)$, $\overrightarrow{BC} = (c-b;0)$.

Xét tam giác ABC, ta có:

$$\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}},$$

$$\cos B = \cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{-b(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos C = \cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \frac{c(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Suy ra: $S = \dfrac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} + \dfrac{-b(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{c(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+c^2}}$

$= \cos A + \cos B + \cos C.$

Mặt khác, ta chứng minh được bất đẳng thức quen thuộc: Trong tam giác ABC bất kì, ta luôn có:

$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \dfrac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy $S = \dfrac{bc + a^2 - b\sqrt{a^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leqslant \dfrac{3}{2}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC \\ OB = OC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ b = -c \\ a = \pm\sqrt{3}c \end{cases}$$

Vậy $\max S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

**Câu 4.**

Vì $n$ chẵn là hiển nhiên nên ta chỉ cần xét $n$ lẻ. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của n ra tích các thừa số nguyên tố.

Do $n$ lẻ nên các $p_i$ lẻ, $i = 1,2,...,k$.

Vì vậy $p_i = 2^{s_i}m_i + 1$ với $m_i$ lẻ và $s_i \geqslant 1$, $\forall i = 1, 2, ..., k$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $s_1 = \min\limits_{i=\overline{1,k}} s_i$.

Ta có: $p_i^{\alpha_i} = \left(2^{s_i}m_i + 1\right)^{\alpha_i} = 2^{s_i}M_i + 1$.

Suy ra: $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k} = \prod\limits_{i=1}^{k}(2^{s_i}M_i + 1) = 2^{s_1}M + 1$.

Giả sử tồn tại $n$ sao cho $n \mid 2^{n-1} + 1$ tức là $2^{n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, suy ra

$2^{n-1} \equiv -1 \pmod{p_1}$, vì vậy $2^{m_1(n-1)} \equiv -1 \pmod{p_1}$ (vì $m_1$ lẻ).

Mà $2^{m_1(n-1)} = 2^{2^{s_1} m_1 M} = 2^{(p_1-1)M} \equiv 1 \pmod{p_1}$, mâu thuẫn.

Vậy $2^{n-1}+1$ không chia hết cho $n$.

**Câu 5.**

Theo giả thiết $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ với: $x_1 < 0 < x_2 < 2013$.

Suy ra: $f(2013) > 0 \Leftrightarrow 2013^2 - 2013m - n > 0 \Leftrightarrow n < 2013^2 - 2013m$.

Ta cũng có: $x_1 + x_2 < x_2 < 2013 \Rightarrow m < 2013$ (vì $x_1 < 0$)

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1;2;3;...;2012\}$.

Khi $m = 1$ thì $n \in \{1;2;3;...;2013^2 - 2013 - 1\}$:

ta có $2013^2 - 2013 - 1$ tam thức $f(x)$.

Khi $m = 2$ thì $n \in \{1;2;3;...;2013^2 - 2.2013 - 1\}$:

ta có $2013^2 - 2.2013 - 1$ tam thức $f(x)$

Khi $m = 3$ thì $n \in \{1;2;3;...;2013^2 - 3.2013 - 1\}$:

ta có $2013^2 - 3.2013 - 1$ tam thức $f(x)$.

.....

.....

Khi $m = 2012$ thì $n \in \{1;2;3;...;2013^2 - 2012.2013 - 1\}$:

ta có $2013^2 - 2012.2013 - 1$ tam thức $f(x)$.

Tổng số những tam thức $f(x)$ có được là:

$S = (2013^2 - 1).2012 - 2013(1 + 2 + 3 + ... + 2012) = 4076480002$.

**Câu 6.**

Đặt $a = f(0)$, từ giả thiết ta có $f(m + f(0)) = f(m)$

hay $f(m + a) = f(m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Giả sử $a > 0$. Khi đó $f$ là hàm tuần hoàn và

$f(\mathbb{N}) = \{f(0),...,f(a-1)\}$.

Đặt $M = \max\{f(0),...,f(a-1)\}$, khi đó $f(n) \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ giả thiết, thay $m = 0$, ta được $f(f(n)) = n + a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, suy ra

$f(f(M)) = M + a \leqslant M$, vô lí.

Vậy $a = 0$.

Từ đó, suy ra $f(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $b = f(1)$, nếu $b = 0$ thì $0 = f(0) = f(f(1)) = 1$, vô lí, vì vậy $b \neq 0$.

Ta lại có $1 = f(f(1)) = f(b)$.

Suy ra $f(n+1) = f(n + f(b)) = f(n) + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Kết hợp với $f(0) = 0$, suy ra $f(n) = bn$, do đó $f(f(n)) = b^2 n$.

Mà theo kết quả trên thì $f(f(n)) = n$ nên $b = 1$, vì vậy $f(n) = n$.

Thử lại, ta thấy f(n) thỏa mãn đề bài.

Vậy $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG CẦN THƠ

**Câu 1.**

Từ (1), ta có $y\left(\frac{20}{x^2} + 11\right) = 2013 \Rightarrow y > 0$.

Tương tự, từ (2) và (3) $\Rightarrow z > 0, x > 0$.

Do hệ hoán vị vòng quanh nên ta giả sử $x = \max\{x; y; z\}$, nghĩa là $x \geq y, x \geq z$.

Trừ vế với vế của (3) cho (1), ta được

$$20\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 11(x - y) = 0 \Leftrightarrow 20(x^3 - yz^2) + 11x^2z^2(x - y) = 0 \quad (4).$$

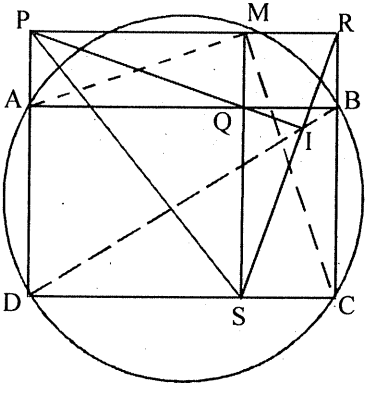
Vì $x \geq y > 0, x \geq z > 0$ nên dễ thấy $x - y \geq 0$ và $x^3 - yz^2 \geq 0$.

Do đó (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$

Thay vào (1), ta được $\frac{20}{x} + 11x = 2013 \Leftrightarrow 11x^2 - 2013x + 20 = 0$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ.

**Câu 2.**



a) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{SR} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ})(\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MR})$

$= \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MR}$

$= PM.MR.\cos 180^0 + MQ.SM.\cos 0^0 = 0$

$\Rightarrow SR \perp PQ$

b) Do $PQ \perp RS$ nên 5 điểm M, R, B, I, Q thuộc đường tròn đường kính $QR$.

Suy ra $\widehat{RIB} = \widehat{RQB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung RB)

Tương tự: 5 điểm P, M, I, S, D thuộc đường tròn đường kính $PS$.

Suy ra $\widehat{SID} = \widehat{PSM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau $PM, DS$)

Do $MS \perp PR$ (tại $M$) và $PQ \perp RS$ nên $Q$ là trực tâm của $\Delta PRS$.

Do đó $PS \perp QR$ suy ra $\widehat{PSM} = \widehat{BQR}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{RIB} = \widehat{SID}$

Mà R, I, S thẳng hàng nên suy ra D, I, B thẳng hàng.

Suy ra $I$ thuộc đường chéo $BD$.

**Câu 3.**

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}.1.1....1} \leqslant \frac{1}{k}\left[\frac{k+1}{k} + (k-1)\right] = 1 + \frac{1}{k^2}$$

Dấu "=" không thể xảy ra nên: $\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$VT < 1 + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) + ... + \left(1 + \frac{1}{2013^2}\right)$$

$$= 2013 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2013^2}$$

$$< 2013 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + .... + \frac{1}{2012.2013}$$

$$= 2013 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right)$$

$$= 2013 + \left(1 - \frac{1}{2013}\right) < 2014 \text{ (đpcm)}$$

**Câu 4.**

Đặt: $x = m + \alpha$; $y = n + \beta$, với $m, n \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \alpha, \beta < 1$

$\Rightarrow x + y = m + n + \alpha + \beta$; $[x + y] = m + n + [\alpha + \beta]$;

$2[x + y] = 2m + 2n + 2[\alpha + \beta]$

$3x = 3m + 3\alpha$; $3y = 3n + 3\beta$; $[3x] + [3y] = 3m + 3n + [3\alpha] + [3\beta]$

$2[x + y] + [x] + [y] = 3m + 3n + 2[\alpha + \beta]$.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $[3\alpha] + [3\beta] \geqslant 2[\alpha + \beta]$ (*)

Ta có: $0 \leqslant \alpha + \beta < 2$

1. $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ : (*) đúng

2. $1 \leqslant \alpha + \beta < 2$ thì $[\alpha + \beta] = 1$

a) Nếu có $\alpha$ hay $\beta$, giả sử đó là $\alpha \geqslant \frac{2}{3}$ thì $[3\alpha] = 2$ : (*) đúng

b) Nếu cả hai số $\alpha, \beta$ đều nhỏ hơn $\frac{2}{3}$, tức là $1 \leqslant \alpha + \beta < \frac{4}{3}$, lúc đó: $\alpha, \beta \geqslant \frac{1}{3}$, vì ngược lại thì $\alpha + \beta < 1$, vô lí

Vậy $\alpha, \beta \geqslant \frac{1}{3}$, suy ra $[3\alpha] + [3\beta] = 2$ (*) đúng

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Xét phân tích tiêu chuẩn ra tích các thừa số nguyên tố của tử số và mẫu số trong phân số đã cho.

Số mũ của số nguyên tố p trong phân tích $A = (3m)!(3n)!$ là:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{3m}{p^k}\right] + \left[\frac{3n}{p^k}\right]\right)$$

Số mũ của số nguyên tố p trong phân tích của $B = [(m + n)!]^2.m!n!$ là

$$\beta = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(2\left[\frac{m + n}{p^k}\right] + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

Theo trên ta có: $\alpha \geqslant \beta$ nên $\dfrac{(3m)!(3n)!}{((m + n)!)^2 m!n!}$ là số nguyên.

**Câu 5.**

Ta đánh số các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ tương ứng với các chỉ số 1, 2,..., n.

Trước hết, ta đếm các tứ giác thỏa mãn yêu cầu của bài toán có đỉnh $A_1$.

Các đỉnh $A_2$, $A_n$ sẽ không được chọn vì $A_1A_2$, $A_1A_n$ là các cạnh của đa giác.

Ta cần chọn thêm 3 đỉnh tương ứng với bộ ba số (a, b, c) thỏa mãn tính chất: $5 \leqslant a + 2 < b + 1 < c \leqslant n - 1$ (do giữa 2 đỉnh phải có ít nhất 1 đỉnh).

Vậy số cách chọn 3 đỉnh bằng số cách chọn 3 số phân biệt trong n – 5 số từ 5 đến n – 1. Suy ra số tứ giác đỉnh $A_1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán bằng $C_{n-5}^3$

Vì có n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của tứ giác là $\frac{nC_{n-5}^3}{4}$.

Theo giả thiết: $\frac{nC_{n-5}^3}{4} = 25$. Suy ra $\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{6.4} = 25$

Vậy n(n – 5)(n – 6)(n – 7) = 600, suy ra n = 10.

Kết luận n = 10.

**Câu 6.**

Giả sử có hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dễ dàng chứng minh hàm số f là đơn ánh

Từ điều kiện của bài toán:

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Cho $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = -y \ \forall y \in \mathbb{Q}$ (*)

Thay y bởi f(y) và do (*) ta có $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x,y \in \mathbb{Q}$

Suy ra $f(x) = kx \ \forall x \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{R}$

Thay f(x) vào điều kiện bài toán ta được

$$f(x+ky) = kx - y \Rightarrow kx + k^2y = kx - y \Rightarrow k^2 = -1$$

Điều này vô lí. Vậy không tồn tại hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU ĐỒNG THÁP

**Câu 1.**

(1) $\Leftrightarrow \sin\pi(x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y = k, k \in \mathbb{Z}$.

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)^2 + \left(x^2+y^2\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = -1 \text{ (loại)} \\ x^2+y^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$x^2+y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = \frac{2k^2-1}{4}$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ x + y = k \\ xy = \frac{2k^2-1}{4} \end{cases}$

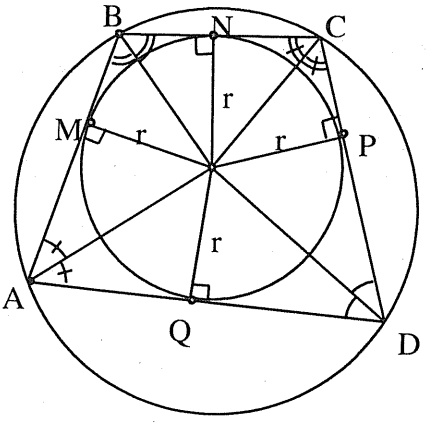
Hệ phương trình có nghiệm khi

$$\begin{cases} S^2 - 4P \geqslant 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4.\left(\dfrac{2k^2 - 1}{4}\right) \geqslant 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 1 \leqslant 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ k^2 - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \{-1;\ 0;\ 1\}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

**Câu 2.**




Gọi $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, khi đó ta có: $S = p.r$.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA với đường tròn nội tiếp, ta có:

$$p = BM + CN + DP + QA = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{D}{2} + \cot\frac{A}{2}\right).$$

Vì ABCD còn là tứ giác nội tiếp, nên: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$.

Suy ra

$$p = r\left(\tan\frac{A}{2} + \cot\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) = r\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)$$

$$= 2r\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right) \geqslant 2r.\frac{4}{\sin A + \sin B} \geqslant \frac{4r}{\sin\frac{A+B}{2}} \geqslant 4r$$

Suy ra $r \leqslant \frac{p}{4} \Rightarrow S \leqslant \frac{p^2}{4}$.

**Câu 3.**

Ta có $(3x+4y)(4x+3y) = 12(x^2+y^2)+25xy$

$$\leqslant 12(x^2+y^2)+25\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=\frac{49}{2}(x^2+y^2)$$

Tương tự:

$$(3y+4z)(4y+3z) \leqslant \frac{49}{2}(y^2+z^2);\ (3z+4x)(4z+3x) \leqslant \frac{49}{2}(x^2+z^2)$$

Suy ra $P \geqslant \frac{2}{49}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)$

Theo bất đẳng thức Nesbit, ta có $\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2} \geqslant \frac{3}{2}$

Suy ra $P \geqslant \frac{2}{49}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right) \geqslant \frac{2}{49}.\frac{3}{2}=\frac{3}{49}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{3}{49}$ khi $\begin{cases} x=y=z \\ x^2=y^2=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z>0$

**Câu 4.**

Từ giả thiết ta có $a > 2013$, do đó ta viết $a = 2013+k$ (với $k \in \mathbb{Z}^+$)

Khi đó ta có $\frac{1}{b}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2013+k}=\frac{k}{2013(2013+k)}$

$\Rightarrow b = 2013+\frac{(2013)^2}{k}$

Vì $b$ là số nguyên dương nên $k$ là ước của $(2013)^2$

Ta có $b > a \Leftrightarrow 2013+\frac{(2013)^2}{k} > 2013+k \Leftrightarrow k < 2013$

Mặt khác $(2013)^2 = 3^2.11^2.61^2$

$\Rightarrow$ Số ước số của $(2013)^2$ là $(2+1)(2+1)(2+1)=27$ ước số nguyên dương.

Trong 27 ước số đó có 14 ước số nguyên dương lớn hơn 2013

Vậy có 13 ước số nguyên dương thỏa mãn đề bài hay có 13 cặp số nguyên dương a, b.

**Câu 5.**

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$ với $a \neq 0$.

Ta có $a.b.c.d.e.f = 8000 = 2^6.5^3$.

Vậy phải có ba chữ số bằng 5, ba chữ số còn lại phải có tích là $2^6 = 64$.

Khi đó ba chữ số còn lại là bộ $(2,4,8)$, $(4,4,4)$, $(1,8,8)$

Với bộ $(2,4,8,5,5,5)$ ta có: $\frac{6!}{3!}$ số thỏa mãn bài toán.

Với bộ $(4,4,4,5,5,5)$ ta có: $\frac{6!}{3!.3!}$ số thỏa mãn bài toán.

Với bộ $(1,8,8,5,5,5)$ ta có: $\frac{6!}{3!.2!}$ số thỏa mãn bài toán.

Vậy số các số cầm tìm là: $\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{3!.3!}+\frac{6!}{3!.2!}=200$.

**Câu 6.**

Thay $m=n=1:(1)\Rightarrow f\left(2f(1)\right)=2$

Thay $m=n:(1)\Rightarrow f\left(2f(n)\right)=n$

Ta chứng minh $f(1)=1$. Thật vậy, giả sử $f(1)=1+a\ \ \forall a\in\mathbb{Z}^+$

Khi đó $2f(a)+2f(1)=f\left[f\left(2f(a)\right)+f\left(2f(1)\right)\right]$

$$=f(2a+2)=f\left[2\left(f(1)-1\right)+2\right]=f\left(2f(1)\right)=2.$$

Suy ra $f(a)=1-f(1)=-a$ (mâu thẫn vì $f(a)\in\mathbb{Z}^+$)

Vậy $f(1)=1$

Ta chứng minh f(n) = n bằng quy nạp

Giả sử $f(n)=n$

$$f(n+1)=f\left(f(n)+f(1)\right)=n+1\ \ \Rightarrow f(n)=n,\ \ \forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

Vậy $f(2013)=2013$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN CÀ MAU

**Câu 1.**

Điều kiện $x\neq 0$.

Ta có: $\begin{cases}x^2+3x^2y=\dfrac{8}{x}\\ y^3-1=\dfrac{6}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8}{x^3}-3y=1\\ y^3-3.\dfrac{2}{x}=1\end{cases}$

Đặt $t=\frac{2}{x}$ $(t\neq 0)$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - 3y = 1 \\ y^3 - 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow (y - t)(y^2 + yt + t^2 + 3) = 0 \Rightarrow t = y$$

Do đó, $y^3 - 3y = 1$ (1)

Đặt $y = 2\cos\alpha$, với $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

$$(1) \Rightarrow 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn $\alpha = \frac{\pi}{9}; \alpha = \frac{5\pi}{9}; \alpha = \frac{7\pi}{9} \in [0;\pi] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2\cos\frac{\pi}{9} \\ y = 2\cos\frac{5\pi}{9} \\ y = 2\cos\frac{7\pi}{9} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{5\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\frac{7\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{7\pi}{9} \end{cases}.$$

**Câu 2.**

Giả sử $AB = 2$ và $O$ là trung điểm của đoạn $AB$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ sao cho tia $Ox$ trùng với tia $OB$ và tia $Oy$ trùng với tia $OC$.

Khi đó $A(-1;0), B(1;0), C(0;\sqrt{3}), I(0;-\sqrt{3})$ và phương trình đường tròn $(I)$ là

$$x^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 4.$$

Giả sử $M(m;n)$. Vì $M$ thuộc đường tròn $(I)$ nên:

$$m^2 + \left(n + \sqrt{3}\right)^2 = 4 \Rightarrow m^2 = 4 - \left(n + \sqrt{3}\right)^2.$$

Mặt khác: $MA^2 = (1 + m)^2 + n^2$

$MB^2 = (1 - m)^2 + n^2$

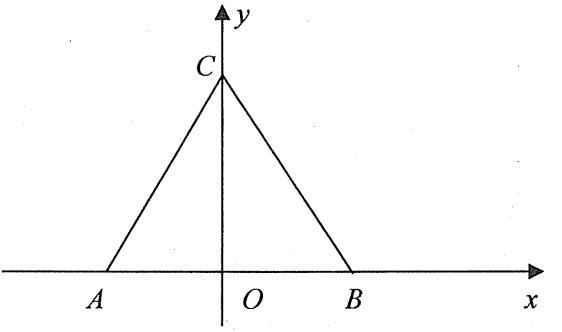
$MC^2 = m^2 + (\sqrt{3} - n)^2 = m^2 + n^2 - 2\sqrt{3}n + 3$

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 2m^2 + 2n^2 + 2$

$$= m^2 + 2n^2 + 2 + \left[4 - \left(n + \sqrt{3}\right)^2\right] = m^2 + n^2 - 2\sqrt{3}n + 3.$$

Do đó $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Vậy MA, MB, MC là ba cạnh của một tam giác vuông.




**Câu 3.**

Ta có $16 = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(1^2+1^2) \geqslant (ab+1)^2(c+1)^2$

$$\geqslant \left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right)^2.$$

$\Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{c} \leqslant 2$

Mặt khác $16 = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(1^2+1^2) \geqslant (a+b)^2(c+1)^2$.

$\Rightarrow (a+b)(c+1) \leqslant 4$

Ta có $abc + bc + ca + ab = ab(c+1) + c(a+b)$

$$\leqslant \sqrt{ab}\frac{a+b}{2}(c+1) + \sqrt{c}\frac{c+1}{2}(a+b)$$

$$\leqslant \frac{(a+b)(c+1)}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right) \leqslant 4.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Câu 4.**

Với số nguyên $n > 1$, ta có $n^6 - 1 = (n^2-n+1)(n+1)(n^3-1)$.

Mà $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ là số lẻ nên có ước nguyên tố lẻ, giả sử là $p$

$\Rightarrow p \mid (n^3+1)$ (1)

Vì $(n^3+1) - (n^3-1) = 2$ không chia hết cho $p$ nên $(n^3-1)$ không chia hết cho p.

Theo giả thiết $p \mid (n^2-1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p \mid (n^3+1+n^2-1) = n^2(n+1)$.

Vì $p$ không là ước của $n$ nên $p \mid (n+1)$ (3)

Do đó $p \mid (n^2 - 1 - n^2 - n + 1) = n - 2$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $p \mid 3$, suy ra $p = 3$ và $n^2 - n + 1 = 3^r$ với $r \in \mathbb{N}^*$.

Phương trình $n^2 - n + 1 = 3^r$ (ẩn $n$, $r \in \mathbb{N}^*$) có nghiệm nguyên $n > 1$ khi $\Delta = 1 - 4(1 - 3^r) = 3(4.3^{r-1} - 1)$ là bình phương của một số nguyên.

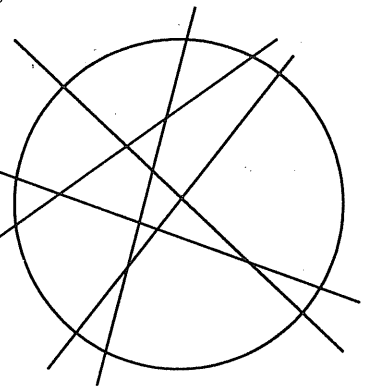
Nếu $r > 2$ thì $4.3^{r-1} - 1$ không chia hết cho 3 và $\Delta$ không là bình phương của một số nguyên.

Do đó $r = 1 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$.

Kiểm tra ta được $n = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.**

Gọi $S(n)$ là số miền mặt phẳng do *n* đường thẳng chia ra.



Ta có $S(1) = 2$;

$S(n+1) = S(n) + (n+1)$

Do đường thẳng thứ $(n+1)$ cắt *n* đường thẳng còn lại tạo nên *n* giao điểm, chia nó làm $(n+1)$ khoảng, mỗi khoảng này chia các miền chứa nó làm hai miền.

Ta có:

$$S(n) = S(n-1) + (n)$$
$$S(n-1) = S(n-2) + (n-1)$$
$$\ldots$$
$$S(2) = S(1) + 2$$

Do đó: $S(n) = 2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

Ta lấy một hình tròn (C) đủ lớn phủ tất cả các giao điểm của các đường thẳng này với nhau.

Mỗi đường thẳng trong n đường thẳng này cắt hình tròn (C) tại hai điểm. Ta có 2n tia xuất phát từ (C) tạo nên 2n miền không bị chặn.

Vậy số miền không bị chặn (các đa giác lồi) phải tính với $n \geqslant 2$ là:

$$S(n) - 2n = \frac{n(n-3)}{2} + 1$$

**Câu 6.**

+ Từ i), ta có:

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n) = f(f(n) + f(m)) = f(f(n)) + f(m)$$

$$\Rightarrow f(f(m)) - f(m) = f(f(n)) - f(n)$$

Mà $f(f(1)) - f(1) = f(2) - 2 = 2$ nên với mọi *n* ngúyên dương, ta có:

$$f(f(n)) - f(n) = 2 \Rightarrow f(f(n)) = f(n) + 2 \qquad (1)$$

Từ (1) và giả thiết f(2) = 4, bằng quy nạp, ta được:

$$f(2n) = 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

+ Vì f là đơn ánh nên nếu n lẻ khác 1 thì f(n) lẻ.

Gọi 2p + 1 là số lẻ nhỏ nhất thuộc tập giá trị của f.

Bằng quy nạp, ta được:

$$f(2p + 2k + 1) = 2p + 2k + 3, \forall k \geqslant 0 \quad (3)$$

Ta thấy rằng với mọi $t \in \{3, 5, ..., 2p - 1\}$ thì $f(t) \geqslant 2p + 1$.

Nếu $\exists t \in \{3, 5, ..., 2p - 1\}$

sao cho f(t) = 2q + 1 > 2p + 1 thì từ (3) chọn k = q – p – 1.

$\Rightarrow$ f(2q – 1) = 2q + 1 = f(t)

do đó t = 2q – 1 > 2p – 1, mâu thuẫn với $t \in \{3, 5, ..., 2p - 1\}$.

Vậy với mọi $t \in \{3, 5, ..., 2p - 1\}$ thì $f(t) = 2p + 1$.

Do f đơn ánh nên điều này chỉ xảy ra khi 3 = 2p – 1 $\Rightarrow$ p = 2

$\Rightarrow$ f(3) = 5 và từ (1), bằng quy nạp ta chứng minh được f(2n + 1) = 2n + 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $f(n) = \begin{cases} 2 & \text{khi } n = 1 \\ n + 2 & \text{khi } n \geqslant 2 \end{cases}$, thử lại thấy thỏa mãn bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO BÌNH THUẬN

**Câu 1.**

Đặt $x = t + \sqrt{3}$, phương trình đã cho trở thành

$$t^4 - 2t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 2t^2 + 1 - 4t^2 + 8t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + 1)^2 - 4(t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 1)(t^2 - 2t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 + \sqrt{2} \\ t = -1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $-1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$

**Câu 2.**

Gọi $p_1, p_2, ..., p_{n^2}$ là $n^2$ số nguyên tố liên tiếp.

Vì n số $p_1p_2...p_n$, $p_{n+1}p_{n+2}...p_{2n}$, ..., $p_{n^2-n+1}p_{n^2-n+2}...p_{n^2}$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên theo Định lí phần dư Trung Hoa, hệ phương trình đồng dư:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, p_1 p_2 \ldots p_n\right) \\ x \equiv -1 \left(\mathrm{mod}\, p_{n+1} p_{n+2} \ldots p_{2n}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv -(n-1) \left(\mathrm{mod}\, p_{n^2-n+1} p_{n^2-n+2} \ldots p_{n^2}\right) \end{cases}$$

có nghiệm nguyên dương x. Suy ra $x, x+1, \ldots, x+n-1$ là n số nguyên dương liên tiếp, mà bất kì số nào trong chúng cũng chia hết cho n số nguyên tố liên tiếp.

**Câu 3.**

Giả sử tam giác ABC có ba đường cao là 2, 3, 6 và có diện tích là S.

Ta có ba cạnh của tam giác là $\frac{2S}{2}, \frac{2S}{3}, \frac{2S}{6}$.

Theo bất đẳng thức về cạnh tam giác, ta có

$$\frac{2S}{2} < \frac{2S}{3} + \frac{2S}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \text{ (vô lí).}$$

Vậy không dựng được tam giác thỏa mãn đề bài.

**Câu 4.**

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geqslant \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} + \frac{b^2}{b^2} \geqslant \frac{(a+2b+c)^2}{(b+c)(a+b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

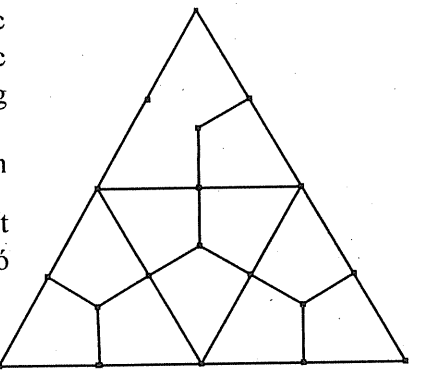
$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} + \frac{b^2}{b^2} \geqslant \frac{(a+b+b+c)^2}{ab+bc+ca+b^2} = \frac{(a+2b+c)^2}{(b+c)(b+a)}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

**Câu 5.**

Chia tam giác đều đã cho thành 12 tứ giác bằng nhau như hình vẽ. Mỗi tứ giác có hai góc vuông đối nhau, đường chéo lớn có độ dài bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Theo nguyên lí Dirichlet, khi lấy 13 điểm phân biệt bất kì trong tam giác đã cho thì có ít nhất 2 điểm nằm trong cùng một tứ giác và do đó khoảng cách của chúng nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



**Câu 6.**

Ta có $S=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(4-c)^2+(1-d)^2}$

Gọi $d_1,d_2$ là hai đường thẳng có phương trình là

$d_1: 2x+3y-6=0$, $d_2: 4x+6y-25=0$.

Lấy $P(a;b), Q(c;d), M(3;5), N(4;1)$ thì

$P\in d_1, Q\in d_2$ và $S=MP+PQ+QN$.

Thay tọa độ của O, M, N vào phương trình $d_1,d_2$ ta kiểm tra được O, N nằm khác phía của $d_1$; O, M nằm khác phía của $d_2$; M, N nằm khác phía của $d_2$.

Gọi $M_1(x;y)$ đối xứng với M qua $d_1$ và I là trung điểm $MM_1$.

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MM_1}\,//\,\overrightarrow{n_1}(2;3)\\ I\in d_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ 2\left(\dfrac{x+3}{2}\right)+3\left(\dfrac{y+5}{3}\right)-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-21}{13}\\ y=\dfrac{-25}{13}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_1\left(\frac{-21}{13};\frac{-25}{13}\right)$$

Tương tự, $N_1\left(\dfrac{58}{13};\dfrac{22}{13}\right)$ đối xứng với N qua $d_2$.

Do tính đối xứng suy ra $S=M_1P+PQ+QN_1\geqslant M_1N_1=\dfrac{\sqrt{8266}}{13}$, dấu "=" xảy ra khi P, Q lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng $M_1N_1$ và hai đường thẳng $d_1,d_2$.

Phương trình đường thẳng $M_1N_1: 45x-79y-\dfrac{1030}{13}=0$.

Từ đó tìm được $P\left(\dfrac{9252}{3809};\dfrac{1450}{3809}\right), Q\left(\dfrac{31855}{7618};\dfrac{10505}{7618}\right)$.

Vậy min $S=\dfrac{\sqrt{8266}}{13}$ đạt được khi

$$a=\frac{9252}{3809}, b=\frac{1450}{3809}, c=\frac{31855}{7618}, d=\frac{10505}{7618}.$$

# TRƯỜNG THPT HUỲNH THÚC KHÁNG
# QUẢNG NAM

**Câu 1.**

$$\begin{cases}(x-y)(x+y+y^2)=x(y+1) & (1)\\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{(y+2)^2}{3} & (2)\end{cases}$$

Điều kiện: từ (2), suy ra $x>0$.

$(1)\Leftrightarrow x^2-y^2+xy^2-y^3-xy-x=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y^2-y-1)x-y^3-y^2=0\,(3)$

Ta có: $\Delta=(y^2-y-1)^2+4(y^3+y^2)$

$=y^4+2y^3+3y^2+2y+1=(y^2+y+1)^2>0$

Nên: $(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y+1\\ x=-y^2<0\end{array}\right.$

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được:

$$\sqrt{x^3+4x}=1+\frac{(x+1)^2}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{x^3+4x}=x^2+2x+4$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ v=x^2+4\end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases}v-u^2=4\\ 9uv=(v+2u)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=u^2+4\\ v^2-5uv+4u^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u^2+4\\ \left[\begin{array}{l}v=u\\ v=4u\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=u\\ u^2-u+4=0\end{cases}\text{ (vô nghiệm)}\\ \begin{cases}v=4u\\ u^2-4u+4=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy: Hệ phương trình có một nghiệm (2; 1).

**Câu 2.**

+ Gọi O là tâm đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

- Nếu n chẵn thì $n=2m,\ m\in\mathbb{N}, n\geqslant 4$:

Khi đó $A_1A_{m+1};A_2A_{m+2};...;A_mA_{2m}$ là các đường kính nhận tâm O làm trung điểm nên: $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$

$$=\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{m+1}}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_{m+2}}\right)+...+\left(\overrightarrow{OA_m}+\overrightarrow{OA_{2m}}\right)=\vec{0}.$$

- Nếu n lẻ thì $n=2m+1,\ m\in\mathbb{N}, n\geqslant 3$: Đặt $\vec{v}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$.

Khi đó, xét đường thẳng $OA_1$ thì các cặp vectơ $\overrightarrow{OA_2}$ và $\overrightarrow{OA_{2m+1}}$, $\overrightarrow{OA_3}$ và $\overrightarrow{OA_{2m}}$, ..., $\overrightarrow{OA_m}$ và $\overrightarrow{OA_{m+1}}$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $OA_1$ nên ghép theo các tổng này thì vectơ $\vec{v}$ có giá là đường thẳng $OA_1$.

Tương tự, xét đường thẳng $OA_2$ thì các cặp vectơ $\overrightarrow{OA_3}$ và $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_4}$ và $\overrightarrow{OA_{2m+1}}$, ... đối xứng với nhau qua đường thẳng $OA_2$ nên ghép theo các tổng này thì vectơ $\vec{v}$ có giá là đường thẳng $OA_2$.

Vậy $\vec{v}$ có hai giá khác nhau nên $\vec{v}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$

+ Chứng minh được đa giác $B_1B_2..B_n$ đều.

+ Chứng minh được hai đa giác $A_1A_2..A_n$ và $B_1B_2..B_n$ có cùng tâm.

Đặt $k=\dfrac{A_1B_1}{A_1A_2}=\dfrac{A_2B_2}{A_2A_3}=...=\dfrac{A_nB_n}{A_nA_1}$.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đa giác

$$A_1A_2..A_n \text{ và } B_1B_2..B_n \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+...+\overrightarrow{MA_n}=n\overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}+...+\overrightarrow{MB_n}=n\overrightarrow{MO'}\end{cases},$$

$$\Rightarrow n\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=k\overrightarrow{A_1A_2}+k\overrightarrow{A_2A_3}+...+k\overrightarrow{A_nA_1}$$

$$=k\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_nA_1}\right)=\vec{0}$$

Suy ra hai đa giác $A_1A_2..A_n$ và $B_1B_2..B_n$ có cùng tâm O

Áp dụng định lí côsin trong $\Delta\ B_1OB_2$:

$$B_1B_2^2=OB_1^2+OB_2^2-2OB_1.OB_2\cos\frac{360^0}{n}=2OB_1^2\left(1-\cos\frac{360^0}{n}\right)$$

Chu vi đa giác $B_1B_2..B_n=nB_1B_2$. Suy ra chu vi đa giác $B_1B_2...B_n$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OB_1$ nhỏ nhất.

Khi đó $B_1$ là hình chiếu của O lên $A_1A_2$. Hay $B_1$ là trung điểm $A_1A_2$.

Vậy chu vi đa giác $B_1B_2...B_n$ nhỏ nhất khi $B_1;B_2;...;B_{n-1};B_n$ lần lượt là trung điểm của $A_1A_2;A_2B_3;...;A_{n-1}A_n;A_nA_1$.

**Câu 3.**

Ta có: $\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ac\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc\left(a+b+c\right).$$

Mặt khác:

$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\Rightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)\geqslant a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc\left(a+b+c\right)$

Vậy: $a^4+b^4+c^4\geqslant abc\left(a+b+c\right)$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+abcd\geqslant abc\left(a+b+c+d\right)$$

Vì abcd = 1 nên

$a^4+b^4+c^4+1\geqslant abc\left(a+b+c+d\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^4+c^4+1}\leqslant\frac{1}{abc\left(a+b+c+d\right)}\quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{1}{b^4+c^4+d^4+1}\leqslant\frac{1}{bcd\left(a+b+c+d\right)}\quad (2)$$

$$\frac{1}{c^4+d^4+a^4+1}\leqslant\frac{1}{cda\left(a+b+c+d\right)}\quad (3)$$

$$\frac{1}{d^4+a^4+b^4+1}\leqslant\frac{1}{abd\left(a+b+c+d\right)}\quad (4)$$

Cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+1}+\frac{1}{b^4+c^4+d^4+1}+\frac{1}{c^4+d^4+a^4+1}+\frac{1}{d^4+a^4+b^4+1}$$
$$\leqslant\frac{d+a+b+c}{abcd\left(a+b+c+d\right)}=\frac{1}{abcd}=1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = d = 1.

**Câu 4.**

Đặt $\frac{x^3+1}{y+1}=\frac{a}{b};\frac{y^3+1}{x+1}=\frac{c}{d}$ (với $a, b, c, d\in\mathbb{Z}, \left(a, b\right)=1, \left(c,d\right)=1$).

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Z}$.

Nên: $ad + bc \vdots bd \Rightarrow ad + bc \vdots b \Rightarrow ad \vdots b \Rightarrow d \vdots b$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{x^3+1}{y+1}.\frac{y^3+1}{x+1} = \left(x^2 - x + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ac \vdots bd \Rightarrow ac \vdots d \Rightarrow a \vdots d$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a \vdots b$.

Nên $\frac{x^3+1}{y+1} = m \Rightarrow x^3 + 1 \vdots y + 1 \quad (m \in \mathbb{Z})$ (3)

Mà $x^{2016} - 1 = \left(x^3\right)^{672} - 1 \vdots x^3 + 1$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $x^{2016} - 1 \vdots y + 1$

Vậy $\frac{x^{2016} - 1}{y+1} \in \mathbb{Z}$ (đpcm).

**Câu 5.**

Gọi A là 1 điểm trong 2013 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 1. Nếu tất cả 2012 điểm còn lại đều nằm trong hình tròn tâm A bán kính 1 thì bài toán được giải.

Giả sử có điểm B nằm ngoài đường tròn (A; 1) tức là AB > 1. Vẽ đường tròn tâm B bán kính 1, kí hiệu (B;1). Ta chứng minh 2013 điểm đã cho đều nằm trong (A; 1) hoặc (B; 1).

Thật vậy, lấy C bất kì, xếp 3 điểm A, B, C theo giả thiết AB > 1 nên AC < 1 hoặc AB < 1. Khi đó C nằm trong đường tròn (A; 1) hoặc C nằm trong (B; 1).

Có 2013 điểm nằm trong 2 đường tròn, nên theo nguyên tắc Dirichlet có 1 đường tròn chứa ít nhất 1007 điểm. Suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 6.**

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy\left(x^2 - y^2\right), \forall x,y \in \mathbb{R} \quad (1) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

$(1) \Rightarrow vf(u) - uf(v) = \left(u^2 - v^2\right)uv$

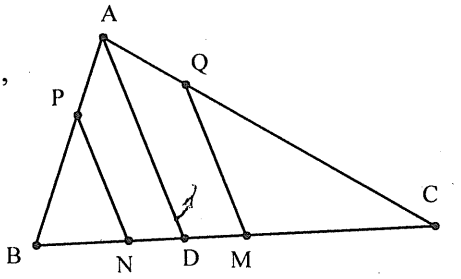
$\Rightarrow \frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2, \forall u,v \neq 0 \Rightarrow \frac{f(v)}{v} - v^2 = \frac{f(u)}{u} - u^2.$

Chọn v = 1: $(1) \Rightarrow f(1) - 1 = \frac{f(u)}{u} - u^2 \Rightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = 1 \Rightarrow f(u) = u^3 + u$.

Vậy $f(x) = x^3 + x$. Thử lại yêu cầu bài toán ta thấy đúng.

# TRƯỜNG THPT PLEIKU - GIA LAI

**Câu 1.**




Đặt $\frac{AP}{AB} = x$ và $\frac{AQ}{AC} = y$, với $0 < x, y < 1$,

ta có $\frac{dt(APQ)}{dt(ABC)} = \frac{AP.AQ}{AB.AC} = xy$,

suy ra $dt(APQ) = xydt(ABC)$ $(1)$.

Mặt khác ta lại có: $\frac{BN}{BD} = \frac{BP}{BA} = 1 - x$

$\frac{CM}{CD} = \frac{CQ}{CA} = 1 - y$

Suy ra $dt(BNP) = (1-x)^2 dt(ABD)$ (2)

$dt(CMQ) = (1-y)^2 dt(ACD)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có :

$$dt(MNPQ) = dt(ABC) - dt(APQ) - dt(BNP) - dt(CMQ)$$

$$= \left[(1-xy) - (1-x)^2\right].dt(ABD) + \left[(1-xy) - (1-y)^2\right].dt(ACD)$$

$$= (2x - xy - x^2).dt(ABD) + (2y - xy - y^2).dt(ACD)$$

Vì $2x - xy - x^2 = x(2 - y - x) > 0$, $2y - xy - y^2 = y(2 - x - y) > 0$

nên $dt(MNPQ) \leqslant \left[(2x - xy - x^2) + 2y - xy - y^2\right].\max\{dt(ABD);dt(ACD)\}$

$\Leftrightarrow dt(MNPQ) \leqslant \left[2(x+y) - (x+y)^2\right].\max\{dt(ABD);dt(ACD)\}$

$\Leftrightarrow dt(MNPQ) \leqslant \left[1 - (x+y-1)^2\right].\max\{dt(ABD);dt(ACD)\}$

Do đó $dt(MNPQ) \leqslant \max\{dt(ABD);dt(ACD)\}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$dt(ABD) = dt(ACD)$ và $x + y = 1$, hay $BD = DC$ và $\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} = 1$.

**Câu 2.**

$$\frac{2}{a^3(b+c)}+\frac{2}{b^3(c+a)}+\frac{2}{c^3(a+b)}\geqslant 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$

Khi đó xyz = 1 (2) và $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant \frac{3}{2} \quad (3)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geqslant x \ (4)$$

$$\frac{y^2}{x+z}+\frac{x+z}{4}\geqslant y \ (5)$$

$$\frac{z^2}{y+x}+\frac{y+x}{4}\geqslant z \ (6)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta được

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant \frac{x+y+z}{2} \qquad (7)$$

Ngoài ra $\frac{x+y+z}{2}\geqslant \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$. (**)

Từ (**) và (7) ta suy ra bất đẳng thức (*) (đpcm).

**Câu 3.**

Đặt $g(x)=f(x)-10x$, lúc đó $g(1)=g(2)=g(3)=0$

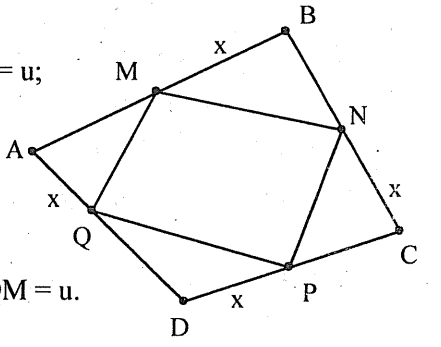
nên g(x) chia hết cho $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Vì g(x) là đa thức bậc 4 nên $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-x_0)$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-x_0)+10x$$

Khi đó $\frac{f(12)+f(-8)}{10}+15 = 1984+15=1999.$

**Câu 4.**




Đặt AQ = DP = CN = BM = x, AB = a, MN = u;

$AM = a-x$; $\widehat{PQD}=\alpha$

Xét tam giác AMQ ta có

$u^2=(a-x)^2+x^2-2x(a-x)\cos A$ (1)

Khi MNPQ là hình vuông thì

$\widehat{AQM}=90^0-\alpha$ và MN = NP = PQ = QM = u.

Ta có $AM^2 = AQ^2 + QM^2 - 2AQ.QM.\cos\widehat{AQM}$

$$\Leftrightarrow (a-x)^2 = u^2 + x^2 - 2ux\sin\alpha \quad (2)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác QDP, ta có:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin D} \Rightarrow u\sin\alpha = x\sin D.$$

Hệ thức (2) trở thành $(a-x)^2 = u^2 + x^2 - 2x^2\sin D \quad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $\cos A = \frac{x}{a-x}(1-\sin D) \geqslant 0.$

Vì tứ giác ABCD lồi nên $0 < A \leqslant 90^0$

Chứng minh tương tự ta cũng có $0 < B \leqslant 90^0$; $0 < C \leqslant 90^0$; $0 < D \leqslant 90^0$.

Suy ra $A + B + C + D \leqslant 360^0$

Vậy ta phải có $A = B = C = D = 90^0$.

Khi đó ABCD là hình chữ nhật. Áp dụng định lí Pytago, ta có:

$AM^2 = MQ^2 - AQ^2 = MN^2 - MB^2 = BN^2 \Rightarrow AM = BN \Rightarrow AB = CB.$

Vậy ABCD là hình vuông.

**Câu 5.**

Trước hết ta có điều kiện $x \geqslant 4$. Phương trình (1) có thể viết lại

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2} = a \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4}-1\right| + \left|\sqrt{x-4}-2\right| = a$$

Đặt $y = \sqrt{x-4}$ $(y \geqslant 0)$ phương trình trở thành $|y-1| + |y-2| = a$ (2)

Điều kiện để (2) có nghiệm là $a > 0$, vì nếu $a < 0$ thì phương trình vô nghiệm; và nếu $a = 0$ thì $\sqrt{x-4} = 1$ và $\sqrt{x-4} = 2$ (vô lí).

*Trường hợp 1:* Nếu $0 \leqslant y < 1$ thì $1 - y + 2 - y = a \Leftrightarrow y = \frac{3-a}{2}$.

Ta phải có $0 \leqslant \frac{3-a}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3 - a < 2 \Leftrightarrow 1 < a \leqslant 3$

Vậy với $1 < a \leqslant 3$ thì $y = \frac{3-a}{2} \in [0;1)$

Khi $a \leqslant 1$ hoặc $a > 3$ thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2:* Nếu $1 \leqslant y \leqslant 2$ thì $y - 1 + 2 - y = a \Leftrightarrow a = 1$

Vậy với $a = 1$ thì phương trình (2) có nghiệm y thỏa mãn $1 \leqslant y \leqslant 2$, với $a \neq 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

*Trường hợp 3:* Nếu $y > 2$ thì $y - 1 + y - 2 = a \Leftrightarrow y = \frac{a+3}{2}$.

Ta phải có $\frac{a+3}{2} > 2 \Leftrightarrow a > 1$.

Vậy với a > 1 thì phương trình (2) có nghiệm $y = \frac{3+a}{2}$

Khi a < 1 thì phương trình (2) vô nghiệm.

Tóm lại: Với a = 1 thì phương trình (2) có nghiệm y:

$$1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x-4} \leqslant 2 \Leftrightarrow 5 \leqslant x \leqslant 8$$

Nếu $1 < a \leqslant 3$ phương trình có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x-4 = y^2 = \left(\frac{3-a}{2}\right)^2 \\ x-4 = y^2 = \left(\frac{3+a}{2}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \left(\frac{3-a}{2}\right)^2 + 4 \\ x = \left(\frac{3+a}{2}\right)^2 + 4 \end{array}\right.$$

Nếu a < 1 phương trình vô nghiệm.

Nếu a > 3 thì phương trình có nghiệm là $x = \frac{a^2+6a+25}{4}$.

**Câu 6.**

$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = 1 + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x$, chia cả hai vế của phương trình cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ ta được $1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x$

Vì $a \in (0;1)$ nên tồn tại $\varphi \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ để cho $\tan\frac{\varphi}{2} = a$

Khi đó phương trình có thể viết lại thành

$$1 = \left(\frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}\right)^x + \left(\frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}\right)^x \Leftrightarrow 1 = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x$$

$\varphi \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $1 > \sin\varphi > 0$; $1 > \cos\varphi > 0$.

Do đó hàm số $f(x) = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x$ là hàm luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hơn nữa ta có f(2) = 1.

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH
# TRÀ VINH

**Câu 1.**

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)^2+2011} = (x-1)^4 - 3(x-1)^2 - 2011 \qquad (2)$$

Đặt $\begin{cases} u = (x-1)^2 \geqslant 0 \\ v = \sqrt{2(x-1)^2+2011} \geqslant \sqrt{2011} \end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} v^2 = 2u + 2011 & (3) \\ v = u^2 - 3u - 2011 & (4) \end{cases}$

Cộng (3), (4) theo vế :

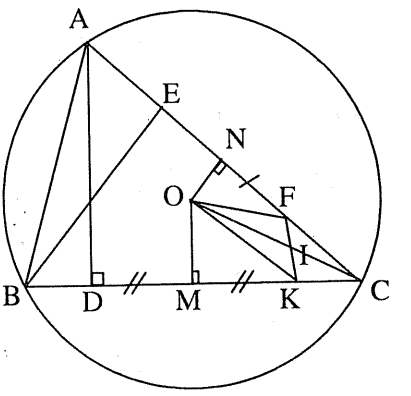
$$v^2 + v = u^2 - u \Leftrightarrow (v+u)(v-u+1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ v = u –1 (do V + u > 0 )

$\Leftrightarrow u^2 - 4u - 2010 = 0 \Leftrightarrow u = 2 + \sqrt{2014} \quad (\text{do } u \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 + \sqrt{2014} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2+\sqrt{2014}}$ (nhận)

**Câu 2.**




Ta có $\begin{cases} MB = MC \\ MD = MK \end{cases}$

$\Rightarrow CK = BD = AB.\cos B$

$\begin{cases} NC = NA \\ NF = NE \end{cases}$

$\Rightarrow CF = AE = AB.\cos A$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CF} = \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{OC.\cos\widehat{CON}}{OC.\cos\widehat{COM}} = \frac{ON}{OM}$$

$\Rightarrow CK.OM = CF.ON \Rightarrow S_{COK} = S_{COF}$

$\Rightarrow d(F;OC) = d(K;OC) \Rightarrow IF = IK$

$\Rightarrow$ I là trung điểm FK

$$\Rightarrow 4CI^2 = 4\overrightarrow{CI}^2 = \left(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CF}\right)^2 = CK^2 + CF^2 + 2CK.CF.\cos C$$

$$= AB^2\left(\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C\right) \qquad (1)$$

Mà: $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

$\Rightarrow \cos^2A + \cos^2B + 2\cos A\cos B\cos C = 1 - \cos^2C = \sin^2C$ (2)

Từ (1), (2) suy ra:

$4CI^2 = AB^2\sin^2C = 4R^2.\sin^4C$

$$\Leftrightarrow CI = R.\sin^2C = \frac{R}{4} \Rightarrow OI = \frac{3R}{4} \Rightarrow \frac{S_{\Delta OFK}}{S_{\Delta CFK}} = \frac{d(O,FK)}{d(I,FK)} = \frac{OI}{CI} = 3$$

**Câu 3.**

Ta có: $2x(1-x) \geq y(y-1)$

$$\Leftrightarrow 2x + y \geqslant x^2 + x^2 + y^2 \geqslant \frac{(x+x+y)^2}{1+1+1}$$ (Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz)

$$\Rightarrow 2x + y \geqslant \frac{(2x+y)^2}{3} \qquad (1)$$

Đặt $t = 2x + y$ thì (1) thành $t^2 - 3t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3$

Khi đó:

$$P - 3 = x - y + 3xy - 3 = \frac{1}{3}(3x - 3y + 9xy - 9) = \frac{1}{3}\left[(3x-1)(3y+1) - 8\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(6x-2)(3y+1) - 8\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{6x+3y-1}{2}\right)^2 - 8\right] = \frac{1}{24}(6x+3y-9)(6x+3y+7)$$

$$= \frac{1}{24}(3t-9)(3t+7) \leqslant 0, \text{ do } 0 \leqslant t \leqslant 3$$

(Ở đây ta sử dụng $(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$)

Vậy $P \leq 3$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} t = 3 \\ 2x + y = 2x^2 + y^2 \\ x = y \\ 6x - 2 = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Vậy $\max P = 3$ khi $x = y = 1$

**Câu 4.**

Giả sử $n^2 + n + 1 = p_1.p_2.p_3.p_4$ (1)

với $p_1, p_2, p_3, p_4$ là số nguyên tố và $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant p_4$.

● $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ là số lẻ $\Rightarrow p_1, p_2, p_3, p_4$ đều lẻ

$\Rightarrow p_i \geq 3,\ \forall i = 1, 2, 3, 4$.

● $n(n + 1)$ tận cùng là 0 ; 2 ; 6 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ tận cùng là 1 ; 3 ; 7

$\Rightarrow \left(n^2 + n + 1\right)$ không chia hết cho 5, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p_i$ không chia hết cho 5 với mọi i = 1 ; 2 ; 3 ; 4.

⊕ Xét $p_1 = 3$ : thay vào (1), ta được

$$n^2 + n + 1 = 3p_2p_3p_4 \qquad (2)$$

$\Rightarrow n^2 + n + 1 \vdots 3 \Rightarrow n=3k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$

Khi đó (2) trở thành

$$9k^2 + 9k + 3 = 3p_2p_3p_4 \Leftrightarrow 3k^2 + 3k + 1 = p_2p_3p_4 \qquad (3)$$

Do $\left(3k^2 + 3k + 1\right) \not\vdots 3 \Rightarrow p_2 \not\vdots 3$

Mà $p_2 \not\vdots 5 \Rightarrow p_2 > 5$

⊕ Xét $p_2 = 7$ :

(3) trở thành $3k^2 + 3k + 1 = 7p_3p_4$ (4)

$$\Rightarrow \left(3k^2 + 3k + 1\right) \vdots 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 7t + 1 \\ k = 7t + 5 \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{N})$$

Do ta cần tìm n nguyên dương nhỏ nhất nên ta chọn $n = 7t + 1$ thay vào (4) :

$$21t^2 + 9t + 1 = p_3.p_4 \qquad (5)$$

⊕ Xét $p_3 = 7$ thay vào (5) :

$$21t^2 + 9t + 1 = 7p_4 \Rightarrow 21t^2 + 9t + 1 \vdots 7 \Rightarrow t = 7m + 3 \quad (m \in \mathbb{N})$$

Do ta cần tìm n nguyên dương nhỏ nhất nên ta chọn

$$n = 3k + 1 = 3(7t + 1)+1 = 21t + 4 = 21(7m + 3)+ 4 = 147m + 67$$

Để n nhỏ nhất nên ta chọn $m = 0 \Leftrightarrow n = 67$

Thử lại với $n = 67$ ta có

$n^2 + n + 1 = 67^2 + 67 + 1 = 3.7.7.31$, thỏa mãn đề bài.

Vậy $n = 67$.

**Câu 5.**

Lấy 5 điểm tùy ý, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 3 điểm cùng màu, giả sử là A, B, C tô màu đỏ. Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC$.

⊕ Nếu G được tô đỏ $\Rightarrow \Delta ABC$ có 3 đỉnh và trọng tâm được tô cùng màu đỏ.

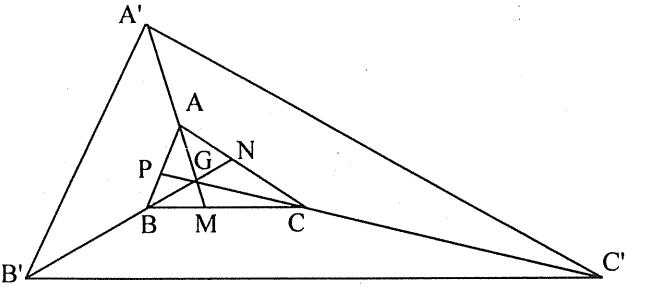
⊕ Nếu G được tô màu xanh : Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = -3\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{BB'} = -3\overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{CC'} = -3\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{CP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{A là trọng tâm } \Delta A'BC \\ \text{B là trọng tâm } \Delta B'CA \\ \text{C là trọng tâm } \Delta C'AB \end{cases}$$

và $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 4\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \vec{0} \Rightarrow$ G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

• Trường hợp 1: Nếu $A', B', C'$ được tô cùng màu xanh thì ta được $\Delta A'B'C'$ có 3 đỉnh $A', B', C'$ và trọng tâm G được tô màu xanh.

• Trường hợp 2: Nếu có ít nhất 1 trong 3 điểm $A', B', C'$ tô đỏ, giả sử $A'$ tô màu đỏ thì ta được $\Delta A'BC$ mà 3 đỉnh $A', B, C$ và trọng tâm A được tô màu đỏ (đpcm).




**Câu 6.**

- Thay $x = 2, y = 0$ vào (1): $f(0) = 0$.
- Thay $x = y = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(1) = 0$. (2)
- Thay $y = x^2$ vào (1): $f(x^2) = (x + \frac{1}{x})f(x)$ ,$\forall x \neq 0$ (3)
- Thay x bởi $x^2$ và y bởi $y^2$ vào (1):

$$x^2f(y^2) - y^2f(x^2) = f(\frac{y^2}{x^2}) \ ,\forall x \neq 0, \forall y \in R \qquad (4)$$

- Từ (3) và (4) suy ra:

$$x^2(y + \frac{1}{y})f(y) - y^2(x + \frac{1}{x})f(x) = (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})f(\frac{y}{x}) \ ,\forall x \neq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y + \frac{1}{y})f(y) - y^2(x + \frac{1}{x})f(x) = xf(y) - yf(x), \forall x \neq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)yf(y) = (y^2 - 1)xf(x) \qquad (5)$$

Thay $x = 2, y = -1$ vào (5) $\Rightarrow f(-1) = 0$.

- Nếu $x \neq \pm 1, y \neq \pm 1$ thì:

$$(5) \Leftrightarrow \frac{xf(x)}{x^2 - 1} = \frac{yf(y)}{y^2 - 1}, \forall x, y \in R \setminus \{-1; 1\}$$

$$\Rightarrow \frac{xf(x)}{x^2 - 1} = C \Rightarrow f(x) = \frac{C(x^2 - 1)}{x}, \forall x \in R \setminus \{-1; 0; 1\} \quad (6) \text{ (C là hằng số)}$$

Vậy $f(x) = \begin{cases} \frac{C(x^2 - 1)}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ (C là hằng số).

Thử lại ta thấy hàm số trên thoả mãn đề bài.

# TRƯỜNG THPT KRÔNG NÔ - ĐẮK NÔNG

**Câu 1.**

$$x+\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=\frac{3x}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 1+x^2=\dfrac{9x^2}{(1-x)^2} \quad (1) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (1+x^2)(1+x^2-2x)=9x^2$.

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0 \qquad (2)$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x} \geqslant 2$. Khi đó (2) trở thành: $t^2-2t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{10} \\ t=1+\sqrt{10} \end{array}\right.$

Vì $t \geqslant 2$ nên nhận nghiệm $t=1+\sqrt{10}$.

Với $t=1+\sqrt{10}$: $x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{10}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2} \end{array}\right.$

Do $0<x<1$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2}$.

**Câu 2.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G(1;-2)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|$, G và $\Delta$ cố định ($G \notin \Delta$).

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left|3\overrightarrow{MG}\right|$ nhỏ nhất, tức là MG nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của điểm G lên đường thẳng $\Delta$.

Suy ra: M là giao điểm của đường thẳng $\Delta$ và đường thẳng d qua G, vuông góc với $\Delta$.

Phương trình đường thẳng d: $2x-y-4=0$. Ta có: $M=\Delta \cap d$.

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y+10=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{5} \\ y=-\dfrac{24}{5} \end{cases}$

Vậy điểm M có tọa độ: $\left(-\frac{2}{5};-\frac{24}{5}\right)$.

**Câu 3.**

Ta có : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}$

$$=\left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{a+c}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right)-(a+b+c)$$

$$=a\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+b\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+c\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-(a+b+c)$$

$$=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{a+c}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-1\right)\ (1)$$

Ta lại có: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$. Thật vậy:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(b+c)+(c+a)+(a+b)\geqslant 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}9\sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}}-3=\frac{3}{2}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant(a+b+c)\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{a+b+c}{2}\ \text{(đpcm)}$$

**Câu 4.**

Ta có: $CD+DA=a\Rightarrow CD^2=(a-DA)^2$

$$\Leftrightarrow\ CA^2+DA^2-2CA.DA.\cos A=a^2-2a.DA+DA^2$$

$$\Leftrightarrow\ b^2+DA\left(2a-2b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=a^2$$

$$\Leftrightarrow\ a^2 - b^2 = DA\left(2a - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c}\right)$$

Ta có: $\frac{DA}{DB} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{DB + DA} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow DA = \frac{bc}{a + b}$

Nên $a^2 - b^2 = \frac{bc}{a + b}\left(\frac{2ac - b^2 - c^2 + a^2}{c}\right)$

$\Leftrightarrow\ (a + b)(a^2 - b^2) = 2abc - b^3 - bc^2 + ba^2$

$\Leftrightarrow\ a^3 - ab^2 + ba^2 - b^3 = 2abc - b^3 - bc^2 + ba^2$

$\Leftrightarrow\ a^3 = ab^2 + 2abc - bc^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = ab^2 + 2abc - bc^2 + b^3$

$\Leftrightarrow\ 2ab = 2ac - c^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a(b - c) = b^2 - c^2$

$\Rightarrow\ 2a = b + c$ (vì $b \neq c$) $\Rightarrow\ 2a > 2AI$ (vì $b + c > 2AI$)

$\Rightarrow\ a > AI$ (đpcm).

**Câu 5.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2y \\ (2x - y)y = 1 + 2y \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - y^2 - 2y = 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow\ x(x - 2) + 2y(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right.$$

+) TH1: $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ (2x - y)y = 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

+) TH2: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ (2x - y)y = 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 5y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 1)$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH - HẬU GIANG

**Câu 1.**

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Dễ thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn hệ.

Với $x > 0$ và $y > 0$ ta có $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x + y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \frac{1}{x + y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \frac{1}{x + y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \text{ (nhân vế với vế)}$$

$$\Rightarrow 21xy = (7y - 24x)(x + y) \Rightarrow 24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 6x \text{ (vì x, y dương).}$$

Thay vào phương trình (1) ta được

$$\frac{1}{7x} - \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

Kết luận $(x;y) = \left(\frac{3}{7(2+\sqrt{7})^2}; \frac{18}{7(2+\sqrt{7})^2}\right); (x;y) = \left(\frac{3}{7(2-\sqrt{7})^2}; \frac{18}{7(2-\sqrt{7})^2}\right)$.

**Câu 2.**

Gọi O, I, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm tam giác ABC. Ta sử dụng 2 bổ đề sau:

*Bổ đề 1.* Trong tam giác ABC, ta luôn có $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

(*Chứng minh dành cho bạn đọc*).

*Bổ đề 2.* $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*Ví dụ 10, trang 16, Tài liệu chuyên Toán hình học 10*).

Ta sẽ chứng minh $IH^2 = 4R^2 - 8Rr - \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$.

Thật vậy:

Từ bổ đề 1 và bổ đề 2 ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ 2p.\overrightarrow{OI} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

(với p là nửa chu vi của tam giác ABC)

Từ đó ta tính được:

$$2p.\overrightarrow{IH} = (2p-a)\overrightarrow{OA} + (2p-b)\overrightarrow{OB} + (2p-c)\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow 4p^2IH^2 = R^2\left((2p-a)^2 + (2p-b)^2 + (2p-c)^2\right)$$
$$+(2p-a)(2p-b)2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + (2p-b)(2p-c)2.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$$
$$+(2p-c)(2p-a)2.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

Mà $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$ nên:

$$4p^2IH^2 = R^2\left((b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2\right)$$
$$+(2p-a)(2p-b)(2R^2-c^2) + (2p-b)(2p-c)(2R^2-a^2)$$
$$+(2p-c)(2p-a)(2R^2-b^2)$$
$$= R^2(2p-a+2p-b+2p-c)^2$$
$$-\left[c^2(2p-a)(2p-b) + b^2(2p-c)(2p-a) + a^2(2p-b)(2p-c)\right]$$
$$= 16p^2R^2 - (a^3+b^3+c^3)2p - abc.2p$$

Suy ra: $IH^2 = 4R^2 - \dfrac{a^3+b^3+c^3}{2p} - \dfrac{abc}{2p}$.

Mà $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) + 3abc$.

Nên $IH^2 = 4R^2 \quad \dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) - \dfrac{4abc}{2p}$

Mặt khác, $S = \dfrac{abc}{4R} = pr \Rightarrow 2rR = \dfrac{abc}{2p}$

$$IH^2 = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) - 8Rr \geqslant 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leqslant 8R(R-2r)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Câu 3.**

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $a^3+b^3+\alpha^3 \geqslant 3\alpha.ab$

$b^3+c^3+\alpha^3 \geqslant 3\alpha.bc$

$c^3+a^3+\alpha^3 \geqslant 3\alpha.ca$ với $\alpha$ là số thực dương.

Khi đó ta được: $2(a^3+b^3+c^3) + 3\alpha^3 \geqslant 3\alpha.(ab+bc+ca)$

Bất đẳng thức tương đương với $\dfrac{2}{3\alpha}(a^3+b^3+c^3) + \alpha^2 \geqslant ab+bc+ca$ (1)

Mặt khác: $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{\alpha^2}\right)+\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{b}{\alpha^2}\right)+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{c}{\alpha^2}\right) \geqslant \dfrac{6}{\alpha}$

(Áp dụng bất đẳng thức AM - GM)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{6}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\alpha - (a+b+c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$\frac{2}{3\alpha}(a^3+b^3+c^3)+\alpha^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)\geqslant 6\alpha-\frac{4}{3}$$

Ta chọn $\alpha$ sao cho đẳng thức xảy ra, tức là $a=b=c=\alpha$

Chọn $\alpha=\frac{4}{3}$ là nghiệm của phương trình $9\alpha^2=9\alpha+4$

Vì vậy $P=\frac{(a^3+b^3+c^3)}{2}+\frac{16}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)\geqslant\frac{28}{3}$

Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{28}{3}$ khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

**Câu 4.**

Từ giả thiết suy ra p là ước của

$a^{2^{k+1}}-b^{2^{k+1}}=\left(a^{2^k}-b^{2^k}\right)\left(a^{2^k}+b^{2^k}\right)$ và p là ước của $a^{p-1}$.

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^h\equiv h$ là ước của

$\left(2^{k+1};p-1\right)\Rightarrow h=2^s$

Giả sử $s\leqslant k$, ta có $a^{2^k}\equiv b^{2^k}\pmod p$

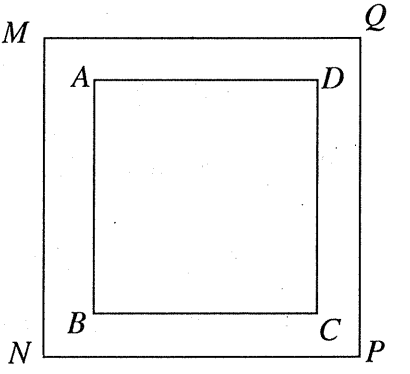
Từ đó do $p$ là ước của $a^{2^k}+b^{2^k}$

suy ra $\begin{cases}p\mid 2.a^{2^k}\\ p\mid 2.b^{2^k}\end{cases}$ mà p là số lẻ nên $\begin{cases}p\mid a^{2^k}\\ p\mid b^{2^k}\end{cases}$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(a,b)=1$.

Vậy $h=2^{k+1}\Rightarrow p\equiv 1\pmod{2^{k+1}}$

**Câu 5.**




Gọi 100 điểm đã cho nằm trong hình vuông ABCD có cạnh bằng 8 là $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Ta dựng 100 hình tròn có tâm là các điểm đó và có bán kính bằng 1.

Tổng diện tích của chúng là $100\pi$.

Về phía ngoài của hình vuông ABCD, dựng hình vuông MNPQ đồng tâm, có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của hình vuông ABCD và MN cách AB một khoảng bằng 1, MQ cách AD một khoảng bằng 1.

Khi đó, hình vuông MNPQ có cạnh là 10 và 100 hình tròn vừa dựng đều nằm trong hình vuông MNPQ.

Diện tích hình vuông $MNPQ$ là 100.

Ta có $100\pi > 3.100$ nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 1 điểm là điểm chung của 4 hình tròn (điểm này có thể không là một trong 100 điểm đã cho).

Gọi điểm đó là $I$. Khi đó khoảng cách từ $I$ đến 4 tâm của 4 hình tròn trên đều nhỏ hơn hoặc bằng 1. Vì vậy hình tròn tâm $I$ có bán kính 1 là hình tròn chứa ít nhất 4 điểm trong 100 điểm đã cho (đpcm).

**Câu 6.**

Cho $m = n = 0$, từ i) ta được: $f(0) = 0$.

Từ đó: $f(m^2) = f^2(m)$.

Do đó, i) có thể viết lại như sau:

$$f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n) = f(m^2) + f(n^2).$$

Vì thế: $f(1) = f(1^2) = f^2(1)$. Do ii) nên suy ra: $f(1) = 1$.

Từ đây, ta thu được kết quả như sau:

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2;\ f(4) = 4;$$

$$f(5) = 5;\ f(8) = 8.$$

Mặt khác:

$$25 = f^2(5) = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4) = f^2(3) + 16$$

Suy ra: $f(3) = 3$

Từ đây ta dễ dàng thu được: $f(9) = 9; f(10) = 10$

Cuối cùng: $100 = f(10^2) = f(6^2 + 8^2) = f^2(6) + f^2(8)$

Vậy ta thu được kết quả bài toán: $f(6) = 6$

# RƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI
# SÓC TRĂNG

**âu 1.**

Điều kiện: $\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)+(\sqrt{4-x}-1)+(\sqrt{2x-5}-1)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}\right]=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1 \end{array}\right.$$

Xét: $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1+\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}$$

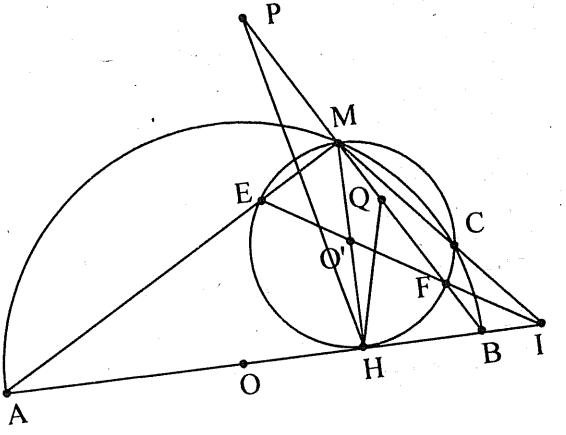
Nhận thấy: VP > 2x + 1 ⩾ 6 với $x \in \left[\frac{5}{2};4\right]$

VT < 1 + 2 = 3 với $x \in \left[\frac{5}{2};4\right]$

Do đó (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: x = 3

**Câu 2.**



Ta có: HM là phân giác trong của $\widehat{PHQ}$ suy ra $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{HP}{HQ}$

Mà $PM.QB = MQ.PB \Leftrightarrow \dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{BP}{BQ}$

Do đó: $\dfrac{BP}{BQ}=\dfrac{HP}{HQ}$ vì thế HB là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{PHQ}$.

Suy ra $MH \perp HB$

Gọi $I = AB \cap MC$, $F' = IE \cap (O')$.

Ta lại có: $IA.IB = IC.IM = IE.IF'$ suy ra tứ giác ABF'E nội tiếp.

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$ME.MA = MH^2 = MF.MB$ suy ra tứ giác ABFE nội tiếp

Vì F và F' là các giao điểm khác E của (O') và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE nên $F \equiv F'$ suy ra E, F, I thẳng hàng.

Vậy minh AB, EF, CM đồng quy.

**Câu 3.**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2=\left(1.\sqrt{a}+2.2\sqrt{b}\right)^2 \leqslant 5(a+4b)$$

Suy ra $\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2} \geqslant \dfrac{1}{5(a+4b)}$

Tương tự ta được:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{b}+4\sqrt{c}\right)^2} \geqslant \frac{1}{5(b+4c)}; \qquad \frac{1}{\left(\sqrt{c}+4\sqrt{a}\right)^2} \geqslant \frac{1}{5(c+4a)}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{b}+4\sqrt{c}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{c}+4\sqrt{a}\right)^2} \geqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{b+4c}+\frac{1}{c+4a}\right) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{b+3c+a} \geqslant \frac{3}{a+3b+c};$$

$$\frac{1}{b+4c}+\frac{1}{b+4c}+\frac{1}{c+3a+b} \geqslant \frac{3}{b+3c+a};$$

$$\frac{1}{c+4a}+\frac{1}{c+4a}+\frac{1}{a+3b+c} \geqslant \frac{3}{c+3a+b}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{b+4c}+\frac{1}{c+4a}\geqslant\frac{1}{a+3b+c}+\frac{1}{b+3c+a}+\frac{1}{c+3a+b} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{b}+4\sqrt{c}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{c}+4\sqrt{a}\right)^2}$$

$$\geqslant\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a+3b+c}+\frac{1}{b+3c+a}+\frac{1}{c+3a+b}\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Câu 4.**

Ta có:

$x^3 + y^3 - 4 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow -xy(x + y) - 4 \equiv 0 \pmod p$

$\Leftrightarrow 3xy(x + y) + 12 \equiv 0 \pmod p$ (1)

Mặt khác: $x^3 + y^3 - 4 \equiv 0 \pmod p$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được: $(x + y)^3 + 8 \equiv 0 \pmod p$

$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 + y^2 - 2xy - 2(x + y) + 4) \equiv 0 \pmod p$

Vì p là số nguyên tố, ta có các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** x + y + 2 chia hết cho p

Khi đó : $x^2+y^2\leqslant x+y+2 \Leftrightarrow x(x-1)+y(y-1)\leqslant 2$

Vì x, y là số nguyên dương nên có các trường hợp:

x = y = 1; x = 2, y = 1; x = 1, y = 2

Thử lại ta có các cặp số (x; y) thoả mãn là : (1;1); (2;1); (1;2).

**Trường hợp 2:** Nếu $x^2+y^2+2xy-2(x+y)+4\,\vdots\,p$

Khi đó : $x^2+y^2+2xy-2(x+y)+4\,\vdots\,(x^2+y^2)$

$\Rightarrow 2xy-2(x+y)+4\,\vdots\,(x^2+y^2)$

Do 2xy – 2( x+y) +4 = 2 [( x–1)( y–1) +1 ] > 0

$\Rightarrow 2xy-2(x+y)+4\geqslant x^2+y^2$

Dấu " =" xảy ra khi x = y = 1.

Vậy các cặp số nguyên dương (x; y) cần tìm là: (1;1), (2;1), (1;2).

**Câu 5.**

Vì 50 điểm được tô bởi 3 màu nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 17 điểm được tô cùng màu, không mất tính tổng quát giả sử 17 điểm đó là $A_1, A_2, ..., A_{17}$ được tô cùng màu tím.

Từ $A_1$ ta kẻ được 16 đoạn thẳng đến các điểm $A_2, A_3, .., A_{17}$. Các đoạn này được tô bởi 1 trong 3 màu nên tồn tại 6 đoạn được tô bởi cùng một màu, giả sử đó là $A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_7$ được tô bởi cùng màu đỏ.

Nếu một trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong 6 điểm $A_2, A_3, ..., A_7$ được tô màu đỏ thì bài toán được thỏa mãn.

Nếu các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong 6 điểm $A_2, A_3, ..., A_7$ đều không tô màu đỏ thì chúng được tô bởi 1 trong 2 màu trắng hoặc đen.

Từ $A_2$ ta kẻ được 5 đoạn thẳng đến các điểm $A_3, A_4, ..., A_7$ là $A_2A_3, A_2A_4, ..., A_2A_7$. Trong 5 đoạn này có ít nhất 3 đoạn được tô cùng một màu, giả sử đó là $A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5$ được tô bởi màu trắng.

Xét ba đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong ba điểm $A_3, A_4, A_5$. Nếu có ít nhất một đoạn được tô bởi màu trắng thì bài toán được thỏa mãn. Nếu không có đoạn nào được tô màu trắng thì ba điểm $A_3, A_4, A_5$ thỏa điều kiện bài toán.

**Câu 6.**

Theo đề bài ta có:

$$\frac{(n-1)n}{2}f(n)-\frac{1}{6}(n-1)^3-\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{1}{3}(n-1)+nf(n)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.f(n+1)-\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{3}n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}f(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}.f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow f(n+1)-f(n)=1\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Khi đó: $f(n) - f(n-1) = 1$

$f(n-1) - f(n-2) = 1$

$f(2) - f(1) = 1$

Cộng vế theo vế ta được: $f(n) = n - 1 + f(1)$

$\Rightarrow f(n) = n + a$ với $a = f(1) - 1$, $a \in \mathbb{N}^*$

Thử lại ta thấy đúng.

Vậy $f(n) = n + a$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG
# ĐÀ LẠT

**Câu 1.**

Đây là hệ đối xứng loại II. Ta xét các trường hợp sau:

1/ $xy = 0$: Ta có $(x; y) = (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

2/ $xy < 0$: Do hệ đối xứng nên ta giả sử $x > 0 > y$. Khi đó ta có:

$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) > 1$ và $1 + y^7 < 1$. Vậy hệ vô nghiệm.

3/ $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$: Do hệ đối xứng nên ta giả sử $x > y > 0$.

Khi đó $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) > 1 + x^7 > 1 + y^7$: Hệ vô nghiệm.

4/ $x < 0$, $y < 0$ và $x \neq y$: Giả sử $x < y < 0$. Khi đó nhân phương trình đầu với $1 - x$ và nhân phương trình thứ hai với $1 - y$ ta có:

$$\begin{cases} 1 - x^8 = 1 - x + y^7 - xy^7 & (1) \\ 1 - y^8 = 1 - y + x^7 - yx^7 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) – (1) ta có: $x^8 - y^8 = x - y + x^7 - y^7 - xy(x^6 - y^6)$ (3)

Vì $x < y < 0$ nên ta có: $x^8 - y^8 > 0$, $x - y < 0$, $x^7 - y^7 < 0$, $-xy(x^6 - y^6) < 0$.

Vế trái của (3) là số dương và vế phải của (3) là số âm.

Hệ vô nghiệm.

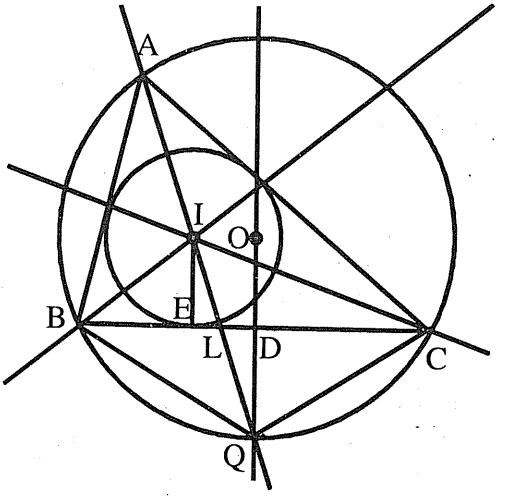
5/ $x = y$: Từ (1) ta có $1 - x^8 = 1 - x + x^7 - x^8$ suy ra $x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Thử lại, ta loại $(x,y) = (1;1)$

Hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(0; 0), (-1; -1)\}$.

Vậy hệ có tập nghiệm là $S = \{(0; 0), (-1;-1)\}$

**Câu 2.**




Gọi D là trung điểm của BC.

Trung trực của BC là đường thẳng OD. Gọi Q là trung điểm cung nhỏ BC.

Ta có: + QB = QC nên Q thuộc OD.

+ $\angle BAQ = \angle QAC$ nên Q thuộc AI.

Vậy AI cắt OD tại Q.

1/ Chứng minh tam giác BQI cân tại Q:

Ta có $\angle IBC = \angle IBC + \angle CBQ = \angle IBC + \angle QAC = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2}$

Mặt khác, $\angle BIQ$ là góc ngoài của tam giác AIB nên: $\angle BIQ = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2}$

Vậy tam giác BQI cân tại Q suy ra: BQ = QI.

2/ Chứng minh AI.LQ = IL.IQ:

+ $\Delta BLQ$ đồng dạng $\Delta ALC$ ($\angle QBL = \angle QAC$, $\angle BLQ = \angle ALQ$), suy ra:

$$\frac{BQ}{LQ} = \frac{AC}{LC} \qquad (*)$$

+ Từ tam giác BQI cân, (*) và tính chất phân giác trong các tam giác ABC, ABL ta có:

$$\frac{IQ}{LQ} = \frac{BQ}{LQ} = \frac{AC}{CL} = \frac{AB}{BL} = \frac{AI}{IL}$$

Vậy: AI. LQ = IL. IQ.

**Câu 3.**

Theo giả thiết ta có: $0 < x < 1$ ; $0 < y < 1$ ; $0 < z < 1$.

Xét $f(t) = t(1 - t^8)$ với $0 < t < 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM với 9 số dương, ta có:

$8[f(t)]^8 = (8t^8)(1 - t^8)^8 = (8t^8)(1 - t^8)(1 - t^8) \dots (1 - t^8)$

$$\le \left[\frac{8t^8 + (1-t^8) + \dots + (1-t^8)}{9}\right]^9 = \left(\frac{8}{9}\right)^9 \Rightarrow f(t) \leqslant \frac{8}{9\sqrt[4]{3}} \Rightarrow \frac{1}{f(t)} \geqslant \frac{9\sqrt[3]{3}}{8}$$

Suy ra:

$$S = \frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8} = \frac{x^4}{x(1-x^8)} + \frac{y^4}{y(1-y^8)} + \frac{z^4}{z(1-z^8)}$$

$$\geqslant \frac{(x^4 + y^4 + z^4)9\sqrt[4]{3}}{8} = \frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$$

Vậy $\min S = \frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$ xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

**Câu 4.**

Phân tích tiêu chuẩn của 399 là 399 = 3.7.19.

Ta chứng minh S lần lượt chia hết cho 3, cho 7 và cho 19.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có: $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, với mọi số nguyên x nguyên tố cùng nhau với 3. Lũy thừa 18 hai vế ta có: $x^{36} \equiv 1 \pmod 3$.

Suy ra: $x^{37} \equiv x \pmod 3$ với mọi x nguyên. Do đó

$$x_1^{37} + x_2^{37} + x_3^{37} + \dots + x_{2013}^{37} \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_{2013} = 0 \pmod 3 \quad (1)$$

(1) chứng tỏ S chia hết cho 3.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có: $x^6 \equiv 1 \pmod 7$ với mọi số nguyên x nguyên tố cùng nhau với 7. Lũy thừa 6 hai vế ta có: $x^{36} \equiv 1 \pmod 7$. Suy ra: $x^{37} \equiv x \pmod 7$ với mọi x nguyên. Do đó

$$x_1^{37} + x_2^{37} + x_3^{37} + \ldots + x_{2013}^{37} \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_{2013} = 0 \pmod 7 \quad (2)$$

(2) chứng tỏ S chia hết cho 7.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có: $x^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ với mọi số nguyên x nguyên tố cùng nhau với 19. Lũy thừa 2 hai vế ta có: $x^{36} \equiv 1 \pmod{19}$.

Suy ra: $x^{37} \equiv x \pmod{19}$ với mọi x nguyên.

Do đó $x_1^{37} + x_2^{37} + x_3^{37} + \ldots + x_{2013}^{37} \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_{2013} = 0 \pmod{19}$ (3)

(3) chứng tỏ S chia hết 19.

Vậy S chia hết cho 399.

**Câu 5**

Xét 210 số: $a_1, a_2, \ldots, a_{70}, a_1 + 4, a_2 + 4, \ldots, a_{70} + 4, a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{70} + 9$.

Trong 210 số này không có số nào vượt quá 209.

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số $a_i + x$ và $a_j + y$ sao cho $a_i + x = a_j + y$ $(x \neq y)$ với x, y là 0, 4 hoặc 9. Suy ra $|a_i - a_j| = 4$ hoặc 5 hoặc 9.

**Câu 6.**

Ta có $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm số thỏa mãn đề bài.

Thật vậy: $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = f(f(n)) + f(n) + n$

$= f(n) + n + n = n + n + n = 3n$.

Ta chứng minh không còn hàm số nào khác.

Gọi f là hàm số cần tìm.

+ Chứng minh f là đơn ánh:

$x, y \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow f(f(f(x))) = f(f((y)))$

$\Rightarrow f(f(f(x))) + f(f(x)) + f(x) = f(f(f(y))) + f(f(y)) + f(y) \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$.

Vậy f là đơn ánh.

+ Chứng minh bằng quy nạp:

Khi $n = 1$, ta có: $f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3$, suy ra $f(f(f(1))) = f((1)) = f(1) = 1$.

Giả sử với $n < k$, ta có: $f(n) = n$. Ta chứng minh $f(k) = k$

Đặt $p = f(k)$.

Nếu $p = f(k) < k$ thì theo giả thiết quy nạp ta có:

$f(p) = p = f(k)$, vô lí vì f là đơn ánh.

Nếu $p = f(k) > k$ thì $f(f(k)) \geq k$ và $f(f(f(k))) \geq k$.

Thật vậy, nếu $f(f(k)) < k$ thì $f(f(f(k))) = f(f(k)) \Rightarrow f(f(k)) = f(k)$

$\Rightarrow f(k) = k$ (vì f đơn ánh). Trái giả thiết $f(k) > k$

Nếu $f(f(f(k))) < k$ thì $f(f(f(f(k)))) = f(f(f(k))) \Rightarrow f(f(f(k))) = f(f(k))$

$\Rightarrow f(f(k)) = f(k) \Rightarrow f(k) = k$. Trái giả thiết $f(k) > k$

Vậy: $f(f(f(k))) + f(f(k)) + f(k) > 3k$. Trái với điều kiện của đề bài.

Do đó $f(k) = k$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Kết luận: $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm duy nhất cần tìm.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM VĨNH LONG

**Câu 1.**

Đặt $S = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2013x^{2012}$ (1)

Suy ra $x.S = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2013x^{2013}$ (2)

Trừ theo vế của (2) cho (1) ta được

$S.(x-1) = 2013x^{2013} - (1 + x + x^2 + ... + x^{2012})$ hay

$S.(x-1)^2 = (x-1)\left[2013x^{2013} - (1 + x + x^2 + ... + x^{2012})\right]$.

Phương trình đã cho tương đương với

$S.(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)\left[2013x^{2013} - (1 + x + x^2 + ... + x^{2012})\right] = 1$

$\Leftrightarrow x^{2013}\left[2013x - 2014\right] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{2014}{2013}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{0; \dfrac{2014}{2013}\right\}$.

**Câu 2.**

Đặt $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MCD} = \beta$ và $OE = x, OF = y$.

Ta sẽ tìm hệ thức ràng buộc giữa $x$ và $y$ khi $M$ chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BD}$.

Ta có $\widehat{AMC} = \widehat{CMB} = \dfrac{\pi}{4}$ nên $MF$ là tia phân giác góc vuông $\widehat{AMB}$, do đó

$\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{MB}{MA} = \tan\alpha$.

Từ đó $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ và $\dfrac{1-y}{1+y} = x \Rightarrow xy + x + y = 1$ $(0 < x, y < 1)$.

Vì $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}, x + y \leqslant \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ nên $\dfrac{1}{2}EF^2 + EF\sqrt{2} \geqslant xy + x + y = 1$

$(x^2 + y^2 = EF^2)$ hay $EF^2 + 2EF\sqrt{2} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow (EF + \sqrt{2})^2 \geqslant 4$,

do đó $EF \geqslant 2 - \sqrt{2}$.

Vậy $EF$ có độ dài ngắn nhất bằng $2 - \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1$ (1)

Gọi $I$ là giao điểm của $OM$ và $EF$, ta có

$\overline{IE} = -\overline{IF} \Leftrightarrow S_{OME} = S_{OMF} \Leftrightarrow OM.OE.\sin 2\beta = OM.OF.\sin 2\alpha$

$\Leftrightarrow x\sin\beta\cos\beta = y\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow x\dfrac{OF.OC}{CF^2} = y\dfrac{OE.OA}{AE^2} \Leftrightarrow \dfrac{xy}{CF^2} = \dfrac{xy}{AE^2}$;

Do đó $\overline{EI}.\overline{IF} = CF^2 = AE^2 \Leftrightarrow OF^2 = OE^2 \Leftrightarrow x = y\,(2)$

Từ (1) và (2) ta được đpcm.

**Câu 3.**

Giả sử $x = a, y = b, z = c$ là nghiệm nguyên của hệ phương trình trên.

Đặt $f(t) = 2t^3 - 7t^2 + 8t - 2$. Ta có $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$.

Xét trường hợp $a, b, c$ đôi một khác nhau, suy ra

$$a - b \neq 0, b - c \neq 0, c - a \neq 0.$$

Từ hằng đẳng thức $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + ... + y^{n-1})$, suy ra

$$\left(f(a) - f(b)\right) \vdots \left|a - b\right|; \left(f(b) - f(c)\right) \vdots \left|b - c\right|; \left(f(c) - f(a)\right) \vdots \left|c - a\right|.$$

Do đó $b - c = k(a - b)$, $c - a = m(b - c)$, $a - b = n(c - a)$ với $k, m, n$ là các số nguyên.

Suy ra $(b - c)(c - a)(a - b) = kmn(a - b)(b - c)(c - a)$.

Từ đó dẫn đến $kmn = 1$. Do đó trong ba số $k, m, n$ có một số bằng 1 hoặc cả ba số bằng 1, từ đó $a = b = c$, mâu thuẫn.

Vậy hệ phương trình trên nếu có nghiệm nguyên $x, y, z$ thì $x = y = z$. Suy ra

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = x \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(2x - 1) = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm nguyên là $x = 1, x = 2$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm nguyên $(x; y; z)$ là $(1;1;1)$ và $(2,2,2)$.

**Câu 4.**

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{y+z}{3yz(4-9yz)} + \frac{z+x}{3zx(4-9zx)} + \frac{x+y}{3xy(4-9xy)} \geqslant 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{y+z}{3yz(4-9yz)} \geqslant \frac{2\sqrt{yz}}{3yz(4-9yz)} = \frac{2}{3\sqrt{yx}\left(2-3\sqrt{yz}\right)\left(2+3\sqrt{yz}\right)}$$

$$\geqslant \frac{2}{\frac{3\sqrt{yz} + \left(2 - 3\sqrt{yz}\right)}{2} \cdot \left(2 + \frac{3(y+z)}{2}\right)} = \frac{4}{4 + 3y + 3z}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{z+x}{3zx(4-9zx)} \geqslant \frac{4}{4+3z+3x}; \frac{x+y}{3xy(4-9xy)} \geqslant \frac{4}{4+3x+3y}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, suy ra

$$\frac{y+z}{3yz(4-9yz)}+\frac{z+x}{3zx(4-9zx)}+\frac{x+y}{3xy(4-9xy)}$$

$$\geqslant\frac{4}{4+3y+3z}+\frac{4}{4+3z+3x}+\frac{4}{4+3x+3y}$$

$$\geqslant\frac{9.4}{4+4+4+6(x+y+z)}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

**Câu 5.**

Từ điều kiện a), ta suy ra $f(x + n) = f(x) + n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Với $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, ta có

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = \left(f\left(\frac{p}{q}+q\right)\right)^2 = \left(q+f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^2 = q^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

Mặt khác $f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = f\left(\frac{(p+q^2)^2}{q}\right)^2 = f\left(q^2+2p+\frac{p^2}{q^2}\right) = q^2 + 2p + f\left(\frac{p}{q}\right)^2$

Suy ra $2qf\left(\frac{p}{q}\right) = 2p$ hay $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$.

Phép thử lại cho ta $f(x) = x$, với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$.

**Câu 6.**

Giả sử trước khi tô màu, các ô của bàn cờ có màu đen, trắng như thông thường. Khi đó, các ô kề với ô màu đen có màu trắng và ngược lại, ô kề với ô màu trắng là ô màu đen. Nếu ta tô một ô màu đen bởi màu đỏ, khi đó ta phải tô hai ô trắng lân cận với ô màu đỏ. Với mỗi ô màu trắng được tô màu đỏ, ta phải tiếp tục tô ít nhất hai ô màu đen lân cận với ô màu đỏ. Vậy nếu dùng một màu thì màu đó phải được tô ít nhất bốn ô.

Do đó $k \leqslant \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor = 16$.

Xét cách tô như sau

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 |
| 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 |
| 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 |

Vậy $\max k = 16$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC - LÂM ĐỒNG

**Câu 1.**

a) Điều kiện: $x \geqslant -\frac{7}{5}$

$$\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+x^2-x-3=\sqrt{5x-7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}-(x+2)+x^2-x-3=\sqrt{5x+7}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-3}{\sqrt[3]{(x^3+7x^2+11x+5)^2}+(x+2)\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+(x+2)^2}+$$

$$+x^2-x-3+\frac{x^2-x-3}{\sqrt{5x+7}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-3)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+7x^2+11x+5)^2}+(x+2)\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+(x+2)^2}+\right.$$

$$\left.+1+\frac{1}{\sqrt{5x+7}+x+2}\right]=0 \ (*)$$

Vì $\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+7x^2+11x+5)^2}+(x+2)\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+(x+2)^2}+$

$$+1+\frac{1}{\sqrt{5x+7}+x+2}>0, \forall x \geqslant -\frac{7}{5}$$

Nên $(*) \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$ (nhận)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

b) $x=\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{3-x}$. Điều kiện: $x \leqslant 3$

Đặt $a=\sqrt{3-x}; b=\sqrt{4-x}; c=\sqrt{5-x}$ ; $a,b,c \geqslant 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=3-a^2 \\ ab+bc+ca=4-b^2 \\ ab+bc+ca=5-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c)=3 \ (1) \\ (a+b)(b+c)=4 \ (2) \\ (a+c)(b+c)=5 \ (3) \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c)=\sqrt{60}$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

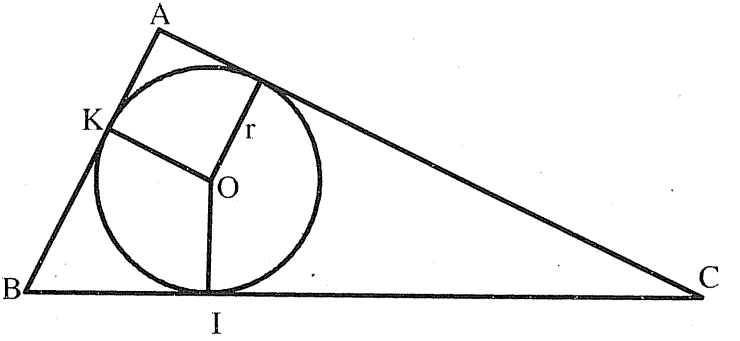
$$\begin{cases} b+c=\dfrac{\sqrt{60}}{3} \\ a+c=\dfrac{\sqrt{60}}{4} \\ a+b=\dfrac{\sqrt{60}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x}+\sqrt{5-x}=\dfrac{\sqrt{60}}{3} \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{3-x}=\dfrac{\sqrt{60}}{4} \\ \sqrt{3-x}+\sqrt{4-x}=\dfrac{\sqrt{60}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{671}{240} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{671}{240}$.

**Câu 2.**

Gọi (O;r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và H, K lần lượt là tiếp điểm (O;r) với cạnh AC, AB.

Gọi S, p lần lượt là diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC.




Ta có: 2S = AB.AC = (AK + KB)(AH + HC)

= (r + KB)(r + HC) = (r + BI)(r + CI) = $r^2$ + r.CI + BI.r + BI.CI

= r(r + CI + BI) + BI.CI = r.p + BI.CI (vì p = r + CI + BI) = S + BI.CI.

Suy ra: BI.CI = 2S – S = S.

**Câu 3.**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b)$

Thật vậy: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \geqslant (a+b)(2ab-ab)=ab(a+b)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ta có: $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b) \Leftrightarrow \dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(a+b)} \geqslant \dfrac{1}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{a^2c+b^2c-1}{ab(a+b)} \geqslant \dfrac{c}{a+b}$ (1)

Tương tự, ta cũng chứng minh được: $\dfrac{a^2b+bc^2-1}{ac(a+c)} \geqslant \dfrac{b}{a+c}$ (2)

$\dfrac{ab^2+ac^2-1}{bc(b+c)} \geqslant \dfrac{a}{b+c}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế, ta được:

$$\frac{a^2b+bc^2-1}{ac(a+c)}+\frac{ab^2+ac^2-1}{bc(b+c)}+\frac{a^2c+b^2c-1}{ab(a+b)}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ (*)$$

Mà:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)].$$

$$.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\geqslant\frac{1}{2}.9-3=\frac{3}{2}(**)$$

Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 4.**

**Trường hợp 1:** p = 2, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}9=2x^2\\11=2y^2\end{cases}$ : Không có nghiệm x, y nguyên dương.

**Trường hợp 2:** p = 3, ta có hệ phương trình

$\begin{cases}10=2x^2\\16=2y^2\end{cases}$ : Không có nghiệm x, y nguyên dương.

**Trường hợp 3:** p = 5, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}12=2x^2\\32=2y^2\end{cases}$ : Không có nghiệm x, y nguyên dương.

**Trường hợp 4:** p = 7, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}14=2x^2\\56=2y^2\end{cases}$ : Không có nghiệm x, y nguyên dương.

**Trường hợp 5:** p > 7

Ta có: $2x^2\equiv 7\equiv 2y^2 \pmod p \Rightarrow x\equiv \pm y \pmod p$ (do (2 ; p)=1)

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}x^2<y^2\\x,y<p\end{cases}\Rightarrow x<y<p\Rightarrow x+y=p\Rightarrow y=p-x$.

Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow p^2+7=2(p-x)^2\Leftrightarrow p^2+7=2p^2-4px+2x^2\Leftrightarrow p=4x-1\ (3)$$

Thay (3) vào (1),ta có:

$$4x+6=2x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(loại)}\\x=3\end{array}\right.$$

Vậy x = 3 $\Rightarrow p=11, y=8$

**Câu 5.**

Gọi d là đường thẳng chia hình vuông ABCD thành hai tứ giác có tỉ số diện tích 2 : 3. Đường thẳng d không thể cắt hai cạnh kề nhau của hình vuông vì khi đó không tạo thành hai tứ giác. Giả sử d cắt hai cạnh AB và CD tại M và N, khi đó nó cắt đường trung bình EF tại I.

Giả sử $S_{AMND} = \frac{2}{3}S_{BMNC}$ thì $EI = \frac{2}{3}IF$

Như vậy, mỗi đường thẳng đã cho chia các đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$.

Có 4 điểm chia các đường trung bình của hình vuông ABCD theo tỉ số $\frac{2}{3}$.

Có 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua một trong 4 điểm. Vậy theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 4 đường thẳng đi qua một điểm.

**Câu 6.**

Giả sử tồn tại hàm số f(n) thỏa yêu cầu bài toán. Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n) = 1$ thì theo (1) ta có $f(n+1) = f(n + f(n)) = f(n) = 1$

Điều này là có thể vì theo giả thiết, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n_0) = 1$ nên theo nguyên lí quy nạp ta có

$f(n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0$

Kí hiệu $S := \{n \in \mathbb{N}^* \mid f(n) \neq 1\}$.

Khi đó $S$ hữu hạn. Nếu $S = \varnothing$ thì $f(n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $S \neq \varnothing$ thì do $S$ hữu hạn nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ là phần tử lớn nhất của $S$.

Khi đó:

$f(n_1 + f(n_1)) = f(n_1) \neq 1 \Rightarrow n_1 + f(n_1) \in S$ mâu thuẫn vì $n_1 + f(n_1) > n_1$ và $n_1$ là phần tử lớn nhất của $S$. Vậy $S = \varnothing$.

Do đó $f(n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ là hàm duy nhất cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU - ĐẮK LẮK

**Câu 1.**

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xy + 3x + 2y + 6 + 2(x+2)\sqrt{y+2}} - \sqrt[3]{xy + 2x + y + 2} = 1 & (1) \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{y - 3x + 2} + 2x^2y - 7x^3 + 7x^2 - 6x = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geqslant \frac{1}{2}; y \geqslant -2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)\left(\sqrt{y+2}+1\right)^2} = 1+\sqrt[3]{(x+1)(y+2)} \qquad (3)$$

Đặt $a = x+1 > 0$ và $b = \sqrt{y+2} \geqslant 0$

Từ (3) ta có: $\sqrt[3]{(1+a)(1+b)^2} = 1+\sqrt[3]{ab^2}$

$$\Leftrightarrow 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{1+a}.\frac{1}{1+b}.\frac{1}{1+b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{1+a}.\frac{b}{1+b}.\frac{b}{1+b}} \qquad (4)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+a}.\frac{1}{1+b}.\frac{1}{1+b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{1+a}.\frac{b}{1+b}.\frac{b}{1+b}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+b}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}\right)=1$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Suy ra phương trình (4) $\Leftrightarrow a = b$ hay $x+1 = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow y = x^2+2x-1$ (5)

Thay (5) vào (2) ta có:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+2x^4-3x^3+5x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x^2-x+1}-1\right)+2x^4-3x^3+5x^2-6x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(x-1)(2x-1)\left(x^2+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x}{\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(2x-1)\left(x^2+2\right)\right)=0$$

$\Leftrightarrow x = 1$

(vì: $\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(2x-1)\left(x^2+2\right)>0$

với mọi $x \geqslant \dfrac{1}{2}$)

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2)$

**Câu 2.**

Đặt x = tanA, y = tanB, z = tanC

Vì tanA + tanB + tanC = tanA.tanB.tanC và tam giác ABC nhọn nên ta có

$x, y, z > 0$ và $x + y + z = xyz$ (1)

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\sqrt[3]{xyz} \geqslant \sqrt{3}$.

Vì tam giác ABC nhọn nên có nhiều nhất một góc bé hơn $45^0$.

- Nếu có một góc bé hơn $45^0$ thì $(\tan A-1)(\tan B-1)(\tan C-1)<0$ (không thỏa mãn).

- Nếu cả ba góc đều không bé hơn $45^0$ thì $x, y, z \geqslant 1$.

Đặt $a = x-1,\ b = y-1,\ c = z-1 \Rightarrow a, b, c \geqslant 0$

Từ (1) và bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$2 = abc + ab + bc + ca \geqslant t^3 + 3t^2, t = \sqrt[3]{abc}, t \geqslant 0$

$\Rightarrow t^3 + 3t^2 - 2 = (t+1)(t^2+2t-2) \geqslant 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 2 \geqslant 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \geqslant \sqrt{3}-1 \\ t \leqslant -\sqrt{3}-1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (\tan A-1)(\tan B-1)(\tan C-1) = abc = t^3 \geqslant \left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 6\sqrt{3}-10$.

Theo đề bài, ta có $(\tan A-1)(\tan B-1)(\tan C-1) = 6\sqrt{3}-10$

nên $t = \sqrt{3}-1 \Rightarrow x = y = z = \sqrt{3}$, hay tam giác ABC đều.

**Câu 3.**

+ Nếu $|x| \leqslant 1$. Đặt x = cost.

Ta có

$\cos 3t = 4x^3 - 3x, \cos 2t = 2x^2 - 1, \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, \sin 2t = 2\sin t\cos t$

$\cos 5t = \cos 3t\cos 2t - \sin 3t\sin 2t$

$= (4x^3-3x)(2x^2-1) - 2x(1-x^2)(3-4(1-x^2)) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

Suy ra $|f(x)| = |\cos 5t| \leqslant 1$

+ Nếu $1 \leqslant |x| \leqslant 2$.

Do $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ là hàm số lẻ nên ta chỉ cần xét $1 \leqslant x \leqslant 2$

Đặt $x = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) \Leftrightarrow m^2 - 2xm + 1 = 0 \Leftrightarrow m = x \pm \sqrt{x^2-1}$.

Chọn $m = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow 1 \leqslant m \leqslant 2 + \sqrt{3}$.

Ta có $32x^5 = \left(m + \frac{1}{m}\right)^5 = m^5 + \frac{1}{m^5} + 5\left(m^3 + \frac{1}{m^3}\right) + 10\left(m + \frac{1}{m}\right)$;

$$8x^3 = \left(m + \frac{1}{m}\right)^3 = m^3 + \frac{1}{m^3} + 3\left(m + \frac{1}{m}\right)$$

$\Rightarrow f(x) = 16^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = g(t)$, với $t = m^5 \Rightarrow 1 \leqslant t \leqslant \left(2+\sqrt{3}\right)^5$

Xét $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \left(2+\sqrt{3}\right)^5 \Rightarrow 2\left(g(t_2) - g(t_2)\right) = \left(t_2 - t_1\right)\left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right) \geqslant 0$

$\Rightarrow$ g(t) là hàm số đồng biến trên $\left[1;\left(2+\sqrt{3}\right)^5\right]$

$\Rightarrow 1 \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^5 + \left(2-\sqrt{3}\right)^5\right) = 362$

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = 2.

Do f(x) là hàm số lẻ nên khi $-2 \leqslant x \leqslant -1 \Rightarrow -362 \leqslant f(x) \leqslant -1$.

Vậy $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 362$ khi x = 2; $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -362$ khi x = –2.

**Câu 4.**

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng: $a \leqslant b$

Từ giả thiết ta có: $a^2\left(b^2+1\right) = c^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 + 1 = \frac{(c+b)(c-b)}{a^2}$ (1)

Suy ra tồn tại hai số nguyên dương n và k sao cho

$nk = a^2$ với $n \mid (c+b)$ và $k \mid (c-b)$.

Vì $\left(b^2+1\right)$ là số nguyên tố nên ta phải có: $\frac{c+b}{n} = 1$ hoặc $\frac{c-b}{k} = 1$

**Trường hợp 1**: $\frac{c+b}{n} = 1$

Từ (1) ta có: $b^2 + 1 = \frac{c-b}{k}$, thay c = n – b, ta có: $k = \frac{n-2b}{b^2+1}$

Ta có $k = \frac{n-2b}{b^2+1} \leqslant \frac{a^2-2b}{b^2+1} < \frac{b^2-2b}{b^2+1} < 1$ (vô lí vì k nguyên dương)

**Trường hợp 2**: $\frac{c-b}{k} = 1$

Từ (1) ta có: $b^2 + 1 = \frac{c+b}{n}$, thay c = b + k ta có: $n = \frac{2b+k}{b^2+1}$ (2)

$$n = \frac{2b+k}{b^2+1} \leqslant \frac{2b+a^2}{b^2+1} \leqslant \frac{2b+b^2}{b^2+1} < \frac{2(1+b^2)}{b^2+1} = 2$$

Do n là số nguyên dương nên n = 1.

Suy ra $k = a^2$, thay vào (3) ta được: $a^2 = (b-1)^2 \Leftrightarrow a = b-1$

Vì $a^2+1$ và $(a+1)^2+1 = b^2+1$ là các số nguyên tố khác tính chẵn lẻ, nên

$a^2+1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Suy ra: a = 1, b = 2 và c = 3.

Vậy có hai bộ số (a ; b ; c) thỏa mãn đề bài là (1 ; 2 ; 3) và (2 ; 1 ; 3).

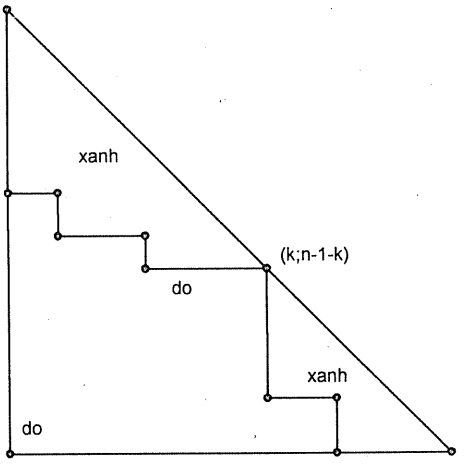
**Câu 5.**

Gọi số điểm màu xanh có hoành độ i là $a_i$ và số điểm màu xanh có tung độ i là $b_i$, với $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Ta cần chứng minh $a_0a_1....a_{n-1} = b_0b_1....b_{n-1}$, ở đây ta sẽ chỉ ra $a_0, a_1, ...., a_{n-1}$ là một hoán vị của $b_0, b_1, ...., b_{n-1}$ (*)

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp theo n.

Với n =1: Hiển nhiên (*) đúng.

Với n > 1. Giả sử (*) đúng với mọi giá trị nhỏ hơn n.




Nếu mọi điểm (x; y) với x + y = n – 1 có màu xanh. Bỏ qua các điểm này, ta được hình tam giác vuông cân với hai cạnh góc vuông có độ dài n – 1, trong đó số điểm màu xanh trên mỗi cột là: $a_0 - 1; a_1 - 1; ...; a_{n-2} - 1$ và số điểm màu xanh trên mỗi hàng là: $b_0 - 1$; $b_1 - 1$;...; $b_{n-2} - 1$.

Theo giả thiết quy nạp ta có: $a_0 - 1; a_1 - 1; ...; a_{n-2} - 1$ là hoán vị của:

$b_0 - 1; b_1 - 1; ...; b_{n-2} - 1$ và do $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$ nên ta có (*)

Nếu có điểm (k; n – 1 – k) là màu đỏ, thì toàn bộ các điểm (x;y) của hình chữ nhật với $x \leqslant k$ và $y \leqslant n-1-k$ là có màu đỏ.

Do đó, xét các điểm (x;y) với x < k, thì theo giả thiết quy nạp ta có: $a_0; a_1; ...; a_{k-1}$ là hoán vị của: $b_{n-k}; b_{n-k+1}; ...; b_{n-1}$; và tương tự thì:

$a_{k+1}; a_{k+2}; ...; a_{n-1}$ là hoán vị của: $b_0; b_1; ...; b_{n-2-k}$, và vì $a_k = b_{n-1-k} = 0$ nên ta cũng được (*).

**Câu 6.**

Thay m = 0 vào giả thiết ta có: $f(n)+f(-1)=f(0).f(n)+2$

$\Rightarrow f(n).(1-f(0))=2-f(-1)$

- Nếu $f(0)\neq 1$ thì $f(x)=c, \forall x\in\mathbb{Z}$, ta có:

$$2c=c^2+2\Leftrightarrow (c-1)^2+1=0 \text{ (vô lí)}$$

- Nếu $f(0)=1\Rightarrow f(-1)=2$

Thay m = –1 ta có: $f(n-1)+f(-n-1)=2f(n)+2$ (1)

Thay n bởi –n vào (1) ta có $f(n-1)+f(-n-1)=2f(-n)+2$ (2)

Suy ra $f(n)=f(-n)\quad \forall n\in Z$, hay f là hàm chẵn

Từ (2) ta có: $f(n-1)+f(n+1)=2f(n)+2$

Với $n\geqslant 0$, đặt $u_n=f(n), v_n=u_n-u_{n-1}$

$$\Rightarrow v_1=u_1-u_0=1, v_{n+1}=v_n+2\Rightarrow v_n=2n-1$$

$$\Rightarrow u_n=\sum_{k=1}^{n}v_k+u_0=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+1=n^2+1$$

Do f là hàm chẵn nên $f(n)=n^2+1,\ n\in\mathbb{Z}$.

Thử lại ta có $f(n)=n^2+1,\ n\in\mathbb{Z}$, thỏa mãn điều kiện bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG
# TIỀN GIANG

**Câu 1**

Phương trình đã cho tương đương

$$8(x-1)^3+24x^2-14x-9=8\sqrt[3]{16(x-1)-(24x^2-14x-9)}$$

Đặt $u=2(x-1), v=\sqrt[3]{16(x-1)-(24x^2-14x-9)}$

Ta có hệ $\begin{cases} u^3+24x^2-14x-9=8v & (1)\\ v^3+24x^2-14x-9=8u & (2)\end{cases}$

Lấy $(1)$ trừ $(2)$, ta được:

$$u^3-v^3+8(u-v)=0\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+8)=0\Leftrightarrow u=v$$

$$u = v \Leftrightarrow 2(x-1) = \sqrt[3]{16(x-1) - (24x^2 - 14x - 9)}$$

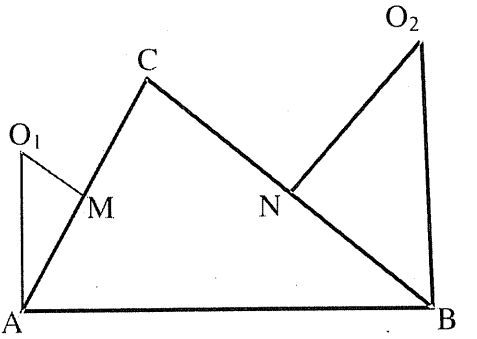
$$\Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Xét $|x| \leqslant 1$, đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$.

Khi đó ta được $S = \left\{\cos\frac{\pi}{9}; \cos\frac{5\pi}{9}; \cos\frac{7\pi}{9}\right\}$

Vì phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm nên S cũng chính là tập nghiệm của phương trình.

**Câu 2.**




a) Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$.

Kí hiệu $O_1, O_2$ là tâm các đường tròn $(T_1), (T_2)$ thì $O_1$ là giao điểm của đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $A$ và trung trực đoạn $AC$, $O_2$ là giao điểm của đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $B$ và trung trực đoạn $BC$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh $AC, BC$.

Ta có $\widehat{MAO_1} = |90^o - A|$ nên:

$$R_1 = AO_1 = \frac{AM}{\cos|90^o - A|} = \frac{AC}{2\sin A}$$

Theo định lí sin cho $\Delta ABC$: $AC = 2R.\sin B$, suy ra:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_1 = \frac{b}{a}.R \ (1)$$

Tương tự, ta có: $R_2 = \frac{a}{b}.R$ (2)

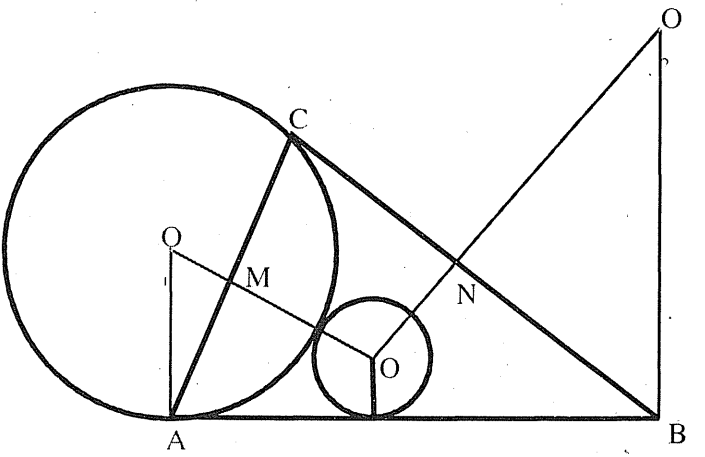
Từ đó: $R_1R_2 = R^2 \Rightarrow R_1; R; R_2$ lập thành cấp số nhân.

b) Gọi O là tâm đường tròn $(C)$ tiếp xúc với $(T_1), (T_2)$ và đường thẳng $AB$ tại $P$ và $r$ là bán kính của đường tròn $(C)$.

Từ hình thang vuông $APOO_1$, suy ra:

$$AP = \sqrt{(R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2} = 2\sqrt{rR_1}$$

Tương tự: $BP = \sqrt{\left(R_2 + r\right)^2 - \left(R_2 - r\right)^2} = 2\sqrt{rR_2}$




Vậy $AB = AP + BP = 2\left(\sqrt{rR_1} + \sqrt{rR_2}\right) \Rightarrow r = \dfrac{AB^2}{4\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2}$

Đặt AB = c, BC = a, AC = b.

Từ (1) và (2), ta được: $r = \dfrac{abc^2}{4R\left(a+b\right)^2}$ (3)

Vì $\dfrac{ab}{\left(a+b\right)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ và $c \leqslant 2R$ nên từ (3) suy ra: $r \leqslant \dfrac{R}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} a = b \\ c = 2R \end{cases}$, lúc này ta được $\angle A = \angle B = 45^0; \angle C = 90^0$.

**Câu 3.**

Vì $x, y, z > 0$ thỏa $xy + yz + zx = 1$ nên ta đặt

$$x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2} \text{ với } A + B + C = \pi.$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{1+\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2} \leqslant 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

hay $\cos A + \cos B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Vì $\left|\dfrac{A-B}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \geqslant 0$

suy ra

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \leqslant 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{C}{2}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$2\sin\frac{C}{2} + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ hay } \sin\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Ta có $\sin\dfrac{C}{2} \geqslant 0, 1+\cos\dfrac{C}{2} \geqslant 0$ với $C \in (0;\pi)$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4}$$

Suy ra $\sin\dfrac{C}{2}\left(1+\cos\dfrac{C}{2}\right) \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2} = 1+\cos\dfrac{C}{2} \\ \sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B=\dfrac{\pi}{6} \\ C=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\tan\dfrac{\pi}{12} \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$$

**Câu 4.**

Vì $21168 = 2^4.3^3.7^2$ nên mỗi số $\dfrac{a}{b}$ có dạng $2^a.3^b.7^c$ mà $a,b,c$ là các số nguyên thỏa mãn $a \in [-4;4], b \in [-3;3], c \in [-2;2]$.

Do đó, mỗi số $\dfrac{a}{b}$ chỉ xuất hiện một lần trong khai triển sau:

$$A = \sum_{a\in[-4;4],b\in[-3;3],c\in[-2;2]} 2^a.3^b.7^c$$

$$= \left(2^{-4}+...+2^4\right)\left(3^{-3}+...+3^3\right)\left(7^{-2}+...+7^2\right)$$

Suy ra $A = \dfrac{1}{2^4.3^3.7^2}.\dfrac{2^9-1}{2-1}.\dfrac{3^7-1}{3-1}.\dfrac{7^5-1}{7-1} = \dfrac{\left(2^9-1\right)\left(3^7-1\right)\left(7^5-1\right)}{2^6.3^4.7^2}$

**Câu 5.**

Nếu có $2013$ chiếc tách đều lật ngửa thì ta không thể lật úp tất cả được.

Thật vậy, theo quy tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có $k$ tách đặt ngửa được làm úp xuống thì có $100-k$ tách đang úp xuống được lật ngửa lên.

Khi ấy số tách úp xuống đã tăng lên $k$ chiếc và giảm đi $100-k$ chiếc.

Vậy số tách úp bị thay đổi đi một lượng là $k-\left(100-k\right)=2k-100$ là một số chẵn tách, nghĩa là tính chẵn lẻ không thay đổi. Vì lúc đầu số tách úp bằng 0 nên không thể làm cho $2013$ tách úp được.

Nếu có $2012$ tách thì có thể làm tất cả các tách úp được. Thuật toán như sau:

Đánh số thứ tự các tách $1,2,3,...,2012$. Lần lượt, mỗi lần úp $100$ tách kề nhau theo thứ tự, sau $19$ lần úp được $1900$ tách chuyển từ ngửa sang úp.

Tiếp theo úp tách số $1901,1903,1904,...,2001$ và để nguyên tách $1902$ đang ngửa. Lần thứ hai đảo ngược các tách $1902,1903,1904,...,2001$ và để nguyên tách $1901$ đang úp.

Sau hai lần như vậy, thực chất chỉ có tách $1901,1902$ bị úp, các tách khác không đổi. Tiếp tục như vậy, sau $12$ lần, ta úp được các tách số $1901,1902,1903,...,1912$ và còn lại đúng $100$ tách $1913,1914,...,2012$ ngửa.

Ta úp $100$ tách này xuống, thế là hoàn thành xong.

Vậy sau $19+12+1=32$ lần thực hiện, tất cả $2012$ tách đều bị lật úp.

**Câu 6.**

Trước hết ta chứng minh $f$ đơn ánh. Thậy vậy, giả sử $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$

$\Rightarrow f\left(m+f\left(n_1\right)\right)=f\left(m+f\left(n_2\right)\right)$

$\Rightarrow n_1+f\left(m+2013\right)=n_2+f\left(m+2013\right), \forall m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n_1=n_2$

Vậy $f$ đơn ánh.

Lấy $m=f\left(1\right)$, ta có $f\left(f\left(1\right)+f\left(n\right)\right)=n+f\left(f\left(1\right)+2013\right)$

$\Leftrightarrow f\left(f\left(1\right)+f\left(n\right)\right)=n+1+f\left(2013+2013\right)$

$\Leftrightarrow f\left(f\left(1\right)+f\left(n\right)\right)=f\left(f\left(n+1\right)+2013\right)$

Vì $f$ đơn ánh nên $f\left(1\right)+f\left(n\right)=f\left(n+1\right)+2013$.

hay $f(n+1) = f(n) + f(1) - 2013$

Suy ra $f(n)$ là cấp số cộng có công sai $d = f(1) - 2013$ và số hạng đầu là $f(1)$

Do đó $f(n) = (f(1) - 2013)n + 2013$

tức là $f(n) = an + b$, với $a = f(1) - 2013$

Từ điều kiện ban đầu ta có

$f(1 + f(1)) = 1 + f(2014) \Leftrightarrow a(f(1) - 2013) = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$, vì $a > 0$.

Do đó $f(n) = n + 2013, n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn đề bài.

Vậy $f(n) = n + 2013, n \in \mathbb{N}^*$.

## TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI

**Câu 1.**

Điều kiện $x > 0; y > 0$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{y+2x} = 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{y}} - \dfrac{4}{y+2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{y+2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = 1 \\ \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{y+2x} \end{cases}$

Xét phương trình $\dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{y+2x_n}$.

Ta có $\dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{y+2x} \Leftrightarrow y^2 + 2xy - 8x^2 = 0$

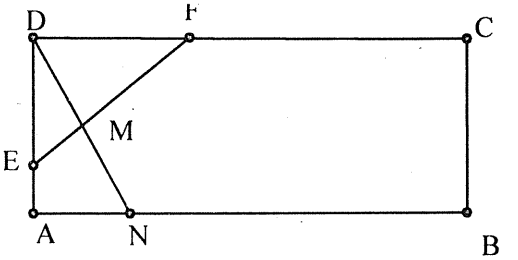
$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = -4 \\ \dfrac{y}{x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2x \text{ (vì } x > 0; y > 0\text{)}.$$

Do đó hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2} \\ y = 6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2} \\ y = 6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$

**Câu 2.**




Đặt $\widehat{EFD} = \alpha$ và gọi M là giao điểm của EF và DN.

Ta có: $S_{EFD} = \frac{1}{2}EF.MD$ (1)

Mặt khác vì $\widehat{ADN} = \widehat{EFD} = \alpha$

Nên: $MD = \frac{1}{2}DN = \frac{1}{2}\frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}$ (2)

Lại có:

$EF = ME + MF = MD.\tan\alpha + MD.\cot\alpha$

$= MD(\tan\alpha + \cot\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha.\cos^2\alpha}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $S_{EFD} = \frac{1}{8\sin\alpha.\cos^3\alpha}$

Vì $0,2 < AN < 1 = AD$ nên $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

Xét $P = \sin\alpha.\cos^3\alpha \Rightarrow P^2 = \sin^2\alpha.\cos^6\alpha = 27.\sin^2\alpha.\left(\frac{\cos^2\alpha}{3}\right)^3$

$$\leqslant 27\left(\frac{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{3} + \frac{\cos^2\alpha}{3} + \frac{\cos^2\alpha}{3}}{4}\right)^4 = \frac{27}{4^4}$$

Suy ra $P \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Do đó: $S_{EFD} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{3} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó $AN = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác EFD bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $AN = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 3.**

Vì tổng của m số dương chẵn khác nhau không nhỏ hơn

$$2+4+6+...+2m=2(1+2+3+...+m)=2.\frac{m(m+1)}{2}=m^2+m$$

và tổng của n số dương lẻ khác nhau cũng không nhỏ hơn

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Do đó $2369 \geqslant m^2+m+n^2=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2-\frac{1}{4}$

hay $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2 \leqslant \frac{9477}{4}$.

Ta có $P=3m+2n=3\left(m+\frac{1}{2}\right)+2n-\frac{3}{2}$

$$\leqslant \sqrt{\left(3^2+2^2\right)\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\right]}-\frac{3}{2} \leqslant \sqrt{13.\frac{9477}{4}}-\frac{3}{2}=174.$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}3m+2n=174\\ m^2+m+n^2=2369\end{cases}$

Ta có $3m+2n=174 \Rightarrow n=87-3.\frac{m}{2}$, do đó $m=2t; n=87-3t$.

Suy ra $(2t)^2+(2t)+(87-3t)^2=2369 \Leftrightarrow t^2-40t+400=0 \Leftrightarrow t=20$.

Tức là hệ có nghiệm nguyên $\begin{cases}m=40\\ n=27\end{cases}$.

Tóm lại ta có: $P \leqslant 174, \forall m,n$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Hơn nữa, ứng với $m=40; n=27$ thì $P=174$ và

$$(2+4+6+...+2.40)+\left[1+3+5+...+(2.27-1)\right]=2369.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 174.

**Câu 4.**

Trước hết ta thấy $(2001!-1)^{2011}+1 \equiv 0 \pmod{2011!}$

Xét số nguyên n trong khoảng $(0;2011!)$ thoả mãn điều kiện $n^{2011}+1$ chia hết cho $2011!$.

Gọi p là một số nguyên tố không vượt quá 2011.

Khi đó p là ước của $2011!$ nên

$p \mid n^{2011}+1 \Rightarrow p \mid -n^{2011}-1 \Rightarrow p \mid (-n)^{2011}-1$.

Mặt khác theo định lí Fermat ta có $p \mid (-n)^{p-1}-1$

Suy ra $p \mid (-n)^{d}-1$, trong đó d = (2011, p – 1) = 1

Như vậy cuối cùng ta được $p \mid n+1$.

Chọn $p = 2011$ ta được $2011 \mid n+1$ (1)

Nếu ta xét p < 2011 thì $A = \left(n^{2010} - n^{2009} + \ldots - a + 1\right) \equiv n \not\equiv 0 \pmod p$ nên $A$ và $2010!$ nguyên tố cùng nhau và do đó theo khai triển

$n^{2011}+1 = (n+1)\left(n^{2010} - n^{2009} + \ldots - a + 1\right)$ ta suy ra $2010! \mid n+1$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $2011! \mid n+1$. Nhưng vì n là số nguyên trong khoảng $(0; 2011!)$ nên ta có $n+1 = 2011!$ hay n = 2011! – 1.

Bài toán được chứng minh.

**Câu 5.**

a) Giả sử X là một tập **đẹp**. Với mỗi phần tử $x \in X$ thì $11 - x \notin X$, do đó X có nhiều nhất $5$ phần tử. Chẳng hạn tập $\{1;2;3;4;5\}$.

b) Ta xét một tập **đẹp** X và một cặp $(a;b)$ trong số 5 cặp sau:

$$(1;10),(2;9),(3;8),(4;7),(5;6).$$

Khi đó ta có 3 quan hệ: $a \in X, b \notin X$ hoặc $a \notin X, b \in X$ hoặc $a \notin X, b \notin X$.

Vậy số tập **đẹp** là $3^5 = 243$ tập.

**Câu 6.**

Trước hết ta chứng minh f là một đơn ánh.

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$f(n) = f(m) \Rightarrow f(f(n)) = f(f(m)) \Rightarrow n^2 f(1) = m^2 f(1)$

$\Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow n = m$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh f là hàm nhân tính.

Trước tiên $\forall m \in \mathbb{N}^*$, ta có: $f(m.f(1)) = f(m) \Rightarrow m.f(1) = m \Rightarrow f(1) = 1$

Và do đó $f(f(m)) = m^2, \forall m \in \mathbb{N}^*$

Cuối cùng:

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f(f(m).f(n)) = n^2.f(f(m)) = n^2.m^2 = f(f(n.m))$

$\Rightarrow f(m.n) = f(m).f(n)$

Giả sử $p$ là số nguyên tố và $f(p)$ không là số nguyên tố cũng không là bình phương của một số nguyên tố.

Khi đó tồn tại hai số nguyên phân biệt $m, n > 1$: $f(p) = m.n$.

Ta có $p^2 = f(f(p)) = f(m.n) = f(m).f(n) \Rightarrow f(m) = f(n) = p$

$\Rightarrow$ m = n (mâu thuẫn)

Vậy kết luận của đề bài là đúng.

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BẠC LIÊU

**Câu 1.**

Điều kiện $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

Phân tích nhân tử chung (x + 2) ta được

$(x+2)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{5-x} - x^2 - 3x) = 0$. Do $x + 2 > 0$ nên

$\sqrt{2x+2} + \sqrt{5-x} - x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+2} - 2) + (\sqrt{5-x} - 2) - (x^2 + 3x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{1-x}{\sqrt{5-x}} - (x-1)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x+2}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} + x + 4 \end{array}\right.$$

Phương trình dưới vô nghiệm do $VP \geqslant 3; VT \leqslant 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$

**Câu 2.**

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác BGC, ta có

$a^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow a^2 = GB^2 + GC^2 + GB.GC.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a^2 \leqslant GB^2 + GC^2 + \frac{GB^2 + GC^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2 \leqslant 3(GB^2 + GC^2) \ (*)$$

Mặt khác, ta có $GB^2 = \frac{4}{9}m_b^2 = \frac{4}{9}(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4})$;

$$GC^2 = \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{4}{9}(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4})$$

Thay vào (*) và rút gọn ta được $\frac{b^2+c^2}{a^2} \geqslant 2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow GB = GC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

**Câu 3.**

$$P = \frac{3(x^2-xy)}{3x^2+3} \Leftrightarrow P = \frac{3(x^2-xy)}{3x^2+(x^2+2y^2)} \Leftrightarrow P = \frac{3(x^2-xy)}{4x^2+2y^2}$$

Nếu $y = 0$ thì $P = \frac{3}{4}$

Nếu $y = 0$ thì $P = \frac{3t^2-3t}{4t^2+2} \Leftrightarrow (4P-3)t^2 + 3t + 2P = 0$ (*), với $t = \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.

Ta chỉ xét $P \neq \frac{3}{4}$ nên phương trình (*) có nghiệm $t \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 32p^2 - 24P - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3-3\sqrt{3}}{8} \leqslant P \leqslant \frac{3+3\sqrt{3}}{8}.$$

Vậy $\max = \frac{3+3\sqrt{3}}{8}$; $\min = \frac{3-3\sqrt{3}}{8}$.

**Câu 4.**

a) Nhận xét: Nếu $2012^n + 1 \vdots n$ thì $2012^m + 1 \vdots m$, trong đó $m = 2012^n + 1$

Thật vậy: Nếu $2012^n + 1 \vdots n$ thì $m = 2012^m + 1 = k.m$ ($k$ lẻ)

Do đó $2012^m + 1 = 2012^{k.n} + 1 = (2012^n + 1)(2012^{n.(k-1)} + ... + 1)$

Vậy $2012^m + 1 \vdots m$.

Trở lại bài toán ta thấy $A_3 \vdots 3$, $A_{11} \vdots 11$,... nên vận dụng nhận xét trên ta có điều phải chứng minh

b) Xét số nguyên tố p mà $A_p \vdots p$ thì p là số nguyên tố lẻ.

Nếu p là ước số của 2012 thì $A_p = 2012^p + 1$ không chia hết cho p.

Nếu p không là ước của 2012 thì p và 2012 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Theo định lí Fermat ta có $2012^p - 2012 \vdots p$

Do đó $A_p = (2012^p - 2012) + 2013$ chia hết cho p

Suy ra $2013 \vdots p \Rightarrow p = 3;11;61$

Thử lại ta thấy các giá trị của p ở trên thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Câu 5.**

Giả sử $A = \{x_1, x_2, ..., x_{1008}\}$, gọi $r_i$ là số dư của $x_i$ khi chia cho 2013.

Xét 1007 tập hợp con của A

$A_0 = \{x_i : r_i = 0\}$, $A_1 = \{x_i : r_i = 1 \vee r_i = 2012\}$

$A_2 = \{x_i : r_i = 2 \vee r_i = 2011\}$ $A_3 = \{x_i : r_i = 3 \vee r_i = 2010\}$

.....

$A_{1006} = \{x_i : r_i = 1006 \vee r_i = 1007\}$

Do A có 1008 phần tử nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai phần tử của A cùng thuộc một trong 1007 tập hợp nói trên, gọi hai phần tử đó là a, b.

Khi đó $a + b$ hoặc $a - b$ chia hết cho 2013 (đpcm).

**Câu 6.**

Cho $m = n = 1$ ta được $4 \vdots (f(1)^2 + f(1)) \Rightarrow f(1) = 1$

Xét p là số nguyên tố, cho $m = 1, n = p - 1$, ta được

$$p^2 \vdots (1 + f(p-1)) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + f(p-1) = p \\ 1 + f(p-1) = p^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(p-1) = p - 1 \\ f(p-1) = p^2 - 1 \end{array}\right.$$

Nếu $f(p-1) = p^2 - 1$ cho $m = p - 1, n = 1$ ta có:

$f(p-1)^2 + f(1) = p^4 - 2p^2 + 2$ là ước số của $((p-1)^2 + 1)^2 < p^4 - 2p^2 + 2$ (vô lí)

Do đó $f(p-1) = p - 1$, với mọi p là số nguyên tố.

Vậy $f(4) = 4$ (do 5 là số nguyên tố).

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG

**Câu 1.**

Biến đổi phương trình (2) như sau

$$\left(x^5 - y^5\right) + x^2y^2\left(x - y\right) - xy\left(x^3 - y^3\right) + 2013\left(x - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - y\right)\left(x^4 + y^4 + 2013\right) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay vào phương trình (1), ta được

$$2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(2x^3 - 3x + 1\right) = f\left(x^2 + 1\right)(*)$$

Trong đó $f\left(t\right) = t + \sqrt[3]{t}$.

Với $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ và $t_1 \neq t_2$ thì

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\left(\sqrt[3]{t_2}-\sqrt[3]{t_1}\right)}{t_2-t_1}+1=\frac{1}{\sqrt[3]{t_2^2}+\sqrt[3]{t_1^2}+\sqrt[3]{t_2t_1}}+1>0$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow 2x^3-3x+1=x^2+1 \Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x=0 \Leftrightarrow x \in \left\{0;-1;\frac{3}{2}\right\}$

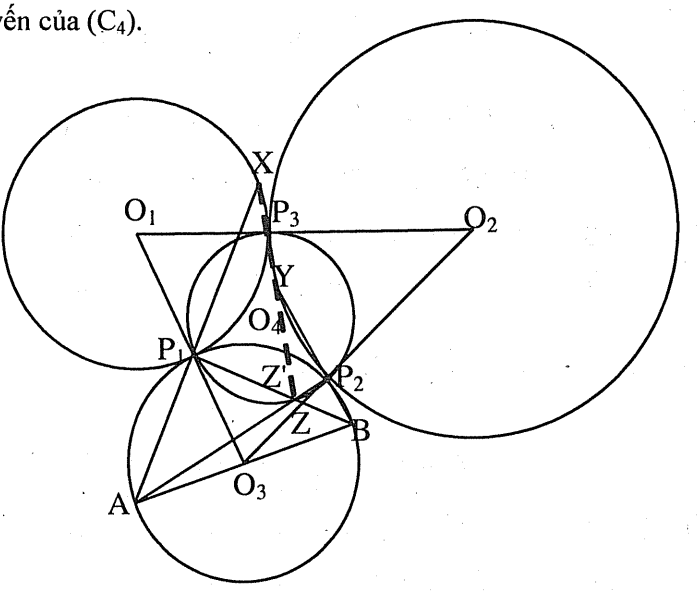
Vậy hệ có ba nghiệm $(0;0);(-1;-1);\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 2.**

Gọi $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt là tâm ba đường tròn $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$; $P_3$ là tiếp điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ và $O_4$ là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Suy ra $O_4P_1 = O_4P_3 = O_4P_2$.

Vậy $O_4$ là tâm đường tròn $(C_4)$ ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$. Vì $O_4P_1 \perp O_1O_3$ nên $O_1O_3$ là tiếp tuyến của $(C_4)$.




Ta có $\widehat{P_2P_1Z} = \widehat{P_2AO_3} = \widehat{AP_2O_3}$. Gọi Z' là giao điểm của $AP_2$ và $(C_4)$.

Do $O_3P_2$ là tiếp tuyến của $(C_4)$ nên $\widehat{O_3P_2A} = \widehat{O_3P_2Z'} = \widehat{P_2P_1Z'}$.

Suy ra $Z' \in BZ$. Vì $Z, Z'$ nằm trên $AP_2$ và $AP_2 \neq BZ$ nên $Z \equiv Z'$.

Do đó, $Z \in (C_4)$.

Do các góc $\widehat{O_4P_1O_3}$ và $\widehat{XP_1Z}$ vuông nên

$\widehat{ZP_1O_3} = \widehat{ZP_1O_4} + \widehat{O_4P_1O_3} = \widehat{XP_1Z} + \widehat{ZP_1O_4} = \widehat{XP_1O_4}$.

Vì $P_1O_4$ là tiếp tuyến của $(C_4)$ nên $\widehat{XP_1O_4} \equiv \widehat{XP_3P_1} \pmod{180^0}$ và suy ra

$\widehat{XP_1O_4} + \widehat{XP_3P_1} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ZP_1O_3} + \widehat{XP_3P_1} = 180^0$

Kí hiệu d là đường thẳng $ZP_3$, nếu $Z \equiv P_3$ hoặc đường thẳng tiếp xúc với $(C_4)$ tại P. Khi đó $\widehat{(l; P_3P_1)} = \widehat{ZP_1O_3} \equiv \widehat{XP_3P_1} \pmod{180^0} \Rightarrow X \in l$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $Y; Z \in l$. Do đó X, Y, Z thẳng hàng.

**Câu 3.**

Cho $a = 2, b = 1, c = 0$ thu được $k \geqslant \frac{4}{27}$.

Ta chứng minh $k = \frac{4}{27}$ là giá trị cần tìm, tức là bất đẳng thức đúng với $k = \frac{4}{27}$.

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geqslant a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$
$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) + 2abc(a+b+c).$$

Chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a) \leqslant 0$.

Đặt $p = a+b+c,\ q = ab+bc+ca,\ r = abc$, thì bất đẳng trên biến đổi thành

$$p^2\left(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r\right) \leqslant \left(\frac{8}{27}p^4 - p^2q + 3pr\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 36p^2r^2 + \left(\frac{52}{9}p^5 - 24p^3q\right)r + \frac{64}{729}p^3 + 4p^2q^3 - \frac{16}{27}p^6q \geqslant 0 \quad (*)$$

Vì bất đẳng thức đúng với mọi a, b, c nên ta có thể cho $p = 3$ và đặt

$f(r) = 324r^2 + (1404 - 648q)r + 36q^3 - 432q + 576$

Trường hợp 1. $0 \leqslant q \leqslant \frac{13}{6} \Rightarrow 39 - 18q \geqslant 0,\ f(0) = 36(q+4)(q-2)^2 \geqslant 0$

Trường hợp 2. $\frac{13}{6} \leqslant q \leqslant 3$, khi đó

$\Delta = (39-18q)^2 - 36(q^3 - 12q + 16) = -36q^3 + 324q^2 - 972q + 945 \leqslant 0$

Vậy $f(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0$ (đpcm).

**Câu 4.**

a) Từ giả thiết suy ra với mọi $n \geqslant 1$ thì $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 9u_n$ (1)

$v_{n+2} = 2v_{n+1} - 9v_n$ (2)

Bằng quy nạp, ta chứng minh được với mọi $n \geqslant 1$ thì

$u_n \equiv 1 \pmod 2$, $v_n \equiv 2 \pmod 4$

Nói riêng $u_n, v_n \neq 0$ với mọi $n \geqslant 1$.

b) Nhận xét rằng nếu $u_n \equiv u_{n+1} \pmod 7$, từ (1) suy ra

$u_{n+2} \equiv 0 \pmod 7$, $u_{n+3} \equiv 5u_n \pmod 7$, $u_{n+4} \equiv 3u_n \pmod 7$, $u_{n+5} \equiv 3u_n \pmod 7$, $u_{n+6} \equiv 0 \pmod 7$.

Như vậy, $u_k \equiv 0 \pmod 7$ với mọi $k \equiv n+2 \pmod 4$.

Vì $u_1 = 1 \equiv u_2 \pmod 7$ và $1999^{1945} \equiv 3 \pmod 4$ nên khi

$n = 1999^{1945}$ thì $u_n \equiv 0 \pmod 7$.

Ta chứng minh $v_n$ không chia hết cho 7 với mọi n.

Giả sử ngược lại, gọi $n_0$ là số bé nhất sao cho $v_{n_0} \equiv 0 \pmod 7$.

Dễ thấy, $n_0 \geqslant 5$, từ (2) ta có $3v_{n+2} + v_{n+1} - v_n = 7v_{n+1} - 28v_n$

Suy ra, với mọi n: $v_n \equiv v_{n+1} + 3v_{n+2} \pmod 7$

Như vậy

$$v_{n_0-2} \equiv v_{n_0-1} + 3v_{n_0} \equiv v_{n_0-1} \pmod 7$$

$$v_{n_0-3} \equiv v_{n_0-2} + 3v_{n_0-1} \equiv 4v_{n_0-1} \pmod 7$$

$$v_{n_0-4} \equiv v_{n_0-3} + 3v_{n_0-2} \equiv 0 \pmod 7$$

Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $n_0$. Vậy với mọi $n \geqslant 1$ thì $v_n$ không chia hết cho 7, nói riêng $v_n$ không chia hết cho 7 khi $n = 1999^{1945}$.

**Câu 5.**

Kí hiệu n thí sinh đã cho là $a_1, a_2, ..., a_n$ và $P_n$ là số cách phát đề thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $i \neq j$, ta sẽ viết $a_i = a_j$ nếu $a_i, a_j$ cùng phát một loại đề và $a_i \neq a_j$ trong trường hợp ngược lại. Dễ thấy $P_2 = m(m-1)$.

Xét $n \geqslant 3$, ta sẽ tìm công thức truy hồi cho $P_n$. Mỗi cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh thuộc vào một trong hai loại sau:

<u>*Loại 1.*</u> $a_1 \neq a_{n-1}$. Khi đó bỏ $a_n$ đi thì ta được một cách phát đề hợp lệ cho n – 1 thí sinh $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Ngược lại, với mỗi cách phát đề hợp lệ cho n – 1 thí sinh

$a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ thì có m – 2 cách phát đề cho $a_n$ để thu được một cách phát đề hợp lệ cho $a_1, ..., a_n$. Do vậy, số cách phát đề thuộc loại này là $(m-2)P_{n-1}$.

<u>Loại 2</u>. $a_1 = a_{n-1}$. Khi đó bỏ $a_{n-1}, a_n$ đi thì được một cách phát đề hợp lệ cho n – 2 thí sinh $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$. Ngược lại, với mỗi cách phát đề hợp lệ cho n – 2 thí sinh $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ thì có m – 1 cách phát đề cho $a_{n-1}, a_n$ để thu được một cách phát đề hợp lệ cho $a_1, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1 = a_{n-1}$. Do đó, số cách phát đề thuộc loại này là $(m-1)P_{n-2}$. Vậy ta có công thức truy hồi

$$P_n = (m-2)P_{n-1} + (m-1)P_{n-2}.$$

Gọi f(x) là hàm sinh của dãy $(P_n)_{n\geqslant 2}$ thì

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 2} P_n x^n = P_2 x^2 + \sum_{n\geqslant 3}\left((m-2)P_{n-1} + (m-1)P_{n-2}\right)x^n$$

$$= m(m-1)x^2 + (m-2)xf(x) + (m-1)x^2 f(x)$$

Vậy $f(x) = \dfrac{m(m-1)x^2}{1-(m-2)x-(m-1)x^2} = (m-1)x\left[\dfrac{1}{1-(m-1)x} - \dfrac{1}{1+x}\right]$

$$= \sum_{n\geqslant 2}\left[(m-1)^n + (-1)^n(m-1)\right]x^n$$

Đồng nhất hệ số thì được $P_n = (-1)^n(m-1) + (m-1)^n$

**Câu 6.**

Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với mọi số tự nhiên $n_1, n_2$ sao cho $f(n_1) = f(n_2)$, từ điều kiện 1, suy ra $n_1 = n_2$.

Vậy f là đơn ánh và từ 1, suy ra

$$f(n+4) = f(f(f(n))) \Rightarrow f(n+4) = f(n) + 4, \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó, với $n = 4k + r, k \in \mathbb{N}, r \in \{0;1;2;3\}$ thì $f(4k+r) = f(r) + 4k$

+ Tính *f(1)*: Vì 2013=4.503+1 nên $f(2013) = 2012 + f(1) \Rightarrow f(1) = 4$

+ Tính *f(0)*: $f(f(0)) = 4 = f(1) \Rightarrow f(0) = 1$ (do *f* là đơn ánh)

+ Tính $f(2), f(3)$

Giả sử $f(2) = 4m + r, m \in \mathbb{N}, r \in \{0;1;2;3\}$

Khi đó $f(4m+r) = f(f(2)) = 6 \Rightarrow 4m + f(r) = 6$

Vì $f(r) \geqslant 0$ nên $m \in \{0;1\}$

Trường hợp 1. $m = 0$ thì $f(r) = 6$ và $f(2) = r$

- Do $f(0) = 1$ và $f(1) = 4$ nên $r \notin \{0;1\}$

- Do f là đơn ánh nên $r \neq 2$. Do đó, $r = 3$ và $f(2) = 3$; $f(3) = 6$.

Suy ra $f(n) = \begin{cases} n+1 \text{ nếu } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ hoặc } n \equiv 2 \pmod 4 \\ n+3 \text{ nếu } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ hoặc } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

Trường hợp 2. $m = 1$ thì $f(r) = 2$ và $f(2) = 4 + r$

Sử dụng $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ và tính đơn ánh của f, suy ra:

$r = 3$ và $f(3) = 2$; $f(2) = 7$.

Do đó: $f(n) = \begin{cases} n+1 \text{ nếu } n \equiv 0 \pmod 4 \\ n+3 \text{ nếu } n \equiv 1 \pmod 4 \\ n+5 \text{ nếu } n \equiv 2 \pmod 4 \\ n-1 \text{ nếu } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

Thử lại, tất cả các hàm số đã tìm đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG BÌNH DƯƠNG

**Câu 1.**

Phương trình đã cho tương đương với:

$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}$

Đặt $u = 2x - 1$; $v = \sqrt[3]{3x^2 - 2}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u \end{cases} \Rightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + x + 1) = 0.$

Nếu $u = v$ thì ta có $2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 7x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{8} \end{array}\right.$

Nếu $u^2 + uv + v^2 + x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + 3(2x-1)^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + 2(2x-1)^2 + 4x^2 + 5 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Kiểm lại phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1$ ; $x = \frac{-1}{8}$

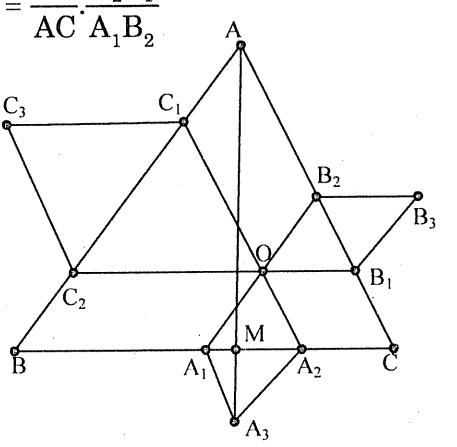
**Câu 2.**

Giả sử $AA_3$ , $BB_3$ , $CC_3$ lần lượt cắt BC , CA , AB tại M, N, P.

Ta có $A_2A_3$ // AB và $A_1A_3$ // AC

$$\frac{MB}{MA_2} = \frac{MA}{MA_3} = \frac{MC}{MA_1} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MA_2}{MA_1} = \frac{MB + MA_2}{MC + MA_1} = \frac{A_2B}{A_1C}$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{A_2B}{A_1C} = \frac{A_2B}{CB}.\frac{CB}{A_1C} = \frac{A_2C_1}{CA}.\frac{BA}{A_1B_2} = \frac{AB}{AC}.\frac{A_2C_1}{A_1B_2}$$




Tương tự ta có

$$\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{BA}.\frac{B_2A_1}{B_1C_2};$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}.\frac{C_2B_1}{C_1A_2}.$$

Từ các đẳng thức trên ta có:

$$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PC} = 1 .$$

Theo định lí Ceva ta có AM, BN, CP đồng quy.

Vậy $AA_3$ , $BB_3$ , $CC_3$ đồng quy.

**Câu 3.**

Đặt $T = c^2 + 2c$

Gọi k là nghiệm dương của phương trình

$x^2 + 2x - T = 0$ (*) , suy ra $k = -1 + \sqrt{1 + T}$

Ta có $\begin{cases} k\left(\dfrac{a^3+b^3+k^3}{3}\right) \geqslant k^2ab \\ \dfrac{a^3+k^3+k^3}{3} \geqslant k^2a \\ \dfrac{b^3+k^3+k^3}{3} \geqslant k^2b \end{cases}$

Cộng vế theo vế được: $\dfrac{(k+1)(a^3+b^3)+k^4+4k^3}{3} \geqslant k^2(ab+a+b) = k^2T.$

Suy ra $a^3+b^3 \geqslant \dfrac{3k^2T-k^4-4k^3}{k+1}$

Thế mà $\dfrac{3k^2T-k^4-4k^3}{k+1} = 2k^3$

$\Leftrightarrow 3T-k^2-4k = 2k(k+1) \Leftrightarrow 3k^2+6k-3T = 0$

$\Leftrightarrow k^2+2k-T = 0$ (điều này hiển nhiên đúng do k là nghiệm của (*))

Vậy $a^3+b^3 \geqslant 2k^3 = 2\left(\sqrt{T+1}-1\right)^3 = 2\left(\sqrt{c^2+2c+1}-1\right)^3 = 2c^3$ (đpcm)

**Câu 4.**

*Nhận xét:* Nếu $d_i$ là ước của *n* thì $\dfrac{n}{d_i}$ cũng là ước của n.

Khi đó $U(n) = \{d_1, d_2, ..., d_m\} = \left\{\dfrac{n}{d_1}, \dfrac{n}{d_2}, ..., \dfrac{n}{d_m}\right\}$.

- Với n = 1, ta có $d_1^2 = 1 \leqslant 1^2\sqrt{1}$ (đúng).
- Với n = 2, ta có $d_1^2+d_2^2 = 1+2 \leqslant 2^2\sqrt{2}$ (đúng).
- Với n = 3, ta có $d_1^2+d_2^2 = 1+3 \leqslant 3^2\sqrt{3}$ (đúng).
- Với $n \geqslant 4$, không mất tính tổng quát, giả sử $1 = d_1 < d_2 < ... < d_m$, ta có $d_1 = 1, d_2 \geqslant 2, d_3 \geqslant 3, ..., d_m \geqslant m$.

Do đó $d_1^2+d_2^2+...+d_m^2 = \dfrac{n^2}{d_1^2}+\dfrac{n^2}{d_2^2}+...+\dfrac{n^2}{d_m^2} = n^2\left(\dfrac{1}{d_1^2}+\dfrac{1}{d_2^2}+...+\dfrac{1}{d_m^2}\right)$

$\leqslant n^2\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{m^2}\right)$

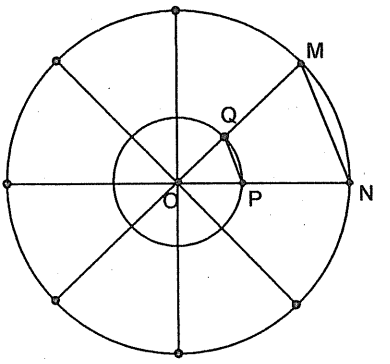
$$< n^2\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(m-1)m}\right)$$

$$= n^2\left(1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) = n^2\left(2-\frac{1}{m}\right) < n^2.2 \leqslant n^2\sqrt{n}$$

(vì $n \geqslant 4$)

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi $n = 1$.

**Câu 5.**




Chia hình tròn thành 9 phần như hình vẽ (gồm 1 hình bát giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính bằng 1 và 8 "hình thang cong" bằng nhau và ở ngoài.

Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất một phần chứa ít nhất 2 điểm (giả sử là A và B) trong 10 điểm đã cho. Xét hai trường hợp sau:

1) Hai điểm A, B nằm trong hình bát giác đều (nội tiếp trong đường tròn bán kính 1) thì hiển nhiên $AB < 2$.

2) Hai điểm A, B nằm trong hoặc trên cạnh của một trong các "hình thang cong" còn lại: Giả sử "hình thang cong" đó là MNPQ. Khi đó xét hình thang cân MNPQ ta có các cạnh và 2 đường chéo có độ dài cung nhỏ hơn 2. Thật vậy:

Cạnh $MQ = NP = 1,5 < 2$, $MN = \frac{5}{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}} < 2$ ;

$PQ < MN < 2$ và đường chéo $NQ = MP = \sqrt{\frac{29-10\sqrt{2}}{4}} < 2$

Vì vậy:

• Nếu đoạn AB thuộc hình thang cân MNPQ (kể cả miền trong và các đường biên) thì $AB < 2$ ta có đpcm.

• Nếu đoạn AB không nằm hoàn toàn trong hình thang MNPQ thì ta lấy trên OM điểm A' sao cho OA' = OA và lấy trên ON điểm B' sao cho OB' = OB.

Khi đó $\widehat{AOB} < \widehat{A'OB'}$ (theo định lí hàm số côsin) ta có $AB < A'B' \leqslant MN < 2$.

Vậy trong các trường hợp thì $AB < 2$ (đpcm).

**Câu 6.**

Đặt $g(x) = f(x) + 2013x^2$. Khi đó $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x,y \in \mathbb{Q} \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Cho $x = y = 0$ vào (1) ta được $f(0) = 0$.

Thay y bởi –x vào (1) ta được $f(-x) = -x$ (2).

Thay y bởi x vào (1) ta được $f(2x) = 2f(x)$.

Giả sử k là số nguyên dương sao cho $f(kx) = kf(x), \forall x \in \mathbb{Q}$

Khi đó $f((k+1)x) = f(kx) + f(x) = (k+1)f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$

Do đó theo nguyên lí quy nạp, ta có $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ (3)

Kết hợp (2) và (3) ta suy ra $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Ta có $f\left(n\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^*$

Với mọi $q \in \mathbb{Q}, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1$

$\Rightarrow f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1) = \frac{m}{n}$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Do đó $g(x) = 2013x^2 + x$

Thử lại trực tiếp ta thấy $g(x) = 2013x^2 + x, \forall x \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn đề bài.

## TRƯỜNG THPT KON TUM - KON TUM

**Câu 1.**

Vì $x = 0$ không thỏa mãn hệ nên hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{y + \frac{2}{x} + 1} + \sqrt{x+1} - 4 = 0 \\ y + \frac{2}{x} + x = \sqrt{x\left(y + \frac{2}{x}\right)} + 3 \end{cases}$$

Đặt $t = y + \frac{2}{x}$, hệ trên trở thành $\begin{cases} \sqrt{t+1} + \sqrt{x+1} = 4 \\ t + x = \sqrt{tx} + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + x + 2 + 2\sqrt{tx + t + x + 1} = 16 \\ t + x = \sqrt{tx} + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{tx} + 3 + 2 + 2\sqrt{tx + \sqrt{tx} + 3 + 1} = 16 & (1) \\ t + x = \sqrt{tx} + 3 & (2) \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{tx}\ (t \geqslant 0)$, (1) trở thành $u + 5 + 2\sqrt{u^2 + u + 4} = 16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{u^2 + u + 4} = 11 - u \Leftrightarrow u = 3$.

Với $u = 3$ ta được $\begin{cases} \sqrt{tx} = 3 \\ t + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = t = 3$. Với $x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{7}{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(3; \dfrac{7}{3}\right)$.

**Câu 2.**

Gọi G, H, O theo thứ tự là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Ta có O, G, Q, H và $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH}$; $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OH}$.

Suy ra $OG \leqslant OQ$ (1)

Mặt khác: $AQ.QM = R^2 - OQ^2 \Rightarrow \dfrac{1}{QM} = \dfrac{AQ}{R^2 - OQ^2}$

$$\Rightarrow \frac{R}{QM} = \frac{AQ.AO}{R^2 - OQ^2} \geqslant \frac{\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AO}}{R^2 - OQ^2}.$$

Tương tự ta có: $\dfrac{R}{QN} \geqslant \dfrac{\overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{BO}}{R^2 - OQ^2}$; $\dfrac{R}{QP} \geqslant \dfrac{\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{CO}}{R^2 - OQ^2}$.

Suy ra $\dfrac{R}{QM} + \dfrac{R}{QN} + \dfrac{R}{QP} \geqslant \dfrac{\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{CO}}{R^2 - OQ^2}$

$$= \frac{\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}\right).\overrightarrow{AO} + \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OQ}\right).\overrightarrow{BO} + \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ}\right).\overrightarrow{CO}}{R^2 - OQ^2}$$

$$= \frac{3R^2 + \overrightarrow{OQ}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}\right)}{R^2 - OQ^2} = \frac{3R^2 + 3\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{GO}}{R^2 - OQ^2}$$

$$= \frac{3R^2 - 3OQ.OG}{R^2 - OQ^2} \geqslant \frac{3R^2 - 3OQ^2}{R^2 - OQ^2} = 3 \text{ (do (1))}.$$

Do đó $\dfrac{1}{QM} + \dfrac{1}{QN} + \dfrac{1}{QP} \geqslant \dfrac{3}{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $Q \equiv G \Leftrightarrow O \equiv H \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

**Câu 3.**

Đặt $a=\sqrt{y^2+z^2}$, $b=\sqrt{z^2+x^2}$, $c=\sqrt{x^2+y^2}$ thì a, b, c là các số dương và $a+b+c=2013$.

Với cách đặt như trên ta suy ra

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\ y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\ z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}. \qquad (1)$$

Ta lại có $2\left(x^2+y^2\right)\geqslant\left(x+y\right)^2$ nên $\sqrt{2}c\geqslant x+y$,

tương tự $\sqrt{2}a\geqslant y+z$, $\sqrt{2}b\geqslant z+x$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $H\geqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\left(a+b+c\right)\right)$$

Ta lại có $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geqslant\left(a+b+c\right)^2$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2.\frac{9}{a+b+c}-2\left(a+b+c\right)\right)=\frac{a+b+c}{2\sqrt{2}}=\frac{2013}{2\sqrt{2}}$$

$$H=\frac{2013}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2013}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của H là $\frac{2013}{2\sqrt{2}}$.

**Câu 4.**

Gọi q là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\sqrt{m}$, tức là $q=\left[\sqrt{m}\right]$.

Ta xét $\left(q+1\right)^2$ các số dạng $ax+y$ với $x=0, 1, 2,..., q$; $y=0, 1, 2,..., q$.

Vì $\left(q+1\right)^2>m$ nên tồn tại cặp $\left(x_1;y_1\right)$ và $\left(x_2;y_2\right)$ sao cho

$ax_1+y_1\equiv ax_2+y_2\left(\text{mod } m\right)$ hay $a\left(x_1-x_2\right)+y_1-y_2$ chia hết cho m.

Nếu $x_1=x_2$ thì $y_1-y_2\vdots m$. Mặt khác $\left|y_1-y_2\right|\leqslant\sqrt{m}<m$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1\neq x_2$.

Nếu $y_1=y_2$ thì $a\left(x_1-x_2\right)\vdots m$. Do $\left(a,m\right)=1$ nên $x_1-x_2\vdots m$, mâu thuẫn.

Vậy $y_1\neq y_2$.

Giả sử $x_1>x_2$. Ta lấy $x=x_1-x_2$, $y=\left|y_1-y_2\right|$.

Khi đó x,y là số tự nhiên và $a^2x^2-y^2=\left(ax-y\right)\left(ax+y\right)\vdots m$

**Câu 5.**

Đầu tiên ta nhận xét rằng toàn bộ nền nhà của phòng triển lãm bao giờ cũng có thể phân chia thành các tam giác, bởi các đường chéo không cắt nhau, nằm trong n – giác (nền nhà). Với mỗi cách phân chia ta được một đồ hình của phòng triển lãm. (phép phân chia này được gọi là phép phân chia tam phân một đa giác).

Bây giờ ta sẽ tô màu các đỉnh của một đồ hình sao cho hai đỉnh được nối với nhau (theo cạnh thẳng của đồ hình) sẽ có màu khác nhau. Ta khẳng định rằng để tô màu như thế chỉ cần ba màu là đủ.

Ta sẽ chứng minh khẳng định này bằng cách quy nạp theo n.

Nếu n = 3, phòng triển lãm là một tam giác và chỉ việc tô ba đỉnh bằng ba màu. Giả sử khẳng định đúng với phòng triển lãm có n tường ($n \geqslant 3$). Xét phòng triển lãm G có n +1 tường. Sử dụng phép tam phân đối với đa giác G, ta gọi G' là đa giác nhận được từ G sau khi cắt bỏ đi tam giác ABC (hình vẽ).

Theo giả thiết quy nạp, khẳng định đúng với n – giác G'.

Vì A, B chỉ có thể được tô màu bằng 2 trong số 3 màu đã cho nên ta chỉ việc tô màu đỉnh C bằng màu còn lại. Vậy khẳng định đúng với (n + 1) - giác G và do đó điều khẳng định được chứng minh.

Vậy ta giả sử rằng các đỉnh của phòng triển lãm có n bức tường được tô bằng ba màu a, b, c. Có tất cả n đỉnh, do đó có ít nhất một màu, chẳng hạn màu a mà số đỉnh được tô màu a không vượt quá $\left[\frac{n}{3}\right]$.

Vì mọi cặp đỉnh của một tam giác bất kì trong đồ hình G là không thể có cùng một màu. Do đó trong mỗi tam giác thì có ba đỉnh của nó được tô bằng ba màu khác nhau. Rõ ràng là tại mỗi đỉnh được tô màu a ta đặt một ngọn đèn thì toàn bộ phòng triển lãm được chiếu sáng, mà số đỉnh của nó thì không vượt quá $\left[\frac{n}{3}\right]$ (đpcm).

**Câu 6.**

Cho $x = y = z = t$, ta được $f(2t)f(t^2) = \sqrt[3]{2013}$ (1)

Cho $x = y = t, z = 1$, ta được

$$f(t^2)f(2t)f(t)(f(t+1))^2 = 2013 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $(f(t)f(t+1))^2 = \sqrt[3]{2013^2}$

hay $f(t)f(t+1) = \sqrt[3]{2013}$ (3)

Thay $t$ bởi $t+1$ trong (3) rồi lại kết hợp với (3) ta suy ra

$$f(t+2) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

Cho $z = 1$, thay vào phương trình ban đầu kết hợp với (3) ta thu được

$$f(xy)f(x+y) = \sqrt[3]{2013} \quad (5)$$

Lần lượt thay $y = 2$ và $y = 4$ vào (5) ta nhận được

$$f(2x)f(x+2) = \sqrt[3]{2013} \qquad (6)$$

$$f(4x)f(x+4) = \sqrt[3]{2013}$$

Kết hợp với (4) ta suy ra $f(2x) = f(4x)$ hay $f(2t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$ (7)

Từ (4), (6) và (7) cho ta:

$$\left(f(x)\right)^2 = \sqrt[3]{2013} \Rightarrow f(x) = \sqrt[6]{2013} \text{ (do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = \sqrt[6]{2013}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = \sqrt[6]{2013}$.

# THPT CHUYÊN BẮC QUẢNG NAM - QUẢNG NAM

**Câu 1.**

Phương trình tương đương:

$$(2x^2 - 4x+1)\sqrt{2x-1} = 4x^2 - 7x + 3 \Leftrightarrow (2x^2 - 4x+1)\sqrt{2x-1} = (4x-3)(x-1).$$

Đặt $u = x - 1$, $v = \sqrt{2x-1}$.

Phương trình trở thành: $(2u^2 - 1).v = (2v^2 - 1).u$

$\Leftrightarrow (u - v)(2uv + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v$ hoặc $2uv + 1 = 0$.

• $u = v \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$

• $2uv+1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - x)\sqrt{2x-1} = 1$

Điều kiện: $\frac{1}{2} < x < 1$

$\Rightarrow 0 < 2x - 1 < 1$ và $0 < 2(x - 1) < 1$

$\Rightarrow 0 < 2(1 - x)\sqrt{2x-1} < 1 \Rightarrow$ Phương trình $2(1 - x)\sqrt{2x-1} = 1$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2 + \sqrt{2}$.

**Câu 2.**

*** Chứng minh điều kiện cần:**

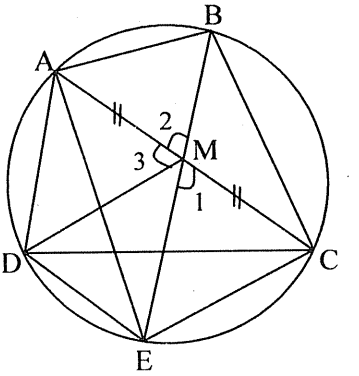
Kéo dài BM cắt đường tròn tại E.

M là trung điểm AC $\Rightarrow S_{AEB} = S_{CEB}$

$\Rightarrow AB.AE.\sin\widehat{BAE} = CB.CE.\sin\widehat{BCE}$

$\Rightarrow AB.AE = CB.CE$ ( vì $\widehat{BAE} + \widehat{BCE} = \pi$)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CE}{AE}$




Ta có: AB.CD = AD.BC (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AD}{CD}$

Suy ra: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CE}{AE} (= \dfrac{AB}{CB})$

Mặt khác: $\widehat{ADC} = \widehat{CEA}$ (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta CEA$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACD} = \widehat{EAC} \\ \widehat{DAC} = \widehat{ACE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = EC \\ \widehat{DAM} = \widehat{ECM} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CEM$ $(AD = EC, \widehat{DAM} = \widehat{ECM}, AM = CM)$

$\Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{M_1}$ mà $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{M_2}$.

$\Rightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\widehat{BMD}$.

*** Chứng minh điều kiện đủ:**

Kẻ qua D đường thẳng song song với AC cắt đường tròn tại E.

Với M là trung điểm AC, ta có $\Delta ADM = \Delta MEC \Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{M_1}$.

Ta có $\widehat{M_3} + \widehat{DME} + \widehat{M_1} = 180^0$, $\widehat{M_3} = \widehat{M_2}$ (AC là phân giác góc $\widehat{BMD}$, theo giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{M_3} + \widehat{DME} + \widehat{M_2} = 180^0 \Rightarrow$ B, M, E thẳng hàng.

Ta có: $S_{AEB} = S_{CEB} \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CE}{AE}$ (1) (như chứng minh điều kiện cần)

$DE // AC \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta CEA \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CE}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow AB.CD = AD.BC$.

**Câu 3.**

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại:

$l_a(b + c - a) + l_b(c + a - b) + l_c(a + b - c) \geqslant 6S$ (*)

Ta có: $l_a \geqslant h_a$, ... và $b + c - a > 0$,... ($h_a$ là chiều cao ứng với cạnh có độ dài a)

Ta đề xuất chứng minh bất đẳng thức chặt hơn bất đẳng thức(*) :

$h_a(b + c - a) + h_b(c + a - b) + h_c(a + b - c) \geqslant 6S$ (**)

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử: $a \geqslant b \geqslant c$ khi đó:

$h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ và $b + c - a \leqslant c + a - b \leqslant a + b - c$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebysev (Trê-bư-sép)

- Cho 2 dãy số $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ và $b + c - a \leqslant c + a - b \leqslant a + b - c$ ta có:

$$3[h_a(b + c - a) + h_b(c + a - b) + h_c(a + b - c)] \geqslant (h_a + h_b + h_c)(a + b + c) \quad (1).$$

- Cho 2 dãy số $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ và $a \geqslant b \geqslant c$ ta có:

$$3[a.h_a + b.h_b + c\,h_c] \leqslant (h_a + h_b + h_c)(a + b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$h_a(b + c - a) + h_b(c + a - b) + h_c(a + b - c) \geqslant a.h_a + b.h_b + c\,h_c = 6S$$

Vậy (*) được chứng minh nên bất đẳng thức (*) được chứng minh.

**Câu 4.**

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được:

$$x + 10\sqrt{11} = y + z + 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow x - y - z + 10\sqrt{11} = 2\sqrt{yz} \quad (1)$$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$(x - y - z)^2 + 2(x - y - z).10\sqrt{11} = 4yz - 1100 \quad (2)$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{11}$ là số vô tỉ nên từ (2) suy ra:

$$x - y - z = 0 \Rightarrow 4yz - 1100 = 0$$

Giải hệ : $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4yz = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ yz = 275 \end{cases}$

Vì $yz = 275 = 5.5.11$ và $y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có những trường hợp sau:

+ $y = 1, z = 275 \Rightarrow x = 276.$

+ $y = 275, z = 1 \Rightarrow x = 276.$

+ $y = 5, z = 55 \Rightarrow x = 60.$

+ $y = 55, z = 5 \Rightarrow x = 60.$

+ $y = 11, z = 25 \Rightarrow x = 36.$

+ $y = 25, z = 11 \Rightarrow x = 36.$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm (x, y, z) là:

(276,1,275) , (276,275,1) , (60,5,55) , (60,55,5) , (36,11,25) , (36,25,11).

**Câu 5.**

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ là 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và $A_i(x_i, y_i)$ với $x_i, y_i \in Z$ ($i \in \{1,2,\ldots,19\}$).

Một số khi chia 3 thì dư 0, 1 hoặc 2.

Theo nguyên lí Drichlet, có ít nhất 7 trong 19 số $x_i$ là có cùng số dư khi chia cho 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử các số đó là $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

Xét bảy điểm $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

Theo nguyên lí Drichlet, có ít nhất 3 trong 7 số $y_i$ ($i \in \{1,2,...,7\}$) có cùng số dư khi chia cho 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử các số đó là $y_1, y_2, y_3$.

Xét ba điểm $A_1, A_2, A_3$.

Vì $x_1, x_2, x_3$ là có cùng số dư khi chia cho 3 và $y_1, y_2, y_3$ có cùng số dư khi chia cho 3 nên $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \in \mathbb{Z}$; $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \in \mathbb{Z}$.

Vậy trọng tâm của tam giác $A_1, A_2, A_3$ có các tọa độ đều là các số nguyên.

Bài toán được chứng minh.

**Câu 6.**

+ Chứng minh f là đơn ánh:

Thật vậy $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, giả sử: $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) + y = f(x_2) + y$

$\Rightarrow f[f(x_1) + y] = f[f(x_2) + y]$

$\Rightarrow x_1 + f(y) = x_2 + f(y)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh.

+ Tính f(0):

Từ (*) $\Rightarrow f[f(0) + y] = f(y)$. Vì f đơn ánh $\Rightarrow f(0) + y = y \Rightarrow f(0) = 0$.

+ Chứng minh f là hàm cộng tính:

Khi y = 0, từ (*) $\Rightarrow f[f(x)] = x$.

Trong (*)thay x bởi f(x) ta được: $f[f(f(x)) + y] = f(x) + f(y)$

$\Rightarrow f[x + y] = f(x) + f(y)$ (**) $\forall\, x,y$ (vì $f[f(x)] = x$)

+ Chứng minh f là hàm lẻ

Trong (**) thay $y = -x$ ta được $f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall\, x$.

+ Xác lập công thức f:

Xét $x \in \mathbb{Q}^+$ (do f là hàm lẻ), đặt $f(1) = a$

Ta có: $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 2a$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(n) = an$

Từ đó $a = f(1) = f(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}\ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}^+$

Ta có: $f(\frac{m}{n}) = a\frac{m}{n}$

Vậy $f(x) = ax$ với $x \in \mathbb{Q}$

Thay vào phương trình hàm ban đầu ta có:

$f(ax + y) = x + f(y) \Rightarrow a(ax + y) = x + ay\ \forall x, y \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Thử lại ta được $f(x) = \pm x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE - BẾN TRE

**Câu 1.**

$$\begin{cases}(23-3x)\sqrt{7-x}=(20-3y)\sqrt{6-y} & (1)\\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{-3x+2y+8}=-3x^2+14x+8 & (2)\end{cases}$$

* Điều kiện : $\begin{cases}x\leqslant 7\\ y\leqslant 6\\ 2x+y+2\geqslant 0\\ -3x+2y+8\geqslant 0\end{cases}$

* Phương trình (1) $\Leftrightarrow [3(7-x)+2]\sqrt{7-x}=[3(6-y)+2]\sqrt{6-y}$ (3)

* Xét hàm số $f(t)=(3t^2+2).t=3t^3+2t$ với $t\geqslant 0$.

Dùng định nghĩa ta chứng minh hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Thật vậy: $\forall t_1,t_2\in[0;+\infty): t_1<t_2$ ta có :

$$3t_1^3+2t_1<3t_2^3+2t_2\Rightarrow f(t_1)<f(t_2).$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

* Phương trình

$$(3)\Leftrightarrow f(\sqrt{7-x})=f(\sqrt{6-y})\Leftrightarrow\sqrt{7-x}=\sqrt{6-y}\Leftrightarrow y=x-1.$$

* Thay $y=x-1$ vào phương trình (2), ta được :

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0\ (4)$$

* Giải phương trình (4) với điều kiện: $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 6$. (*)

Phương trình (4) $\Leftrightarrow(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

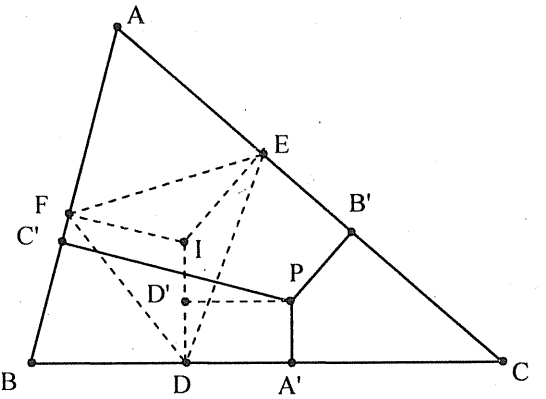
$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$$

Do điều kiện (a), nên ta có: $\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)>0$.

Vậy phương trình (4) $\Leftrightarrow x=5$.

* Tóm lại hệ đã cho có nghiệm: (x; y) = (5; 4).

**Câu 2.**




Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của $(I,r)$ trên các cạnh BC, CA, AB.

Kẻ $PD' \perp ID$ $(D' \in ID) \Rightarrow PA' = D'D$. Ta có:

$$PA' \cdot r = PA' \cdot ID = D'D \cdot ID = \overrightarrow{D'D} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{ID}\left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{ID'}\right)$$

$$= ID^2 - \overrightarrow{ID'} \cdot \overrightarrow{ID} = r^2 - \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{ID}$$

Do đó $PA' = r - \dfrac{\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{ID}}{r}$.

Tương tự, ta cũng có $PB' = r - \dfrac{\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IE}}{r}$, $PC' = r - \dfrac{\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IF}}{r}$.

Cộng các đẳng thức trên lại vế theo vế, ta được

$$PA' + PB' + PC' = 3r - \frac{\overrightarrow{IP}(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})}{r}.$$

Gọi G là trọng tâm $\Delta DEF$ thì $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = 3\overrightarrow{IG}$. Ta có:

$$PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r} = 3r - \frac{3\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IG}}{r} + \frac{PI^2}{2r}$$

$$= 3r - \frac{3(PI^2 + GI^2 - PG^2)}{2r} + \frac{PI^2}{2r}$$

$$= 3r - \frac{3GI^2}{2r} + \frac{3PG^2 - 2PI^2}{2r}$$

Gọi K là điểm cố định thỏa $3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{KI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} = 3\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{KG} = 2\overrightarrow{GI}$.

Ta thấy điểm K xác định như trên chính là trực tâm của $\Delta DEF$.

Xét $\Delta DEF$ có $\widehat{EDF} = \widehat{IDE} + \widehat{IDF} = \widehat{IBF} + \widehat{ICE} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} < 90^0$.

Tương tự, $\widehat{DEF} < 90^0, \widehat{EFD} < 90^0$ nên $\Delta DEF$ nhọn nên K nằm trong $\Delta DEF$ hay K nằm trong $\Delta ABC$.

Ta có:

$$3PG^2 - 2PI^2 = 3\overrightarrow{PG}^2 - 2\overrightarrow{PI}^2 = 3\left(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KG}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KI}\right)^2$$

$$= (3PK^2 - 2PK^2) + 2\overrightarrow{PK}(3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{KI}) + (3KG^2 - 2KI^2)$$

$$= PK^2 + (3KG^2 - 2KI^2) \geqslant 3KG^2 - 2KI^2 = 3 \cdot 4GI^2 - 2 \cdot 9GI^2 = -6GI^2.$$

Từ các điều trên, suy ra:

$$PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r} \geqslant 3r - \frac{3GI^2}{2r} - \frac{6GI^2}{2r} = 3r - \frac{9GI^2}{2r}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r}$ là $3r - \frac{9GI^2}{2r}$ đạt được khi P trùng với K.

**Câu 3.**

$$T^2 = \cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \left(\text{do } \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \left(1 - \sin^2\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

Mà $\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1$ nên theo

$$T^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(2 - 2\sin\frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{2 - 2\sin\frac{A}{2} + 1 + \sin\frac{A}{2} + 1 + \sin\frac{A}{2}}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{16}{27} \text{ (bất đẳng thức AM – GM)}$$

Vậy $\max T = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ xảy ra khi $\begin{cases} \cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1 \\ 2 - 2\sin\frac{A}{2} = 1 + \sin\frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2\arcsin\frac{1}{3} \\ B = C \end{cases}$

**Câu 4.**

Ta có $\underbrace{111...1111}_{(p-1) \text{ chữ số}} = \frac{10^{p-1} - 1}{9}$

Do $p \geqslant 7$ nên $(p, 10) = 1$.

Theo định lí Fermat ta có $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hay $10^{p-1} - 1 \vdots p$ (1)

Mặt khác, $10^{p-1} - 1 \vdots (10-1) = 9$ (2) và (p, 9) = 1 (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $10^{p-1} - 1 \vdots 9p \Rightarrow \dfrac{10^{p-1}-1}{9} \vdots p \Rightarrow$ số $\underbrace{111...1111}_{(p-1)\text{ chữ số}} \vdots p$

Hơn nữa, với mọi n nguyên dương ta có

$$\underbrace{111...1111}_{n(p-1)\text{ chữ số}} = \frac{10^{n(p-1)}-1}{9} = \frac{10^{p-1}-1}{9}.A, \text{ với A nguyên dương}$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n(p-1)}-1}{9} \vdots p \Rightarrow \text{số } \underbrace{111...1111}_{n(p-1)\text{ chữ số}} \vdots p.$$

Vậy tồn tại vô số số hạng của dãy 1, 11, 111, 1111, ... chia hết cho p.

**Câu 5.**

Ta có:

$\forall i \neq j, |A_i| = |A_j| . |A_i \cap A_j|, |A_j| = |A_i| . |A_j \cap A_i| \Rightarrow |A_i| = |A_j|$

Nên theo tính chất a) ta có

$|A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_{183}| = 183.|A_1| = 2013 \Rightarrow |A_1| = 11$

Vậy $|A_1| = |A_2| = |A_3| = ... = |A_{183}| = 11$.

* Ta chứng minh $\left|\bigcap_{i=1}^{183} A_i\right| = 1$.

Xét tập $A_1$, từ $|A_1 \cap A_i| = 1$ với i = 1, 2,..., 183

suy ra mỗi tập $A_2, A_3, ..., A_{183}$ chứa đúng một phần tử của $A_1$.

Do $|A_1| = 11$ nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại và có thể giả sử

$A_2, A_3, ..., A_{18}$ cùng chứa phần tử a của $A_1$.

Ta chứng minh a là phần tử chung của các tập hợp $A_1, A_2, A_3, ..., A_{183}$.

Thật vậy, giả sử có i > 18 sao cho $a \notin A_i$,

vì $|A_i \cap A_j| = 1 \Rightarrow |(A_i \setminus \{a\}) \cap A_j| = 1$ nên $|(A_i \setminus \{a\}) \cap A_j| = \{b_j\}$ (*)

với j = 1,2, ...,18, ta thấy các $b_j$ phân biệt vì nếu tồn tại $j,t \in \{1,2,...,18\} : b_j = b_t \Rightarrow A_j \cap A_t = \{b_t, a\} \Rightarrow |A_j \cap A_t| = 2$ (vô lí).

Từ (*) suy ra $A_i$ chứa nhiều hơn 11 phần tử (trái giả thiết $|A_i|=11$) nên ta có

$$a \in A_i, \forall i = 1,2,...,183 \Rightarrow \left|\bigcap_{i=1}^{183} A_i\right| = 1$$

Vậy $\left|\bigcup_{i=1}^{183} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{183} (A_i \setminus \{a\} \cup \{a\})\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{183} (A_i \setminus \{a\})\right| + |\{a\}| = 183.10 + 1 = 1831.$

**Câu 6.**

Trong (2), cho x = 1 ta được: f(1) = 1.

Từ (1) bằng phương pháp quy nạp, ta có:

$f(x+n) = f(x) + n,\ \forall x \in \mathbb{Q}^+,\ n \in \mathbb{N}^*$ (3)

Thật vậy: n = 1: f(x+1) = f(x) + 1 nên (3) đúng.

Giả sử (3) đúng với $n = k \geqslant 1$. Khi đó:

$f(x+k+1) = f(x+1) + k = f(x) + k + 1\ \ \forall x \in \mathbb{Q}^+; k \in \mathbb{N}^*$

Vậy (3) đúng $\forall x \in \mathbb{Q}^+,\ n \in \mathbb{N}^*$

Trong (3), cho x = 1 ta được f(n + 1) = n + 1. Suy ra $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$

Với mỗi số $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+;\ p,q \in \mathbb{N}^*$

+ Tính theo (3), ta được:

$$\left(f(r+q^2)^3\right) = \left(f(r)+q^2\right)^3 = f^3(r) + 3f^2(r)q^2 + 3f(r)q^4 + q^6$$

+Tính theo điều kiện (2), ta được:

$$\left(f(r+q^2)\right)^3 = f\left((\frac{p}{q}+q^2)^3\right) = f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3\frac{p^2}{q^2}q^2 + 3\frac{p}{q}.q^4 + q^6\right)$$

$$= f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3q^2 + 3pq^3 + q^6\right) = f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3\right) + 3q^2 + 3pq^3 + q^6$$

$$= f(r^3) + 3q^2 + 3pq^3 + q^6 = f^3(r) + 3q^2 + 3pq^3 + q^6$$

Từ hai điều kiện trên ta được:

$$q^2f^2(r) + q^4f(r) - (p^2 + pq^3) = 0 \Leftrightarrow f^2(r) + q^2f(r) - r^2 - p^2r = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(r) - r\right)\left(f(r) + r + p^2\right) = 0 \Leftrightarrow f(r) = r.$$

Kết luận: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}^+$.

Thử lại thấy đúng.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT KIÊN GIANG

**Câu 1.**

Điều kiện: $\begin{cases} 3x + y \geqslant 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$

$$(x-y)^2 + \frac{4xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy + \frac{4xy}{x+y} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x-y)^2 + x + y\right] = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$$

Thay $x + y = 1$ vào phương trình thứ hai ta được $\sqrt{2x+1} = (2x-5)^2 - 4x + 4$

Đặt $5 - 2t = \sqrt{2x+1}$, $t \leqslant \frac{5}{2}$

Ta có hệ (*) $\begin{cases} 2x + 1 = (5-2t)^2 & (1) \\ 4x - 2t + 1 = (5-2x)^2 & (2) \\ t \leqslant \frac{5}{2} \end{cases}$

Lấy phương trình $(1)$ trừ phương trình $(2)$ theo vế, ta được

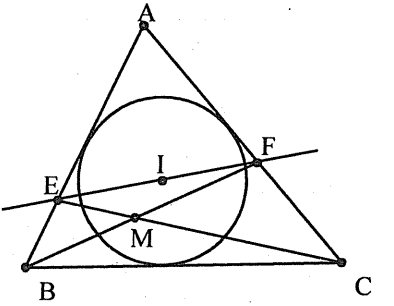
$$(2x-2t)(2x+2t-11) = 0.$$

Giải hệ $(*)$ ta tìm được $x = t = \frac{3}{2} \vee \begin{cases} x = \frac{13+\sqrt{29}}{4} \\ t = \frac{9-\sqrt{29}}{4} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{13+\sqrt{29}}{4} \\ y = \frac{-9-\sqrt{29}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{13+\sqrt{29}}{4} \\ y = \frac{-9-\sqrt{29}}{4} \end{cases}$

**Câu 2:**




Giả sử $\frac{AE}{BE}=\frac{1}{x},\frac{CF}{AF}=\frac{1}{y}$, $x,y>0$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta MAC}}=\frac{BE}{AE}=x;$$

$$+\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MFC}}=\frac{AC}{FC}=\frac{AF+FC}{FC}=1+y.$$

Do đó $S_{\Delta FBC}=S_{MBC}+S_{MFC}=S_{MBC}+\frac{S_{MBC}}{(1+y)x}$

Suy ra

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{FBC}}.\frac{S_{FBC}}{S_{MCB}}=\frac{AC}{FC}.\frac{S_{FBC}}{S_{MCB}}=(1+y)\left(1+\frac{1}{x(1+y)}\right)=1+y+\frac{1}{x}\ (1)$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta$ ABC.

EF đi qua I nên $S_{\Delta IAE}+S_{\Delta IAF}=\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}.S_{\Delta ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r.AE+\frac{1}{2}r.AF=\frac{AE}{b}.\frac{AF}{b}.\frac{1}{2}r(a+2b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{AE}+\frac{b^2}{AF}=a+2b\Leftrightarrow \frac{b.BE}{AE}+\frac{b.CF}{AF}=a$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{y}=\frac{a}{b}\Rightarrow \frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}}\qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{y}{x}}\geqslant 1+\frac{4b}{a}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{y}=\frac{a}{2b}$.

**Câu 3.**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\ \text{(i)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}$$

$$=\frac{a^4}{a(b+2c)}+\frac{b^4}{b(c+2a)}+\frac{c^4}{c(a+2b)}\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca\ \forall a,b,c$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}$$

$$\geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)}=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Bất đẳng thức (i) được chứng minh xong.

Áp dụng bất đẳng thức (i) vào bài toán ta được

$$\frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}+\frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c}+\frac{2}{a}}+\frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=1.$$

Vậy $\dfrac{bc}{a^3(c+2b)}+\dfrac{ca}{b^3(a+2c)}+\dfrac{ab}{c^3(b+2a)}\geqslant 1.$

**Câu 4.**

Đặt $a=\underbrace{22...2}_{p\text{ số}}\underbrace{00...0}_{p\text{ số}}\underbrace{11...1}_{p\text{ số}}\underbrace{33...3}_{p\text{ số}}$

Nếu $p=3$ thì dễ thấy $a\equiv 2013\equiv 0 \pmod 3$.

Nếu $p\neq 3$: ta có

$$a=2.(10^{4p-1}+10^{4p-2}+...+10^{3p})+1.(10^{2p-1}+...+10^{p})+3(10^{p-1}+...+1)$$

$$=\frac{10^p-1}{9}(2.10^{3p}+1.10^p+3)$$

Theo định lí Fermat nhỏ: $10^p\equiv 10 \pmod p \Rightarrow 10^{3p}\equiv 10^3 \pmod p$

$$\Rightarrow (2.10^{3p}+1.10^p+3)\equiv 2.10^3+1.10+3\equiv 2013 \pmod p \qquad (1)$$

Lại có $10^p-1\equiv 9 \pmod p$ và $(p,9)=1$ nên $\dfrac{10^p-1}{9}\equiv 1 \pmod p$ (2)

(lưu ý rằng vế trái là số nguyên).

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 5.**

Với mỗi số nguyên dương lẻ k, đặt $S_k=\{k;2k;4k;8k;...2^m k;...\}\subset S$.

Rõ ràng ta có các tính chất sau:

1) Hai phần tử trong $S_k$ là ước của nhau.

2) $S_m\cap S_n=\varnothing$ với mọi số lẻ m, n và $m\neq n$.

3) $S = S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup ... \cup S_{2013}$.

4) Với mỗi số nguyên dương lẻ k thì $|S_k \cap A| \leqslant 1$ (do tính chất (1))

Suy ra $|A| = |(S_1 \cap A) \cup (S_3 \cap A) \cup ... \cup (S_{2013} \cap A)|$

$= |S_1 \cap A| + |S_3 \cap A| + ... + |S_{2013} \cap A| \leqslant 1007$

Ta xét $A_0 = \{1007;1008;...;2013\}$, $|A_0| = 1007$.

Do $1007 \times 2 = 2014 > 2013$ nên trong $A_0$ không có chứa hai phần tử nào là ước của nhau.

Vậy giá trị lớn nhất của $|A|$ là 1007.

**Câu 6.**

$a = b = 1 \Rightarrow f(1) = (f(1))^2 \Rightarrow f(1) = 1$.

$f(4) = f(2+2) = 2f(2)$.

$f(6) = f(2.3) = f(2).f(3)$.

Mặt khác $f(6) = f(3+3) = 2f(3)$, suy ra $f(2) = 2$

Suy ra $f(4) = 4$.

$f(12) = f(4.3) = f(4).f(3) = 4.f(3)$ và

$f(12) = f(5+7) = f(5) + f(7)$

$= f(2) + f(3) + f(5) + f(2)$

$= f(2) + f(3) + f(2) + f(3) + f(2) = 6 + 2f(3)$

Như vậy $4f(3) = 6 + 2f(3) \Leftrightarrow f(3) = 3$.

Từ trên, dễ dàng tìm được $f(5) = 5$, $f(7) = 7$, $f(9) = 9$.

Ta có $2013 = 3.11.61 \Rightarrow f(2013) = f(3).f(11).f(61) = 3.f(11).f(61)$.

$f(14) = f(11+3) = f(11) + f(3) = 3 + f(11)$ và $f(14) = f(2).f(7) = 14$

Suy ra $f(11) = 11$;

$f(63) = f(61+2) = f(61) + f(2) = 2 + f(61)$

và $f(63) = f(9.7) = f(9).f(7) = 9.7 = 63$.

Suy ra $f(61) = 61$.

Vậy $f(2013) = 2013$.

# Phần II

# ĐỀ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIX – NĂM 2013

## B. LỚP 11

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 \\ 36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{-14x_{n-1} - 51}{5x_{n-1} + 18} \ (\forall n \geqslant 2) \end{cases}$

a. Tính $x_{2013}$

b. Tính $\lim x_n$

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3; BC = 5; CA = 7. Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại M và N. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{BM.CN}{AM.AN}$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i. $f(x-1) + g(2x+1) = 2x$

ii. $f(2x+2) + 2g(4x+7) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

**Câu 5.**

Cho *x* là một số thực. Chứng minh rằng nếu $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì *x* là một số nguyên, trong đó kí hiệu $\{t\}$ để chỉ phần lẻ của số thực *t*.

**Câu 6.**

Có hai đống đá, một đống có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút, một máy tự động lại chọn một đống có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đống đá được chọn sang đống kia. Nếu cả hai đống đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đống. Nếu trong hai đống số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp sắp thứ tự (n, k), với n và k là các số nguyên dương không vượt quá 2013, để máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 \\ 36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho $m \in \mathbb{R}$. Dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = m \\ 7u_{n+1} = \sqrt{30u_n^2 + 4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 3.**

Các đường phân giác AA', BB', CC' của tam giác ABC đồng quy tại I.

Biết rằng các đường tròn nội tiếp các tam giác IBA', ICA', ICB' bằng nhau.

Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều.

**Câu 4.**

Cho hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(x^2 + f(y)) = (f(x))^2 + y$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{N}^*$.

Tính f(2013).

**Câu 5.**

Dãy số $(u_n)$ định bởi $\begin{cases} u_1 = 21,\ u_2 = 9 \\ u_{n+2} = 30u_{n+1}^2 + 12u_{n+1}u_n - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy $(u_n)$ là tổng các lũy thừa bậc 7 của ba số nguyên.

**Câu 6.**

Có thể tìm được hay không 2013 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn hoặc bằng 100000, sao cho ba số bất kì trong các số đó không thể lập thành ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng?

# TRƯỜNG THPT MẠC ĐĨNH CHI TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình với nghiệm thực: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(2 + \dfrac{7}{2x + 5y}\right) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5y}\left(2 - \dfrac{7}{2x + 5y}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ biết: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Hãy tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n.\sqrt{n}\right)$.

**Câu 3.**

Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn tâm (I) nội tiếp trong tam giác và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C'. Gọi M là giao điểm của B'C' với BC; N là giao điểm của C'A' với CA; P là giao điểm của A'B' với AB.

Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm tăng nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+y\right) = f(x+y)+1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Câu 5.**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\left(4^x + 5.2^x + 5\right)^2 - 11880 = 5^{y-1}$.

**Câu 6.**

Một nhóm học sinh có 8 nữ và 4 nam. Có bao nhiêu cách sắp xếp nhóm thành một hàng dọc sao cho không có 2 bạn nam nào đứng cạnh nhau?

# TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Cho dãy số thực $(x_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2013 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh dãy số $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 2.**

Giải phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\log\frac{\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x}}{\sqrt{5x^2-4x-6}} = \sqrt{5x^2-4x-6} - \sqrt{x^2-x-2} - 3\sqrt{x}.$$

**Câu 3.**

Trên một vòng (O) có ba điểm S, A, B theo thứ tự đó. Định trên cung AB không chứa S một điểm Q để biểu thức sau cực đại:

$$y = \frac{QA.QB}{QS^2}.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x-f(y)) = 2f(x)+x+f(y);\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Tìm tất cả đa thức $P(x)$ thỏa mãn $[P(x)]^2-1 = 4P(x^2-4x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

# TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\left(8x^3+1\right)^3 - 162x + 27 = 0$

**Câu 2.**

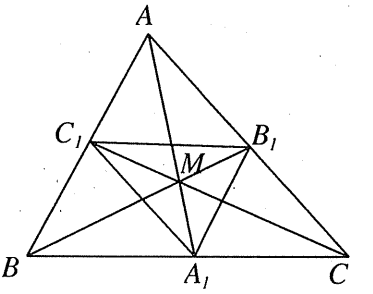
Cho dãy số $(u_n)$ thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}.(1-u_n) > \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ với mọi } n = 1, 2,...$$

Tính $\lim u_n$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác đó. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại $A_1$, $B_1$, $C_1$. Hãy xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ lớn nhất.




**Câu 4.**

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa: $f(x+1)+f(x-1) = \sqrt{2}f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Chứng minh rằng: $f(x+2013) = -f(x+1), \forall x\in\mathbb{R}$

**Câu 5.**

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4+n^3+1$ là số chính phương.

**Câu 6.**

Một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 2012 hàng và 2013 cột. Kí hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (kể từ trên xuống dưới) và cột thứ n (kể từ trái sang phải) là (m;n). Tô màu các ô vuông của bảng theo cách sau: lần thứ nhất tô 3 ô $(r;s),(r+1;s+1),(r+1;s+2)$, với r, s là hai số tự nhiên cho trước thỏa mãn $1\leqslant r\leqslant 2010$ và $1\leqslant s\leqslant 2012$; từ lần thứ hai mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?

# TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+y)^4+3=4(x+y)\\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9(x^2-y^2)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0\end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $u_1=3;\ u_{n+1}^3-3u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

Tìm giới hạn $\lim u_n$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm K. M và N lần lượt là trung điểm của AC và AB. Đường thẳng NK cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng MK cắt đường thẳng AB tại F, biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng diện tích tam giác AEF.

a. Tính độ dài đoạn thẳng AE theo độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

b. Tính góc $\widehat{CAB}$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x)+P(1)=\frac{1}{2}\left[P(x+1)+P(x-1)\right]\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Tìm $a, b, c, d\in\mathbb{N}^*$ sao cho $(2^a+1)^b=(2^c-1)^d$.

**Câu 6.**

Tồn tại hay không một tập hợp gồm 2012 số nguyên dương với tính chất: loại bất cứ số nào ra khỏi tập hợp đó thì tập hợp 2011 số còn lại có thể chia thành hai tập con với tổng các số (thuộc mỗi tập con đó) là bằng nhau?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH KON TUM

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

**Câu 2.**

Cho hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ xác định bởi $a_0=2, b_0=3, a_1=3, b_1=5$ và $a_n=a_{n-2}+b_{n-2}, b_n=a_{n-1}+b_{n-1}; \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$.

Đặt $u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\frac{1}{a_kb_k}, n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh dãy $(u_n)$ có giới hạn và tính giới hạn đó.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh AC, AB và M là trung điểm của BC. Gọi N là giao điểm của AM và EF, X là giao điểm của BI và EF, Y là giao điểm của CI và EF. Chứng minh rằng $NX.AB=NY.AC$.

**Câu 4.**

Chứng minh rằng, nếu đa thức với những hệ số nguyên

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

nhận giá trị là luỹ thừa của một số nguyên với vô hạn giá trị nguyên của biến *x*, thì $P(x)=(x+c)^n$, với c là hằng số nguyên.

**Câu 5.**

Cho đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ với hệ số $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số nguyên và $\alpha=\frac{u}{v}$ là số hữu tỉ, (u, v là các số nguyên và u, v nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng, nếu $\alpha$ là một nghiệm của P(x) thì với mọi số nguyên m, P(m) chia hết cho u – mv.

**Câu 6.**

Có hai đống đá có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút một máy tự động lại chọn một đống có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đống đá được chọn sang đống kia. Nếu cả hai đống đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đống. Nếu trong hai đống số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp sắp thứ tự (*n*, *k*), với *n* và *k* là các số tự nhiên không vượt quá 2013, để máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

**Câu 1.**

Cho tam thức bậc hai f(x) thỏa $|f(x)| < 1$ với mọi $x \in [-1;1]$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 3x^2 - x - 1$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng $f\left(\frac{4}{3}\right) < 3$.

**Câu 2.**

Cho a là một số thực dương và dãy $(x_n)$ được xác định:

$$x_1 = \frac{1}{2a}, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + ax_n + \sqrt{a^2x_n^2 + 4ax_n}} \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Tìm $\lim S_n$.

**Câu 3.**

Trên nửa đường tròn (O) lấy các điểm M, N, P, Q phân biệt. Gọi m, n, p, q lần lượt là các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M, N, P, Q. Giả sử A, B, C, D lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (q, m), (m, n), (n, p), (p, q). Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy (tại điểm I).

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)\left((f(x))^2 + y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Cho đa thức: $P(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$, với các hệ số nguyên a, b, c và có ba nghiệm nguyên là $x_1, x_2, x_3$.

Chứng minh rằng:

$(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ chia hết cho 2017.

**Câu 6.**

Cho hai đống đá, một đống có a hòn đá, đống kia có b hòn đá. Hai người chơi, mỗi người đến lượt mình được lấy một hòn đá từ một trong hai đống, hoặc lấy phần nguyên của một nửa số hòn đá từ đống thứ nhất, hoặc lấy phần nguyên một nửa số hòn đá từ đống thứ hai, hoặc lấy từ hai đống số hòn đá như nhau. Người lấy được hòn đá cuối cùng là người chiến thắng.

Hãy tìm tất cả các cặp $(a, b)$ trong đó $a \leqslant 8, b \leqslant 13$ sao cho người đi sau có chiến thuật thắng.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN

**Câu 1.**

Giải phương trình sau trong khoảng $(0;1)$: $32x(x^2-1)(2x^2-1)^2 = 1-\frac{1}{x}$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $\{x_n\}$, xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} < 1-\frac{1}{2^{2^n}}, \forall n \geqslant 1$

**Câu 3.**

Hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Trên tia đối Ax của tia AB lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn $(O')$ hai tiếp tuyến MC và MD $(C, D$ là các tiếp điểm và D nằm trong $(O))$. Đường thẳng AC cắt $(O)$ lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia Ax.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x+f(y)) = f(x+y)+f(y)$ với mọi $x,y \in \mathbb{R}^+$.

**Câu 5.**

Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho phương trình

$x+y+z+t = n\sqrt{xyzt}$ có nghiệm nguyên dương (x, y, z, t).

**Câu 6.**

Cho tập hợp *A*, kí hiệu $|A|$ và $s(A)$ lần lượt là số các phần tử và tổng tất cả các phần tử của *A* (nếu $A=\varnothing$ thì $|A| = s(A) = 0$). Cho *S* là tập hợp con của $\mathbb{N}^*$ thoả mãn hai điều kiện sau:

i) Tồn tại hai số $x,y \in S$ sao cho ước chung lớn nhất bằng 1.

ii) Nếu $u,v \in S$ thì $u+v \in S$.

Gọi *T* là phần bù của *S* trong $\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng *T* hữu hạn và $s(T) \leqslant |T|^2$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN

# LONG AN

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x-2\sqrt{y-1}-1\right)=(1-x)y-1 \\ x^2\left(x+3\sqrt{y-1}-6\right)=16-\sqrt{(y-1)^3} \end{cases}$ (I)

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1>0 \\ u_{n+1}.u_n-3=\sqrt{3u_n^2+8u_n+9}, \forall n\geqslant 1 \end{cases}$

Chứng minh ràng $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 3.**

Trên đường tròn tâm O, bán kính R lấy sáu điểm D, E, F, G, H, K theo thứ tự đó sao cho DE = FG = HK = R. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EF, GH và KD.

Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=f(xy)+(x-y)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

**Câu 5.**

Tồn tại hay không số nguyên n để $n.2^{2^{2013}}-78-n$ là số chính phương?

**Câu 6.**

Một hoàng tử đi cứu công chúa và gặp một con rắn có 100 cái đầu. Hoàng tử có hai thanh kiếm:

Thanh kiếm 1 cho phép chặt đúng 21 cái đầu;

Thanh kiếm 2 cho phép chặt đúng 4 cái đầu nhưng khi đó con rắn lại mọc thêm 2013 cái đầu khác.

Biết rằng hoàng tử cứu được công chúa nếu như con rắn bị chặt hết đầu.

a) Hỏi hoàng tử có cứu được công chúa không?

b) Nếu từ 100 cái đầu thì con rắn sau mỗi lần bị chặt có thể có bao nhiêu cái đầu?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH

# PHÚ YÊN

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+(4-x)y^2+4y-x^2-2x=0 \\ 3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{4(x-y+1)}\right)=(x+1)^2-8(y-1). \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$ được xác định bởi: $\begin{cases} x_0 = a < 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2^{x_n}} + \dfrac{x_n}{2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Chứng minh $(x_n)$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

**Câu 3.**

Cho hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ tiếp xúc ngoài tại điểm T, đường thẳng d là tiếp tuyến chung tại T của hai đường tròn, A là một điểm trên d. Đường thẳng $\Delta$ qua A cắt $(O_1)$ tại M và N, MT và NT lần lượt cắt $(O_2)$ tại P và Q. Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến của $(O_2)$ tại P và Q. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi $\Delta$ quay quanh A.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(x^2 - 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Chứng minh số $m = p^{p+1} + (p+1)^p$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên tố $p$.

**Câu 6.**

Cho X = {1, 2, ..., n}. Tìm số tất cả các cặp có thứ tự (A, B) với A, B là các tập con của X sao cho A không phải là tập con của B và B cũng không phải là tập con của A.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG CẦN THƠ

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + 2(x+y) = 4 + 2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{3x + 6\sqrt{xy}}\right) + \sqrt{y}\sqrt{3y + 6\sqrt{xy}} = 6 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số thực $(a_n)$ bị chặn và thỏa mãn

$$a_{n+2} \leqslant \frac{p}{p+q}a_{n+1} + \frac{q}{p+q}a_n, n \geqslant 1 \text{ với } p, q > 0.$$

Chứng minh rằng dãy $(a_n)$ có giới hạn hữu hạn.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO và BC, BO và AC, CO và AB. Gọi $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $AD + BE + CF \geqslant 9r$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(1)=-1 \text{ và } f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Cho n là một số nguyên dương và p là một số nguyên tố.

Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên (không nhất thiết dương) thỏa mãn phương trình $a^n + pb = b^n + pc = c^n + ca$ thì $a = b = c$.

**Câu 6.**

Có bao nhiêu dãy có độ dài 2013 có thể lập được bằng cách sử dụng các chữ cái A, B, C với chữ cái A xuất hiện số lẻ lần, chữ cái B xuất hiện số lẻ lần và chữ cái C xuất hiện số lẻ lần?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN CÀ MAU

**Câu 1.**

Giải phương trình: $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12x}$.

**Câu 2.**

Cho hai dãy số $(a_n)$: $a_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2.2^{2n}}$

và dãy $(x_n)$: $x_n=(2013a_n)^{a_n}$, $n=1,2,3,\ldots$

Chứng minh rằng hai dãy $(a_n)$ và $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và tìm các giới hạn đó.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phân giác trong góc A cắt BC tại $A_1$ và cắt đường tròn (O) tại $A_2$. Định nghĩa tương tự đối với các điểm $B_1, B_2$ và $C_1, C_2$ tương ứng. Chứng minh rằng:

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+A_2C}+\frac{B_1B_2}{CB_2+B_2A}+\frac{C_1C_2}{AC_2+C_2B}\geqslant\frac{3}{4}.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ và thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-2f(\frac{2012}{2013}x)+f(\frac{2012^2}{2013^2}x)=x^2$.

**Câu 5.**

Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $x^3+9y^2+9z+23=2013$, với $x\geqslant y\geqslant z$.

**Câu 6.**

Cho $n$ điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$ và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số $n$ điểm đã cho.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO BÌNH THUẬN

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2z(x+y)+1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2xz - 2yz \\ y(3x^2-1) = -2x(x^2+1) \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+2} = \frac{2}{5\pi}x_{n+1}^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$.

**Câu 3.**

Gọi $G$, $I$ lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Đường thẳng qua $G$ và song song với $BC$ cắt $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $B_c$, $C_b$. Các điểm $C_a$, $A_c$, $A_b$, $B_a$ được xác định tương tự. Các điểm $I_a$, $I_b$, $I_c$ theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $GB_aC_a$, $GC_bA_b$, $GA_cB_c$. Chứng minh rằng $AI_a$, $BI_b$, $CI_c$ đồng quy tại một điểm trên $GI$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; y \neq 0 \ (1)$$

**Câu 5.**

Cho $k = 2^{2^n} + 1$, với $n$ nguyên dương. Chứng minh rằng $k$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $k$ là ước của $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$.

**Câu 6.**

Có 2n người xếp thành 2 hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một số người (ít nhất 1) từ 2n người này, sao cho không có hai người nào đứng kề nhau được chọn? Hai người đứng kề nhau là hai người có số thứ tự liên tiếp trong một hàng dọc hoặc có cùng số thứ tự ở hai hàng.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM VĨNH LONG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\sin x = \dfrac{1+x-x^5-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2+1}$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$ được xác định bởi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ và

$x_n x_{n-3} = x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-2}^2$, với mọi $n \geqslant 4$.

Chứng minh rằng $x_n$ là số nguyên với mọi $n$ nguyên dương.

**Câu 3.**

Cho đa thức $f(x) = 5x^{13} + 13x^5 + 9ax$. Tìm số nguyên dương $a$ nhỏ nhất sao cho $f(x)$ chia hết cho 65 với mọi giá trị nguyên của $x$.

**Câu 4.**

Cho $a,b,c > 0$ và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2(c+1)} + \frac{b}{c^2(a+1)} + \frac{c}{a^2(b+1)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**Câu 5.**

Cho số thực dương $k$. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy)+f(yz)+f(zx)-k\big(f(x)f(yz)+f(y)f(zx)+f(z)f(xy)\big) \geqslant \frac{3}{4k}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

**Câu 6.**

Cho tứ diện $ABCD$. Kí hiệu $h_A$ và $m_A$ lần lượt chỉ độ dài đường cao và độ dài đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh $A$ đến mặt $(BCD)$ đối diện.

Gọi V là thể tích của tứ diện. Chứng minh rằng

$$(h_A+h_B+h_C+h_D)(m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2) \geqslant \frac{128}{\sqrt{3}}V.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU AN GIANG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=\dfrac{u_n+4}{6-u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

a. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

b. Đặt $T_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_k-4}$. Tính $\lim\dfrac{T_n}{n+2013}$.

**Câu 3.**

Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng: $\dfrac{BM.CN}{AM.AN}\leqslant\dfrac{BC^2}{4.AB.AC}$

**Câu 4.**

Tìm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)-f(y)=\cos(x+y)g(x-y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Cho k, n là các số nguyên dương với n > 2.

Chứng minh rằng phương trình: $x^n-y^n=2^k$ không có nghiệm nguyên dương.

**Câu 6.**

Có 12 bài tập, trong đó có 6 bài dễ, 4 bài trung bình, 2 bài khó. Muốn chọn ra 6 bài. Hỏi có bao nhiêu cách:

a) Chọn ra mỗi loại 2 bài.

b) Chọn ra mỗi loại ít nhất 1 bài.

c) Chọn số bài dễ bằng số bài trung bình.

d) Chọn số bài trung bình nhiều hơn số bài dễ.

# TRƯỜNG THPT HẬU NGHĨA - LONG AN

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^4+x^2y^2+xy^2=x^3y+x^2y+y^3\\\sqrt{x^2+y+1}+y=7\end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \sqrt{3}u_n + 1 = \sqrt{u_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm và tính giới hạn của dãy số $(u_n)$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp trong đường tròn (C) có tâm O và điểm H sao cho $3\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AO}$; Gọi D là điểm thay đổi trên đường tròn (C); Gọi M là trung điểm đoạn AD và I là trung điểm đoạn OM. Tìm tập hợp điểm I khi D thay đổi trên đường tròn (C).

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{4025}{2} \\ f(x+y) + xy = f(x) + f(y), \forall x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Câu 5.**

Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng: $9^n + 14^n + 16^n$ chia hết cho 13 khi và chỉ khi n không chia hết cho 3.

**Câu 6.**

Cho hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ đồng tâm O, có bán kính lần lượt là $R_1 = 2013$ và $R_2 = 2015$. Hỏi có thể đặt được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn (C), biết rằng các đường tròn (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C_1)$, tiếp xúc trong với đường tròn $(C_2)$ và các đường tròn (C) này không phủ nhau?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU - ĐĂK LĂK

**Câu 1.**

Giải phương trình: $16x^5 - 20x^3 + 5x + 2013 = 0$.

**Câu 2.**

Cho dãy số nguyên dương $(u_n)$ thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1}^2 > u_n.u_{n+2}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \dfrac{3}{u_3} + \cdots + \dfrac{n}{u_n}\right)$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 \leqslant 6\sqrt{3}.R^2(2R-r).$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$f(x.f(y)) = y.f(x);\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

**Câu 5.**

Tìm 7 số nguyên tố (có thể trùng nhau) sao cho tổng bình phương của chúng cũng là bình phương của một số nguyên tố.

**Câu 6.**

Với các chữ số 1 và 2, lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2013 chữ số chia hết cho $2^{1000}$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN KHÁNH HÒA

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình tìm nghiệm dương của hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = x_3^{2014} \\ x_2 + x_3 & = x_4^{2014} \\ \dots \\ x_{2013} + x_{2014} & = x_1^{2014} \\ x_{2014} + x_1 & = x_2^{2014} \end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Hãy tính: $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

**Câu 3.**

Cho tam giác $ABC$ và điểm $J$ là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $A$ của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với $AB$, $AC$, $BC$ lần lượt tại $K$, $L$, $M$. Đường thẳng $LM$ cắt $BJ$ tại $F$, $KM$ cắt $CJ$ tại $G$. Gọi $S$, $T$ lần lượt là giao điểm của $AF$, $AG$ với $BC$.

Chứng minh rằng $M$ là trung điểm đoạn $ST$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(x) + f(y) + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Cho $a$, $b$ là hai số nguyên dương phân biệt sao cho $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

**Câu 6.**

Cho số nguyên $n > 1$. Tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của $(1, 2, ..., n)$ sao cho tồn tại duy nhất chỉ số $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG

# TIỀN GIANG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = 32x^3 + 48x^2 + 18x + 1$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)_{n \geqslant 1}$ xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$.

Tìm tất cả các giá trị của $a$ để dãy số có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn của dãy số trong mỗi trường hợp đó.

**Câu 3.**

Cho $\Delta$ ABC và điểm M không thuộc đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại $A_1$, $B_1$, $C_1$. Gọi $A_2 = BC \cap B_1C_1$, $B_2 = AC \cap A_1C_1$, $C_2 = BA \cap B_1A_1$. Gọi $A_3$, $B_3$, $C_3$ theo thứ tự là trung điểm các đoạn $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$. Chứng minh rằng $A_3$, $B_3$, $C_3$ cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ và trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n, f(n) là ước của $3^n - 1$.

**Câu 5.**

Cho $x$ là một số thực. Chứng minh rằng nếu $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$ thì $x$ là một số nguyên, trong đó kí hiệu $\{t\}$ để chỉ phần lẻ của số thực $t$.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các tập con khác rỗng $A$, $B$ của tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $A \cap B = \varnothing$.

ii) Với mọi phần tử $a \in A, b \in B$ ta có: $a + b \in A$ và $2a + b \in B$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^y \\ y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \end{cases}$.

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$ như sau: $x_1 = 2;\ x_{n+1} = \sqrt{4 + \sqrt{8x_n + 1}}, \forall n = 1,2,\ldots$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

**Câu 3.**

Cho đường tròn (O;R) cố định và A, B, C là ba điểm thay đổi trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn. AO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại điểm thứ hai M, BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OAC tại điểm thứ hai N, CO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB tại điểm thứ hai P. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $OM.ON.OP$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các đa thức P(x) hệ số thực và thỏa mãn: Với a, b, c là ba số thực bất kì thì

$$P(\sqrt{3}(a-b)) + P(\sqrt{3}(b-c)) + P(\sqrt{3}(c-a))$$
$$= P(2a-b-c) + P(-a+2b-c) + P(-a-b+2c).$$

**Câu 5.**

Cho dãy số $(u_n)$ như sau:

$$u_0 = 9, u_1 = 161; u_n = 18u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n = 2,3,\ldots$$

Chứng minh rằng $\dfrac{u_n^2 - 1}{5}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

**Câu 6.**

Trong một giải bóng đá có 9 đội tham gia, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác (theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt). Chứng minh rằng vào bất cứ thời điểm nào cũng có 4 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc có 3 đội chưa đấu với nhau trận nào.

# TRƯỜNG THPT ĐĂK SONG - ĐĂK NÔNG

**Câu 1.**

Giải bất phương trình sau: $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x} \leqslant x - 2$.

**Câu 2.**

Cho dãy $(x_n)$ xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + ... + \frac{x_n}{x_{n+1}})$.

**Câu 3.**

Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $AB.CD = AD.BC$ và $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} \neq \widehat{BCA} + \widehat{CAD}$. Gọi $M$ là trung điểm của đường chéo $AC$, $E$ là điểm trên đường thẳng $BM$ sao cho $DE \parallel AC$. Chứng minh rằng nếu tứ giác $ACED$ là một hình thang cân thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các cặp hàm số $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i. $f(x-1) + g(2x+1) = 2x$;

ii. $f(2x+2) + 2g(4x+7) = x - 1 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Tìm hai số nguyên dương a, b thỏa mãn hai điều kiện:

i. $ab(a+b)$ không chia hết cho 7;

ii. $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ chia hết cho $7^7$

**Câu 6.**

Ta xét những dãy gồm 8 số dạng $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ (*), trong đó $a_i (1 \leqslant i \leqslant 8)$ là số chữ số 0 hoặc chữ số 1.

Tìm số các dãy đó chỉ chứa đúng hai lần dãy con 10 (tức $a_i = 1, a_{i+1} = 0$).

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BẠC LIÊU

**Câu 1.**

Giải hệ: $\begin{cases} xy^4 + y^3 + y^2 + 5x = y^5 + xy^2 + y(x+5) \\ \sqrt{2y^2 - 6x + 8} + 2 \leqslant \sqrt{x} + 2013x - 2012y \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy $(u_n)$ thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 > 0 \\ 5u_{n+1}u_n^4 - 4u_n^5 = 30, \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3; BC = 5; CA = 7. Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại M và N. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{BM.CN}{AM.AN}$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x + f(y)\right) = f(x) + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $30x^4 - 3x^2 - 7y^2 - 14x^2y^2 - 9 = 0$.

**Câu 6.**

Cho 2013 điểm trong mặt phẳng. Biết rằng trong mỗi nhóm bất kì 3 điểm của các điểm nói trên bao giờ cũng có 2 điểm có khoảng cách bé hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 1006 điểm nằm trong một đường tròn có bán kính bằng 1.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG BÌNH DƯƠNG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ trên tập hợp số thực.

**Câu 2.**

Cho a, b là hai số cho trước.

Dãy số $(x_n)$ xác định: $\begin{cases} x_1 = b \\ x_{n+1} = x_n^2 + (1 - 2a)x_n + a^2 \end{cases}$.

Tìm điều kiện của các hằng số a, b để dãy $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Câu 3.**

Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt cùng nằm trên một đường thẳng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại hai điểm X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn (AC) tại M, và đường thẳng BP cắt đường tròn (BD) tại N. Chứng minh rằng AM, DN, XY đồng quy.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

**Câu 5.**

Chứng minh rằng nếu a + b + c + 6 chia hết cho 30 thì

$(a+1)^5 + (b+2)^5 + (c+3)^5$ chia hết cho 30.

**Câu 6.**

Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, có một họ hữu hạn gồm n hình chữ nhật có các cạnh tương ứng song song với hai trục tọa độ. Chứng minh rằng nếu hai hình bất kì trong chúng có giao khác rỗng thì cả họ n hình chữ nhật trên có giao khác rỗng (n = 1, 2, 3, ...).

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE

## BẾN TRE

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 16x^2 + y^4 = 8xy^3 + 1 \\ 1 + 4xy = 8x^2 + y^2 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$: $\begin{cases} x_1 = 2013 \\ x_{n-1}{}^2 - 2x_n.x_{n-1} + 4 = 0 \ (n \geqslant 2) \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

**Câu 3.**

Cho đường tròn (O) và hai điểm A,B cố định nằm trên nó, một đường thẳng d cố định không có điểm chung với đường tròn (O). Gọi C là điểm di động trên (O) và không trùng với A, B. Các tia AC, BC cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh rằng đường tròn đường kính DE luôn tiếp xúc với hai đường tròn cố định.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) - 2xf(y) + f(x) - 2 \ \forall x,y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

**Câu 5.**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên m, tồn tại một số nguyên n sao cho

$n^3 - 5n^2 + 676n + m$ chia hết cho 2003.

**Câu 6.**

Cho S là tập hợp hữu hạn các điểm trong không gian Oxyz. Gọi $S_x, S_y, S_z$ lần lượt là tập hợp những điểm hình chiếu của những điểm trong S trên các mặt phẳng Oyz, Oxz, Oxy.

Chứng minh rằng: $|S|^2 \leqslant |S_x|.|S_y|.|S_z|$ (trong đó, |A| kí hiệu là số phần tử của tập hợp hữu hạn A).

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT KIÊN GIANG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2 \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2} \end{cases}.$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm (I), các cạnh BC, CA tiếp xúc với (I) tại D và E. Gọi K đối xứng với D qua trung điểm M của BC. Đường thẳng $\Delta$ qua K, vuông góc với BC cắt đường thẳng DE tại L. Gọi N là trung điểm KL. Chứng minh BN vuông góc với AK.

**Câu 4.**

Cho dãy hàm $\{f_n(x)\}$ với $f_1(x) = \dfrac{2x + 4033}{x + 2016}$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)), n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $f_{2013}(2012)$.

**Câu 5.**

Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $2010^x + 2011^y = 2012^z$.

**Câu 6.**

Có 7 đa giác cùng có diện tích bằng 1 nằm trong một hình vuông có diện tích bằng 4. Chứng minh rằng có ít nhất hai đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\dfrac{1}{7}$.

# ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIX – NĂM 2013

## B. LỚP 11

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Câu 1.**

$$\begin{cases} x+3y^2-2y=0 & (1) \\ 36(x\sqrt{x}+3y^3)-27(4y^2-y)+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện $x \geq 0$. Ta có (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2+(3y-1)^2=1$.

Do đó ta đặt $\begin{cases} \sqrt{3x}=\sin t \\ 3y-1=\cos t \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 t+\cos^2 t=1 \\ 4\sqrt{3}\sin^3 t+4(1+\cos t)^3-12(1+\cos t)^2 \\ \qquad +9(1+\cos t)+(2-3\sqrt{3})\sin t-1=0 \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 t-3\cos t+4\sqrt{3}\sin^3 t-3\sqrt{3}\sin t+2\sin t=0 \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t-\sqrt{3}\sin 3t+2\sin t=0 \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3t-\frac{\pi}{6})=\sin t \\ t\in[0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ t=\frac{7\pi}{24}+\frac{m\pi}{2} \end{array}\right. (k,m\in\mathbb{Z}) \\ t\in[0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left\{\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{24};\frac{19\pi}{24}\right\}.$$

Do đó hệ (I) có ba nghiệm là:

$$* \ x=\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{3}.\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{12} \text{ và } y=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{3}=\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}.$$

$$* \ x=\frac{1}{3}\sin^2\frac{7\pi}{24}=\frac{1}{3}.\frac{1-\cos\frac{7\pi}{12}}{2}=\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}$$

và $y = \dfrac{1+\cos\dfrac{7\pi}{24}}{3} = \dfrac{4+\sqrt{2(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{12}$

$* \; x = \dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{19\pi}{24} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1+\cos\dfrac{7\pi}{12}}{2} = \dfrac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}$

và $y = \dfrac{1+\cos\dfrac{19\pi}{24}}{2} = \dfrac{4-\sqrt{2(4-\sqrt{2}+\sqrt{6})}}{12}$.

**Câu 2**

Đặt $x_n = u_n - 3$

$$\Rightarrow u_n - 3 = \frac{-14(u_{n-1}-3)-51}{5(u_{n-1}-3)+18} \Leftrightarrow u_n = \frac{u_{n-1}}{5u_{n-1}+3} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = 5 + \frac{3}{u_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} + \frac{5}{2} = 3\left(\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{u_n} + \frac{5}{2} = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{5}{2}\right)3^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{11.3^{n-1}-10}{4} \Rightarrow u_n = \frac{4}{11.3^{n-1}-10}$$

$$\Rightarrow x_n = u_n - 3 = \frac{4}{11.3^{n-1}-10} - 3.$$

a) $x_{2013} = \dfrac{4}{11.3^{2012}-10} - 3$.

b) $\lim x_n = -3$.

**Câu 3.**

Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có: MN đi qua I $\Rightarrow S_{IAM} + S_{IAN} = \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}rAM + \frac{1}{2}rAN = \frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.AC}{AN} + \frac{AB.AC}{AM} = AB + BC + CA$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{AN} + \frac{AC.BM}{AM} = BC \Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} = 1.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM

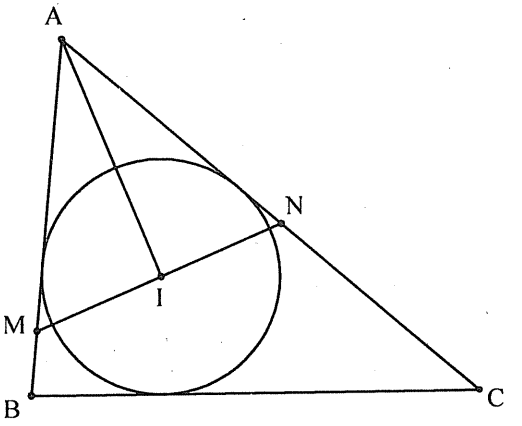
$$1 = \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} \geqslant 2\sqrt{\frac{AB.CN}{BC.AN}.\frac{AC.BM}{BC.AM}}$$

Suy ra $P = \dfrac{BM.CN}{AM.AN} \leqslant \dfrac{BC^2}{4AB.AC}$ hay $P \leqslant \dfrac{25}{84}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB.CN}{BC.AN} = \dfrac{AC.BM}{BC.AM} = \dfrac{1}{2}$

hay $\dfrac{AM}{BM} = 2\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{14}{5}$ và $\dfrac{AN}{CN} = 2\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6}{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{25}{84}$ khi $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{14}{5}$ và $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{6}{5}$.




**Câu 4.**

Đặt $2x + 2 = u - 1 \Rightarrow 4x + 7 = 2u + 1$ thay vào ( ii ) ta được

$f(u-1) + 2g(2u+1) = \dfrac{u-5}{2}$ hay $f(x-1) + 2g(2x+1) = \dfrac{x-5}{2}$ (*)

Từ (*) và (i) ta được

$g(2x+1) = \dfrac{x-5}{2} - 2x = -\dfrac{3}{4}(2x+1) - \dfrac{7}{4} \Rightarrow g(x) = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

Thay $g(2x+1) = \dfrac{x-5}{2} - 2x$ vào (i), ta được

$f(x-1) = 2x - \dfrac{x-5}{2} + 2x = \dfrac{7}{2}x + \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{2}(x-1) + 6 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7}{2}x + 6$.

Vậy $f(x) = \dfrac{7}{2}x + 6$; $g(x) = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

**Câu 5.**

Kí hiệu $[x]$ để chỉ phần nguyên của số thực $x$.

Ta có: $\{x\} = x - [x]$, $\{x^2\} = x^2 - [x^2]$, $\{x^{2013}\} = x^{2013} - [x^{2013}]$.

Theo đề bài ta có: $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$.

Suy ra: $x^2 = x + a$ (1) và $x^{2013} = x + b$ (2), trong đó

$$a = \left[x^2\right] - \left[x\right], b = \left[x^{2013}\right] - \left[x\right].$$

Từ (1) ta có: $\Delta = 1 + 4a \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$ (do $a \in \mathbb{Z}$), do đó $a \in \mathbb{N}$

+ Nếu $a = 0$ thì $x^2 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ đều là số nguyên.

+ Nếu $a > 0$ thì khi đó tồn tại 2 số nguyên $c_n > 1$ và $d_n > 0$ sao cho:

$$x^n = c_n x + d_n, \forall n \geqslant 3. (*).$$

Thật vậy, với $n = 3$ thì từ (1) ta có:

$$x^2 = x + a \Rightarrow x^3 = x^2 + ax = x + a + ax = (1 + a)x + a.$$

Ta chọn: $c_3 = 1 + a > 1, d_3 = a > 0$.

Giả sử (*) đúng với $n = k \geqslant 3$.

Tức là ta có: $x^k = c_k x + d_k$, với $c_k, d_k \in \mathbb{Z}$, $c_k > 1$, $d_k > 0$. (3)

Suy ra: $x^{k+1} = x.x^k = c_k x^2 + d_k x = c_k(x + a) + d_k x = (c_k + d_k)x + c_k a$.

Ta chọn: $c_{k+1} = c_k + d_k, d_{k+1} = c_k a$.

Do (3) và $a \in N^*$ nên $c_{k+1}, d_{k+1} \in \mathbb{Z}$ và $c_{k+1} > 1, d_{k+1} > 0$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có (*) là mệnh đề đúng.

Nói riêng, với $n = 2013$, tồn tại hai số nguyên $c_{2013} > 1$ và $d_{2013} > 0$ sao cho:

$$x^{2013} = c_{2013}x + d_{2013}.$$

Do đó, từ (2) suy ra:

$$c_{2013}x + d_{2013} = x + b \Rightarrow x = \frac{b - d_{2013}}{c_{2013} - 1} \in \mathbb{Q} \text{ (do } b \in \mathbb{Z}).$$

Như vậy $x$ là một nghiệm hữu tỉ của phương trình: $X^2 - X - a = 0$ nên nó là một số nguyên. Vậy ta có đpcm.

**Câu 6.**

Giả sử $n = 2^a u$ và $k = 2^b v$, với $u$, $v$ là các số lẻ. Ta sẽ chứng minh rằng máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng đối với các cặp số và chỉ các cặp số (n, k) với a = b.

Nếu a = b = 0, n và k lẻ, máy dừng.

Nếu a = b > 0 thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp

$$\left(2^{a-1}u, 2^{a-1}(u + 2v)\right) \text{ hoặc } \left(2^{a-1}(2u + v), 2^{a-1}v\right).$$

Vì các số $(u + 2v)$ và $(2u + v)$ lại là số lẻ, nên máy tự động làm giảm số mũ của 2 xuống đơn vị. Qua a bước thì số này trở nên bằng 0 và máy tự động sẽ dừng.

Bây giờ, xét $a \neq b$, không mất tổng quát, giả sử $a < b$.

- Nếu $a \leqslant b-2$, thì từ cặp $(n, k)$ máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u+2^{b-1-a}v), 2^{b-1}v\right)$ với các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau.

- Nếu $a = b-1$, thì từ cặp $(n, k)$ máy tự động có thể nhận được cặp

$$\left(2^a(u+v), 2^a v\right) = \left(2^{a+m}.\frac{u+v}{2^m}, \quad 2^a v\right), m \in \mathbb{N}^*, \text{ với } \frac{u+v}{2^m}$$

là số lẻ, lại có các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động làm việc mãi mãi không dừng.

Chỉ còn việc đếm các cặp số $(n, k) = (2^a u, 2^a v)$ với $2^a.u \leqslant 2013, 2^a.v \leqslant 2013$

+ Có 1007 số lẻ không vượt quá 2013, bởi vậy số cặp với $a = 0$ bằng $1007^2$;

+ 503 số không vượt quá 2013 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với $a = 1$ bằng $503^2$; ...

+ Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán là:

$$1007^2 + 503^2 + 252^2 + 126^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 1351709$$

## ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ CỦA CÁC TRƯỜNG TẠI TP. HỒ CHÍ MINH

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

$$\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 & (1) \\ 36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện $x \geq 0$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 + (3y-1)^2 = 1$.

Do đó ta đặt $\begin{cases} \sqrt{3x} = \sin t \\ 3y - 1 = \cos t \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ 4\sqrt{3}\sin^3 t + 4(1+\cos t)^3 - 12(1+\cos t)^2 \\ \qquad + 9(1+\cos t) + (2 - 3\sqrt{3})\sin t - 1 = 0 \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 t - 3\cos t + 4\sqrt{3}\sin^3 t - 3\sqrt{3}\sin t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t - \sqrt{3}\sin 3t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3t - \frac{\pi}{6}) = \sin t \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ t = \frac{7\pi}{24} + \frac{m\pi}{2} \end{array}\right. (k,m \in \mathbb{Z}) \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\}.$$

Do đó ta được (I) có ba nghiệm là:

$$* \ x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}.\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{12} \text{ và } y = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{3} = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{12}.$$

$$* \ x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{7\pi}{24} = \frac{1}{3}.\frac{1-\cos\frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}$$

$$\text{và } y = \frac{1+\cos\frac{7\pi}{24}}{3} = \frac{4+\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}}{12}.$$

$$* \ x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{19\pi}{24} = \frac{1}{3}.\frac{1+\cos\frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}$$

$$\text{và } y = \frac{1+\cos\frac{19\pi}{24}}{2} = \frac{4-\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{12}.$$

**Câu 2.**

Đặt $f(x) = \frac{1}{7}\sqrt{30x^2+4} = \frac{\sqrt{30}}{7}\sqrt{x^2+\frac{2}{15}}$.

Ta có: $\begin{cases} u_1 = m \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

• $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ta có $|f(t) - f(s)| = \frac{\sqrt{30}}{7}\left|\sqrt{t^2+\frac{2}{15}} - \sqrt{s^2+\frac{2}{15}}\right|$

$$= \frac{\sqrt{30}}{7}.\frac{|t+s||t-s|}{\sqrt{t^2+\frac{2}{15}}+\sqrt{s^2+\frac{2}{15}}} \leqslant \frac{\sqrt{30}}{7}|t-s|.$$

(do $\sqrt{t^2+\frac{2}{15}}+\sqrt{s^2+\frac{2}{15}} > \sqrt{t^2}+\sqrt{s^2} = |t|+|s| \geqslant |t+s|$).

• $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{7}\sqrt{30x^2+4} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 30x^2+4 = 49x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{19}}{19}$.

Đặt $L = \frac{2\sqrt{19}}{19}$, $q = \frac{\sqrt{30}}{7}$ ta có f(L) = L và $0 < q < 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 1$ ta có $|u_n - L| = |f(u_{n-1}) - f(L)| \leqslant q|u_{n-1} - L|$

$\Rightarrow |u_n - L| \leqslant q|u_{n-1} - L| \leqslant q^2|u_{n-2} - L| \leqslant ...$

$\leqslant q^{n-1}|u_1 - L| = q^{n-1}|m - L|$ khi $n > 1$.

Do $0 < q < 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-1}|m - L| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L = \frac{2\sqrt{19}}{19}$.

**Câu 3.**

Gọi $I_1$, $I_2$, $I_3$ theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác IBA', ICA', ICB' và r là bán kính của chúng.

▸ **Chứng minh ΔABC cân tại C:**

Gọi $K = II_1 \cap BC$, $L = II_2 \cap BC$, $M = II_3 \cap CA$.

Gọi T, Q lần lượt là hình chiếu của $I_2$ và $I_3$ trên CI.

Ta có $I_2T = I_3Q = r$

$\Rightarrow CT = r\cot\frac{C}{4}; CQ = r\cot\frac{C}{4}$

$\Rightarrow CT = CQ \Rightarrow$ T trùng Q

$\Rightarrow I_2I_3 \perp CI$

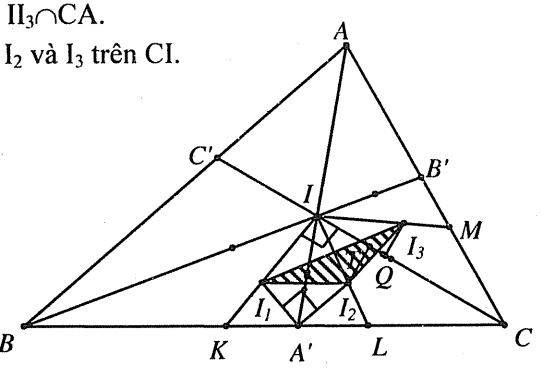
$\Rightarrow I_2$ và $I_3$ đối xứng nhau qua IC

$\Rightarrow \angle I_2IC = \angle I_3IC$

$\Rightarrow \angle A'IC = \angle B'IC$

$\Rightarrow \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$

$\Rightarrow \angle A = \angle B \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C (*).




▸ **Chứng minh Δ $I_1I_2I_3$ cân tại $I_2$:**

Ta có: $II_1$ là phân giác góc A'IB và IC là phân giác góc A'IB' nên $II_1 \perp IC$ mà $IC \perp AB$

$\Rightarrow II_1 // AB$.

Mặt khác:

$I_1$, $I_2$ cách đều BC nên $I_1I_2 // BC$.

$I_1$, $I_3$ cách đều BB' $\Rightarrow I_1I_3 // BB'$.

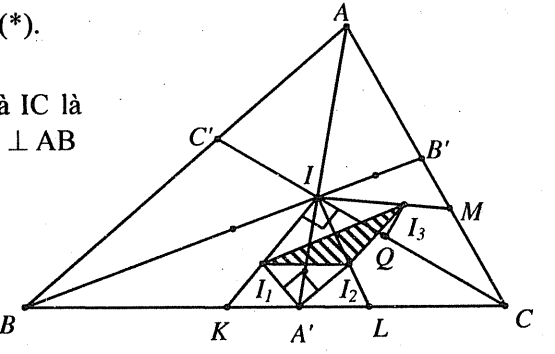
Do đó:

$\angle II_1I_3 = \angle ABI = \angle IBC = \angle I_3I_1I_2$

$\Rightarrow I_1I_3$ là phân giác của $\angle II_1I_2$.

Ta có:

$I_2I_3 // AB$ nên $I_2I_3 // II_1$



$\Rightarrow \angle I_1I_3I_2 = \angle I_3I_1I = \angle I_3I_1I_2 \Rightarrow \Delta I_1I_2I_3$ cân tại $I_2$.

Suy ra: $I_1I_2 = I_2I_3 = 2r \Rightarrow I_1I_2 \perp AA'$ tại trung điểm của $I_1I_2$

$\Rightarrow AA' \perp KL \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow AA'$ là đường cao của $\Delta ABC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

**Câu 4.**

Đặt $a = 2013$, $b = f(2013)$.

Theo giả thiết ta có $f(x^2 + f(y)) = (f(x))^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ (1).

• Trong (1) lần lượt cho $x = a$ rồi cho $x = y = a$, ta có

$f(a^2 + f(y)) = b^2 + y, \forall y \in \mathbb{N}^*$ (2) và $f(a^2 + b) = b^2 + a$ (3)

Trong (2) cho $y = a^2 + b$ và áp dụng (3) ta có $f(a^2 + b^2 + a) = a^2 + b^2 + b$ (4),

(3) $\Leftrightarrow f(a^2 + b^2 + b - b^2) = a^2 + b^2 + a - a^2$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n các công thức sau:

$$f(n(a^2 + b^2) + b - b^2) = n(a^2 + b^2) + a - a^2 \text{ (5)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

và $f(n(a^2 + b^2) + a) = n(a^2 + b^2) + b$ (6), $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Rõ ràng (5) và (6) đúng khi $n = 1$ do (3) và (4). Giả sử có

$$f(k(a^2 + b^2) + b - b^2) = k(a^2 + b^2) + a - a^2 \text{ (a)}$$

và $f(k(a^2 + b^2) + a) = k(a^2 + b^2) + b$ (b), ta chứng minh:

$$f((k+1)(a^2 + b^2) + b - b^2) = (k+1)(a^2 + b^2) + a - a^2 \text{ (c)}$$

và $f((k+1)(a^2 + b^2) + a) = (k+1)(a^2 + b^2) + b$ (d)

Thật vậy, trong (2) cho $y = k(a^2 + b^2) + a$ và áp dụng (b) ta có:

$$f(a^2 + k(a^2 + b^2) + b) = b^2 + k(a^2 + b^2) + a$$

$\Rightarrow f((k+1)(a^2 + b^2) + b - b^2) = (k+1)(a^2 + b^2) + a - a^2 \Rightarrow$ (c) đúng.

Bây giờ trong (2) lại cho $y = (k+1)(a^2 + b^2) + b - b^2$ và áp dụng (c) ta có

$$f(a^2 + (k+1)(a^2 + b^2) + a - a^2) = b^2 + (k+1)(a^2 + b^2) + b - b^2$$

$\Rightarrow f((k+1)(a^2 + b^2) + a) = (k+1)(a^2 + b^2) + b \Rightarrow$ (d) đúng.

Vậy bằng quy nạp ta đã chứng minh được (5) và (6) đúng, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• Trong (1) cho $x = a^2 + b^2 + a$, $y = a$ và áp dụng (4) ta có:

$$f((a^2 + b^2 + a)^2 + b) = (a^2 + b^2 + b)^2 + a \qquad (7)$$

Trong (5) lấy $n = a^2 + (b+1)^2$.

Ta có

$$f([a^2 + (b+1)^2](a^2 + b^2) + b - b^2) = [a^2 + (b+1)^2](a^2 + b^2) + a - a^2.$$

$\Rightarrow f((a^2 + b^2 + 2b + 1)(a^2 + b^2) + b - b^2) = (a^2 + b^2 + 2b + 1)(a^2 + b^2) + a - a^2$

$\Rightarrow f((a^2 + b^2 + b)^2 + a^2 + b - b^2) = (a^2 + b^2 + b)^2 + a \qquad (8)$

Từ (7), (8) $\Rightarrow f((a^2 + b^2 + a)^2 + b) = f((a^2 + b^2 + b)^2 + a^2 + b - b^2)$ (9)

Bây giờ ta chứng minh f đơn ánh (10) Thật vậy, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì

$f(1^2 + f(y_1)) = f(1^2 + f(y_2)) \Rightarrow (f(1))^2 + y_1 = (f(1)^2 + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Từ (9) và (10) ta có:

$(a^2 + b^2 + a)^2 + b = (a^2 + b^2 + b)^2 + a^2 + b - b^2$

$\Rightarrow (a - b)(2a^2 + 2b^2 + a + b) = (a - b)(a + b)$

$\Rightarrow (a - b)(2a^2 + 2b^2) = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow f(2013) = 2013$.

**Câu 5.**

$$\begin{cases} u_1 = 21,\ u_2 = 9 \\ u_{n+2} = 30u_{n+1}^2 + 12u_{n+1}u_n - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Theo định lí Fermat nhỏ, $\forall x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^{29} - x \equiv 0 \pmod{29}$

Mà $x^{29} - x = x(x^{28} - 1) = x(x^7 - 1)(x^7 + 1)(x^{14} + 1)$

$= x(x^7 - 1)(x^7 + 1)[(x^7 - 12)(x^7 + 12) + 5.29]$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^7 \equiv q \pmod{29}$ với $q \in \{0; \pm 1; \pm 12\}$.

$\Rightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ ta có $x^7 + y^7 + z^7 \equiv r \pmod{29}$

với $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 14\}$ (1)

Ta có:

$u_{n+2} \equiv u_{n+1}^2 + 12u_{n+1}u_n - u_n \pmod{29}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_1 \equiv -8 \pmod{29}$;

$u_2 \equiv 9 \pmod{29}$;

$u_3 \equiv u_2^2 + 12u_2u_1 - u_1 \equiv 9^2 + 12.9.(-8) + 8 \equiv 8 \pmod{29}$;

$u_4 \equiv u_3^2 + 12u_3u_2 - u_2 \equiv 8^2 + 12.8.9 - 9 \equiv -9 \pmod{29}$;

$u_5 \equiv u_4^2 + 12u_4u_3 - u_3 \equiv (-9)^2 + 12.(-9).8 - 8 \equiv -8 \pmod{29}$;

$u_6 \equiv u_5^2 + 12u_5u_4 - u_4 \equiv (-8)^2 + 12.(-8).(-9) + 9 \equiv 9 \pmod{29}$;

.....

Dãy số dư khi chia $u_n$ cho 29 tuần hoàn với chu kì 4, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_n \equiv a \pmod{29}$ với $a \in \{\pm 8, \pm 9\}$(2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ Không có số hạng nào của dãy $(u_n)$ là tổng các lũy thừa bậc 7 của ba số nguyên.

**Câu 6.**

Xét tập hợp E các số nguyên dương mà trong cách biểu diễn theo hệ đếm cơ số 3 có nhiều nhất là 11 chữ số và mỗi chữ số chỉ là 0 hoặc 1

$\Rightarrow |E| = 2^{11} - 1 = 2047$ (do mỗi vị trí trong 11 vị trí của dãy $a_1a_2..a_{11}$ có hai cách chọn chữ số là chữ số 0 hoặc chữ số 1 và E không chứa số 0).

Số lớn nhất của E là

$(11111111111)_3 = 3^{10}+3^9+3^8+3^7+3^6+3^5+3^4+3^3+3^2+3^1+3^0 = 88573 < 100000$.

Ta thấy $\forall z \in E$, ta có 2z trong cách biểu diễn theo hệ đếm cơ số 3 chỉ gồm các chữ số 0 và 2. Do đó nếu có x, y, z thuộc E sao cho $x + y = 2z$ thì các số x và y trong cách biểu diễn theo hệ đếm cơ số 3 ở mỗi vị trí đều có cùng chữ số 0 hoặc có cùng chữ số $1 \Rightarrow x = y$.

Vậy ba số bất kì trong các số thuộc E không thể lập thành ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Lấy F là một tập con tùy ý của E có 2013 phần tử thì tập hợp F có chứa đúng 2013 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 100000 sao cho ba số bất kì trong các số thuộc F không thể lập thành ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Vậy luôn tìm được 2013 số nguyên dương khác nhau thỏa mãn yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT MẠC ĐĨNH CHI
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \sqrt{2x}\left(2 + \dfrac{7}{2x + 5y}\right) = 6 \\ \sqrt{5y}\left(2 - \dfrac{7}{2x + 5y}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$

Từ hệ ta có $x > 0,\ y > 0$. Đặt $u = \sqrt{2x},\ v = \sqrt{5y}\ (u,v > 0)$, ta được:

$$\begin{cases} u\left(2 + \dfrac{7}{u^2 + v^2}\right) = 6 \\ v\left(2 - \dfrac{7}{u^2 + v^2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Đặt $z = u + vi$, với $i^2 = -1$. Ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{u - vi}{u^2 + v^2}$

Từ hệ ta có: $u\left(2 + \dfrac{7}{u^2 + v^2}\right) + v\left(2 - \dfrac{7}{u^2 + v^2}\right)i = 6 + \sqrt{3}i$

$$\Leftrightarrow 2(u + vi) + 7\left(\frac{u - vi}{u^2 + v^2}\right) = 6 + \sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow 2z + \frac{7}{z} = 6 + \sqrt{3}i \Leftrightarrow 2z^2 - (6 + \sqrt{3}i)z + 7 = 0\ (1)$$

$$\Delta = (6 + \sqrt{3}i)^2 - 56 = -23 + 12\sqrt{3}i = (2 + 3\sqrt{3}i)^2$$

Do đó phương trình (1) có hai nghiệm $z = \dfrac{6 + \sqrt{3}i + 2 + 3\sqrt{3}i}{4} = 2 + \sqrt{3}i$

hoặc $z = \dfrac{6+\sqrt{3}i-2-3\sqrt{3}i}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

Vì u, v > 0 nên ta được $u = 2, v = \sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm hệ là $x = 2, y = \dfrac{3}{5}$.

**Câu 2.**

Ta có $u_1 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = \frac{-u_n^3}{1+u_n^2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \quad (a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0)$

Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$, cho $n \to +\infty$ ta được:

$$a = \frac{a}{1+a^3} \Leftrightarrow a = 0. \text{ Vậy } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}, n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $v_n = \left(\dfrac{1+u_n^2}{u_n}\right)^2 - \dfrac{1}{u_n^2} = 2 + u_n^2 \to 2$ khi $n \to \infty$.

Áp dụng định lí trung bình Cesaro ta có:

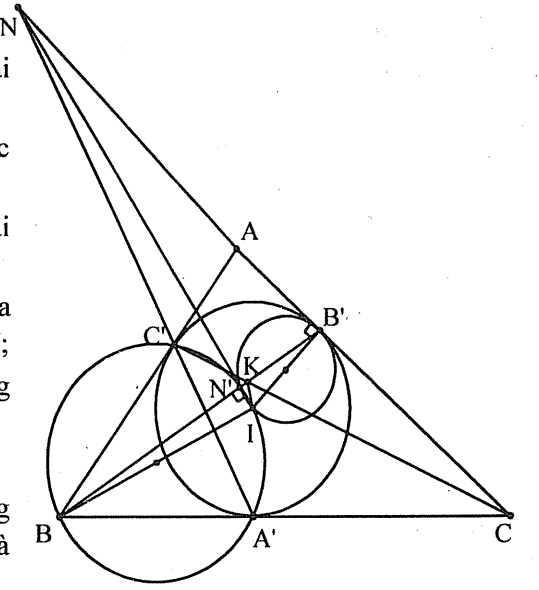
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_1^2}}{n} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right) + \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_1^2}}{n} = 2.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{u_1^2}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{u_n^2}}{n} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.u_n^2} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}.u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Câu 3.**




Đường tròn đường kính BI qua hai điểm A' và C'.

Đường tròn đường kính B'I tiếp xúc trong với đường tròn (I) tại B'.

Gọi N' là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đường kính BI và B'I.

Ta có: A'C' là trục đẳng phương của đường tròn (I) và đường tròn đường kính BI;

AC là trục đẳng phương của đường tròn (I) và đường tròn đường kính B'I;

N là giao điểm của AC và A'C'.

Suy ra N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BI và B'I, tức là N thuộc IN'.

Do I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ nên ta có:

$$\frac{AC'}{BC'}.\frac{BA'}{CA'}.\frac{CB'}{AB'} = 1.$$

Suy ra AA', BB' và CC' đồng quy tại một điểm là K cố định (định lí Céva).

Ta thấy BN' $\perp$ IN' và B'N' $\perp$ IN'. Do đó BB' đi qua điểm N'.

Điểm N' nhìn đoạn IK cố định dưới 1 góc vuông nên N' thuộc đường tròn đường kính IK.

Gọi R là bán kính đường tròn (I). Ta có: IN.IN' = IB'$^2$ = $R^2$ (*)

Xét phép nghịch đảo f(I,$R^2$).

Từ (*) ta có N' là ảnh của N qua phép nghịch đảo f(I,$R^2$)

Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có M', P' lần lượt là ảnh của M và P qua phép nghịch đảo f(I,$R^2$).

Mà N', M' và P' nằm trên đường tròn đường kính IK nên ảnh của chúng là N, M và P nằm trên một đường thẳng là ảnh của đường tròn đường kính IK qua phép nghịch đảo f(I,$R^2$).

Vậy M, N, P thẳng hàng.

**Câu 4.**

Cho $y = 0$ ta được: $f(f(x)) = f(x) + 1$

Thay x bởi $f(x)$ ta được: $f(f(f(x)) + y) = f(f(x) + y) + 1$

$$\Leftrightarrow f(f(x) + 1 + y) = f(x + y) + 1 + 1$$

Thay y bởi $f(y)$ ta được: $f(f(x)+f(y)) = f(x+f(y))+1 = f(x+y)+1+1$

$$\Leftrightarrow f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+1+y)$$

Vì f là hàm tăng nghiêm ngặt nên

$$\Leftrightarrow f(x)+f(y) = f(x)+1+y \Leftrightarrow f(y) = y+1 \Rightarrow f(x) = x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 5.**

$$\left(4^x + 5.2^x + 5\right)^2 - 11880 = 5^{y-1} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(4^x + 5.2^x + 5\right)^2 - 5^{y-1} = 11880$$

$$\Leftrightarrow \left(4^x + 5.2^x + 5\right)^2 - 1 - 5^{y-1} = 11879$$

$$\Leftrightarrow \left(4^x + 5.2^x + 4\right)\left(4^x + 5.2^x + 6\right) - 5^{y-1} = 11879$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right) - 5^{y-1} = 11879 \qquad (2)$$

Ta có: $2^x; 2^x+1; 2^x+2; 2^x+3; 2^x+4$ là 5 số tự nhiên liên tiếp nên

$2^x\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right) \vdots 5.$

Mà $\left(2^x;5\right) = 1$ nên $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right) \vdots 5$.

Nếu $y \geqslant 2$ thì vế trái (2) chia hết cho 5 (vô lí)

Vậy $y = 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 4^x + 5.2^x + 5 = 109 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 8 \\ 2^x = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là: $x = 3; y = 1$.

**Câu 6.**

Gọi 4 bạn nam là A, B, C, D và ta sắp xếp 4 bạn nam này từ trước ra sau theo thứ tự A, B, C, D. Gọi $x_1$ là số học sinh nữ đứng trước A, $x_2$ là số học sinh nữ đứng giữa A và B, $x_3$ là số học sinh nữ đứng giữa B và C, $x_4$ là số học sinh nữ đứng giữa C và D, $x_5$ là số học sinh nữ đứng sau D.

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1, x_5 \geqslant 0 \\ x_2, x_3, x_4 \geqslant 1 \end{cases}$

Đặt $y_i = x_i - 1$ với i = 2, 3, 4. Ta được:

$$\begin{cases} x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + x_5 = 5 \quad (1) \\ x_1, y_2, y_3, y_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) là $C_{5+5-1}^5 = C_9^5$

- Hoán đổi vị trí 4 học sinh nam có 4! cách.
- Hoán đổi vị trí 8 học sinh nữ có 8! cách.

Vậy có $C_9^5.4!.8! = 121927680$ cách sắp xếp.

# TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Sử dụng bất đẳng thức $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x, \forall x \geqslant 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{6x - 6\sin x}, x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{6(1 - \cos x)}{3\sqrt[3]{(6x - 6\sin x)^2}} > 0, \forall x > 0$

Do đó: $f(x) > 0, \forall x > 0$. Mà $x_2 = f(x_1) > 0$

(do $x_1 > 0$) nên $x_{n+1} = f(x_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n} - x_n$

$$= \frac{6x_n - 6\sin x_n - x_n^3}{\sqrt[3]{(6x_n - 6\sin x_n)^2} + x_n.\sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n} + x_n^2} < 0$$

(do $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x, \forall x \geqslant 0 \Leftrightarrow 6x - x^3 - 6\sin x < 0, \forall x > 0$)

Vậy $(x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim x_n = a$ $(a \geqslant 0)$, ta có phương trình:

$$a = \sqrt[3]{6a - 6\sin a} \Leftrightarrow a^3 - 6a + 6\sin a = 0$$

Xét hàm số $g'(a) = a^3 - 6a + 6\sin a$,

$$g'(a) = 3a^2 - 6 + 6\cos a,\ g''(a) = 6a - 6\sin a \geqslant 0, \forall a \geqslant 0$$

Suy ra: $g'(a) \geqslant g(0) = 0$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất a = 0.

**Câu 2.**

$$\log(\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x})+\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x}$$
$$=\log\sqrt{5x^2-4x-6}+\sqrt{5x^2-4x-6}$$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t, t>0$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Suy ra: $\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x}=\sqrt{5x^2-4x-6}(1)$

$(1)\Leftrightarrow 6\sqrt{(x+1)(x^2-2x)}=-4(x+1)+4(x^2-2x)$

Chia hai vế phương trình cho $x+1>0$, đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x+1}}(t\geqslant 0)$, ta được:

$$2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow t=2$$

Ta tìm được: $x=3+\sqrt{13}$.

**Câu 3.**

Gọi S' là điểm xuyên tâm đối của S trên (O).

Phép nghịch đảo (S, k) ($k=SS'^2$) biến (O) thành tiếp tuyến tại $S'$.

Ta có: $QA=k\dfrac{Q'A'}{SA'.SQ'}$.

Suy ra: $y=\dfrac{Q'A'.Q'B'}{SA'.SB'}.\dfrac{k^2}{SQ^2.SQ'^2}=\dfrac{Q'A'.Q'B'}{SA'.SB'}=\dfrac{Q'A'.Q'B'}{\text{hằng số}}$.

Vì Q ở trên cung AB nên Q' ở trên đoạn A'B', ta có:

$Q'A'+Q'B'=A'B'$ không đổi.

Vậy y cực đại khi $Q'A'=Q'B'$.

**Câu 4.**

$$f(x-f(y))=2f(x)+x+f(y);\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Gọi $a=f(0)$. Từ (1) ta có:

$$f(f(y)-f(y))=2f(f(y))+f(y)+f(y)\Rightarrow f(f(y))=-f(y)+\frac{a}{2} \qquad (2)$$

$$f(f(x)-f(y))=2f(f(x))+f(x)+f(y)$$
$$\Rightarrow f(f(x)-f(y))=-\left[f(x)-f(y)\right]+a\ \text{(do (2))} \qquad (3)$$

$$f(f(x)-f(y)-f(y))=2f(f(x)-f(y))+f(x)-f(y)+f(y)$$
$$\Rightarrow f(f(x)-2f(y))=-2\left[f(x)-f(y)\right]+2a+f(x)=-\left[f(x)-2f(y)\right]+2a\ \text{(do (3))}$$

$(1): f(x-f(y))-2f(x)=x+f(y), y=0\Rightarrow f(x-a)-2f(x)=x+a$.

Ta thấy vế phải có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên vế trái cũng có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Ta có với $\forall t,\ t=f(u)-2f(v)$

$\Rightarrow f(t)=f(f(u)-2f(v))=-(f(u)-2f(v))+2a=-t+2a$.

Hay $f(x) = -x + 2a,\ \forall x$.

Do đó, từ (1) ta có: $f(x - f(y)) = -x + f(y) + 2a)$

$$2f(x) + x + f(y) = 2(-x + 2a) + x + f(y)$$

$\Rightarrow 2a = 4a \Leftrightarrow a = 0$. Thử lại thấy thỏa mãn điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x) = -x$.

**Câu 5.**

Giả sử $P(x)$ không là đa thức hằng và có bậc n.

Từ giả thiết, so sánh hệ số hai vế suy ra hệ số của đa thức đều là số hữu tỉ.

Mặt khác, xét: $x = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2} = a$ thì $[P(a)]^2 - 1 = 4P(a)$.

Suy ra $P(a) = 2 + \sqrt{5}$ hoặc $P(a) = 2 - \sqrt{5}$.

Do P(x) có hệ số hữu tỉ nên $P(a)$ phải có dạng $p + q\sqrt{21}$ với p, q là hai số hữu tỉ nào đó. Điều này mâu thuẫn.

Vậy P(x) là đa thức hằng $\Rightarrow P(x) = 2 + \sqrt{5}$ hoặc $P(x) = 2 - \sqrt{5}$.

# TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

Đặt $u = 2x$

Phương trình trở thành: $\left(u^3+1\right)^3 = 27(3u-1) \Leftrightarrow u^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3u-1}$

Đặt $v = \sqrt[3]{3u-1} \Leftrightarrow v^3 + 1 = 3u$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3+1 = 3v \\ v^3+1 = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1 = 3v \\ u^3 - v^3 = 3(v-u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1 = 3v \\ (u-v)\left(u^2+uv+v^2+3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1 = 3v \\ u = v \end{cases} \quad \left(\text{do } u^2+uv+v^2+3 > 0; \forall u,v\right)$$

$\Leftrightarrow u^3 + 1 = 3u$.

Hay $8x^3 - 6x + 1 = 0$ (*)

Ta có: $8x^3 - 6x + 1 = 2x^3 + 6x(x^2-1) + 1 > 0, \forall x \geqslant 1$.

Mặt khác: $8x^3 - 6x + 1 = 2(x+1)(2x-1)^2 - 1 < 0, \forall x \leqslant -1$.

Xét phương trình (*) trên khoảng $(-1;1)$

Do $x \in (-1;1)$ nên ta có thể đặt $x = \cos t\,(0 < t < \pi)$, khi đó (*) trở thành:

$$2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = -1 \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đã cho có nghiệm: } \left[\begin{array}{l} x = \cos\frac{2\pi}{9} \\ x = \cos\frac{8\pi}{9} \\ x = \cos\frac{14\pi}{9} \end{array}\right.$$

**Câu 2.**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $u_{n+1}$ và $(1-u_n)$:

$$u_{n+1} + (1-u_n) \geqslant 2\sqrt{u_{n+1}.(1-u_n)} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n = 1,2,...$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng.

Mặt khác. theo giả thiết thì $(u_n)$ bị chặn trên bởi 1, do đó tồn tại giới hạn của dãy số $(u_n)$.

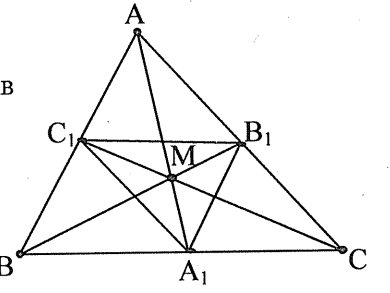
Đặt $u_0 = \lim u_n$.

Do $u_{n+1}.(1-u_n) > \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\left(u_{n+1}.(1-u_n)\right) \geqslant \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow u_0.(1-u_0) \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2u_0 - 1\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

**Câu 3.**




Đặt $S = S_{ABC}, S_1 = S_{MBC}, S_2 = S_{MAC}, S_3 = S_{MAB}$

Ta có: $\frac{S_1}{S} = \frac{MA_1}{AA_1} \Rightarrow \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{MA_1}{MA}$.

Tương tự: $\frac{S_2}{S - S_2} = \frac{MB_1}{MB}$, $\frac{S_3}{S - S_3} = \frac{MC_1}{MC}$

Mặt khác: $\frac{S_{MA_1B_1}}{S_3} = \frac{MA_1}{MA}.\frac{MB_1}{MB} \Leftrightarrow S_{MA_1B_1} = \frac{S_1}{S - S_1}.\frac{S_2}{S - S_2}.S_3$

Tương tự: $S_{MA_1C_1} = \frac{S_1}{S - S_1}.\frac{S_3}{S - S_3}.S_2$, $S_{MB_1C_1} = \frac{S_2}{S - S_2}.\frac{S_3}{S - S_3}.S_1$

Suy ra:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_1.S_2.S_3.\left(\frac{1}{(S-S_1)(S-S_2)} + \frac{1}{(S-S_2)(S-S_3)} + \frac{1}{(S-S_3)(S-S_1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{S_1.S_2.S_3}{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)}.2S.$$

Như vậy: $S_{A_1B_1C_1}$ lớn nhất khi $\dfrac{S_1.S_2.S_3}{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)}$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{S_1.S_2.S_3}{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)} \leqslant \frac{S_1S_2S_3}{2\sqrt{S_1S_2}.2\sqrt{S_2S_3}.2\sqrt{S_3S_1}} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$S_2 = S_3 = S_3 = \dfrac{S}{3}$, khi M trùng với trọng tâm tam giác ABC.

**Câu 4.**

Ta có: $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f(x+1) + f(x-1)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x+2) + f(x)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x) + f(x-2)\right)\right]$$

$\Leftrightarrow f(x+2) = -f(x-2)\,(1)$

Thay $x$ bởi $x+2$ vào (1) ta được $f(x+4) = -f(x)$ (2)

Từ (2) ta có

$$f(x+2013) = f\left(\left(x+1\right) + 53.4\right) = (-1)^{53}.f(x+1) = -f(x+1) \text{ (đpcm)}$$

**Câu 5.**

Ta tìm n thỏa mãn $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n^4 + n^3 + 1 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$ (I)

Ta có $m^2 = n^4 + n^3 + 1 > n^4 \Rightarrow m > n^2$

$\Rightarrow m = n^2 + k\ (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2+k)^2 \Rightarrow n^2(n-2k) = k^2 - 1 \geqslant 0$

Nếu $k^2 - 1 > 0$ thì $n - 2k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k^2 - 1 \geqslant n^2 \Rightarrow k^2 > n^2$

$\Rightarrow n < k$ mâu thuẫn với $n - 2k \in \mathbb{N}^*$

Vậy phải có $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ và $n^2(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2$ (khi đó $m = 5$)

Vậy có duy nhất một số nguyên dương n thỏa mãn $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương, đó là $n = 2$.

**Câu 6.**

Ta ghi vào mỗi ô vuông của bảng một số tự nhiên theo quy tắc sau: ở mỗi cột, lần lượt từ trên xuống dưới, ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2012.

Như vậy ba số được ghi vào ba ô cạnh nhau trong cùng một hàng là ba số tự nhiên bằng nhau, trong cùng một cột là ba số tự nhiên liên tiếp.

Suy ra, kể từ lần thứ hai, mỗi lần tô màu ta sẽ xóa đi ba số có tổng chia hết cho 3. Còn ba số được ghi vào ba ô $(r;s),(r+1;s+1),(r+1;s+2)$ là $r,r+1,r+1$ mà tổng của chúng là một số chia cho 3 dư 2. Vậy nếu tô màu được hết các ô vuông của bảng đã cho thì tổng S của tất cả các số đã được ghi vào bảng phải là một số chia cho 3 dư 2.

Nhưng $S = 2013.(1+2+3+\ldots+2012)$ là một số chia hết cho 3 (2013 chia hết cho 3). Mâu thuẫn. Do đó không thể tô màu được tất cả ô vuông của bảng đã cho theo cách trên.

# TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG
# TP. HỒ CHÍ MINH

**Câu 1.**

$$\begin{cases}(x+y)^4+3=4(x+y)\\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9(x^2-y^2)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x+y)^4+1+1+1\geqslant 4\sqrt[4]{(x+y)^4.1.1.1}=4|x+y|\geqslant 4(x+y)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x+y=1 \quad (*)$.

Từ đó kết hợp với điều kiện $\dfrac{x-3}{y-3}>0\Rightarrow -2<x,\ y<3$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln(3-x)=\frac{y^4}{64}+\frac{9y^2}{32}+\frac{7y}{8}+3\ln(3-y).$$

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{u^4}{64}+\dfrac{9u^2}{32}+\dfrac{7u}{8}+3\ln(3-u)$ ( với $u<3$)

$$f'(u)=\frac{x^3}{16}+\frac{9u}{16}+\frac{7}{8}+\frac{3}{u-3}=\frac{(u^3+9u+14)(u-3)+48}{16(u-3)}$$

$$=\frac{u^4-3u^3+9u^2-13u+6}{16(u-3)}=\frac{(u-1)^2(u^2-u+6)}{16(u-3)}\leqslant 0 \text{ (vì } u<3).$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (**).

Từ (*), (**) ta có $x = y = \frac{1}{2}$.

**Câu 2.**

$u_1 = 3; u_{n+1}^3 - 3u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta thấy $u_1 = 3 > 2$.

Giả sử $u_k > 2$, khi đó $u_{k+1}^3 - 3u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} > \sqrt{2+2} > 2$

nên $u_{k+1}^3 - 3u_{k+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow (u_{k+1} + 1)^2(u_{k+1} - 2) > 0 \Leftrightarrow u_{k+1} > 2$,

tức là $u_n > 2\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$, có $f'(t) = 3t^2 - 3t = 3(t+1)(t-1) > 0, \forall t > 2$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Kiểm tra thấy: $u_1^3 - 3u_1 = 18 > u_2^3 - 3u_2 = \sqrt{5}$

$\Rightarrow f(u_1) > f(u_2) \Rightarrow u_1 > u_2$.

Giả sử: $u_k > u_{k+1} \Rightarrow \sqrt{2 + u_k} > \sqrt{2 + u_{k+1}}$

$\Rightarrow u_{k+1}^3 - 3u_{k+1} > u_{k+2}^3 - 3u_{k+2}$

$\Rightarrow f(u_{k+1}) > f(u_{k+2})$

$\Rightarrow u_{k+1} > u_{k+2}$.

Do đó $u_n > u_{n+1}\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Dãy $(u_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim u_n = u \geqslant 2$.

Lấy giới hạn hai vế đẳng thức đề bài, ta được:

$u^3 - 3u = \sqrt{2 + u}$

$\Leftrightarrow u^6 - 6u^4 + 9u^2 = u + 2, (u \geqslant 2)$

$\Leftrightarrow (u-2)\left[u^2(u^3 - 4) + 2u^3(u-1) + u + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow u = 2$

Vậy $\lim u_n = 2$.

**Câu 3.**

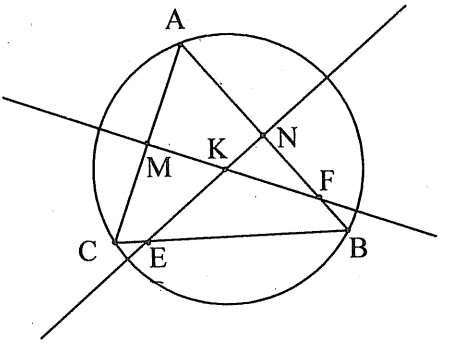
a) Đặt BC = a, CA = c, AB = c, $AB_2 = x$, $AC_2 = y$.

Phân giác BK cắt cạnh AC tại D.

Ta có: $\frac{KB}{KD} = \frac{c}{AD} = \frac{a}{CD} = \frac{a+c}{2} > 1$

Suy ra: $AD = \frac{bc}{a+c}$ và D nằm giữa A và $B_2$.

Áp dụng định lí Menelaus vào $\Delta ABD$ và đường thẳng $B_2KC_1$ ta có:




$$\frac{B_2D}{B_2A}.\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{KB}{KD} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x - \frac{bc}{a+c}}{x}.\frac{a+c}{b} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{a+c-b} \quad (1)$$

b) Tương tự ta có: $y = \frac{bc}{a+b-c}$ (2)

Từ giả thiết: $S_{ABC} = S_{AB_2C_2} \Rightarrow xy = bc$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta được $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (4)

Theo định lí Côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$

**Câu 4.**

Đặt P (1) = a. Xét $Q(x) = P(x) - ax^2$.

Khi đó $Q(1) = P(1) - a = 0$ và $P(x) = ax^2 + Q(x)$.

Thay vào (1) ta có:

$$Q(x) + ax^2 + a = \frac{1}{2}\left[Q(x+1) + a(x+1)^2 + Q(x-1) + a(x-1)^2\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{1}{2}\left[Q(x+1) + Q(x-1)\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Q(x) - Q(x+1) = Q(x-1) - Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Q(x) - Q(x-1) = b \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với b là hằng số) (2)}$$

Đặt $Q(x) = R(x) + bx$.

Từ (2) suy ra: $bx + R(x) - b(x-1) - R(x-1) = b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow R(x) = R(x-1)\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow R(x) = c$ (với c là hằng số)

$\Rightarrow Q(x) = bx + c.$

Vì $Q(1) = 0$ nên $c = -b$.

Do đó $P(x) = ax^2 + bx - b$. Thử lại thấy đúng. Vậy $P(x) = ax^2 + bx - b$.

**Câu 5:**

Chỉ cần xét khi (b, d) = 1.

Gọi q là ước nguyên tố bất kì của $2^a + 1 \Rightarrow q | 2^c - 1 \Rightarrow q | 2^c - 1$.

Từ $\left(2^a + 1\right)^b = \left(2^c - 1\right)^d \Rightarrow \gamma_q\left(\left(2^a + 1\right)^b\right) = \gamma_q\left(\left(2^c - 1\right)^d\right)$

$\Leftrightarrow b\gamma_q\left(2^a + 1\right) = d\gamma_q\left(2^c - 1\right)$

Mà (b, d) = 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_q\left(2^a + 1\right) \vdots d \\ \gamma_q\left(2^c - 1\right) \vdots b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_q\left(2^a + 1\right) = kd \\ \gamma_q\left(2^c - 1\right) = kb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^a + 1 = A^d \\ 2^c - 1 = A^b \end{cases} (k, A \in \mathbb{N}^*,\ A \text{ lẻ}).$$

Trường hợp 1: Nếu $c = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow 2^a + 1 = 1$ (vô lí).

Trường hợp 2: Nếu $c \geqslant 2 \Rightarrow 2^c - 1 \equiv 3 \pmod 4$

Mà $A^b = 2^c - 1$ và A lẻ suy ra b lẻ. Ta có

$2^c = A^b + 1 = (A+1)\left(A^{b-1} - A^{b-2} + \ldots - A + 1\right)$

$\Rightarrow A + 1 \mid 2^c \Leftrightarrow A + 1 = 2^s\ (s \in \mathbb{N}^*)$ (1)

$2^a = A^d - 1 = (A-1)(A^{d-1} + A^{d-2} + \ldots + A + 1)$

$\Rightarrow A - 1 \mid 2^q \Leftrightarrow A - 1 = 2^u$ (2)

Từ (1) và (2) có: $2^s - 2^u = 2 \Leftrightarrow 2^u\left(2^{s-u} - 1\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ s - u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ s = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - 1 = 2 \\ A + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A = 3$$

Vậy: $\begin{cases} 2^a + 1 = 3^d \\ 2^c - 1 = 3^b \end{cases}$

Mặt khác $2^c - 1 = 3^b$ có dạng 8k + 1 hoặc 8k + 3.

Suy ra c = 2 vì nếu $c \geqslant 3$ thì $2^c - 1 \equiv 7 \pmod 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^a + 1 = 3^d \\ 3 = 3^b \Rightarrow b = 1, c = 2 \end{cases}$$

Từ $2^a + 1 = 3^d \vdots 3 \Rightarrow a$ lẻ.

Nếu $a = 1 \Rightarrow d = 1$.

Xét $a \geqslant 3$, $2^a = 3^d - 1$

Do $2^a \equiv 0 (\bmod 4) \Rightarrow 3^d - 1 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow d$ chẵn.

Vì nếu d lẻ thì $3^d - 1 \equiv 2 \pmod 4$.

Vậy $d = 2d_1$

$$\Rightarrow 2^a = \left(3^{d_1} - 1\right)\left(3^{d_1} + 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{d_1} - 1 = 2 \\ 3^{d_1} + 1 = 4 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow d_1 = 1 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a = 3$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$(a, b, c, d) = (1, k, 2, k); (3, k, 2, 2k)$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

**Câu 6.**

Giả sử tồn tại một tập $F$ với tính chất đã cho.

Nếu mọi số $a \in F$ đều chẵn, ta xét tập $\left\{\frac{a}{2} \mid a \in F\right\}$.

Hiển nhiên tập F' cũng có tính chất nêu trong bài toán. Do đó ta có thể coi rằng tồn tại một tập F thỏa mãn bài toán và F chứa ít nhất một số lẻ là a.

Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ là các phần tử của F.

Đặt $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$

Theo giả thiết, $\forall i \left(1 \leqslant i \leqslant 2012\right)$ tập $F \setminus \{a_i\}$ được chia thành hai tập con với tổng các số là bằng nhau nên tổng $S - a_i$ của tập $F \setminus \{a_i\}$ là một số chẵn.

Từ đó suy ra $\sum_{i=1}^{2012}\left(S - a_i\right) = 2011S$ là một số chẵn $\Rightarrow S$ là một số chẵn.

Khi đó $S - a$ là một số lẻ mâu thuẫn với $S - a_i$ là một số chẵn $\forall i \left(1 \leqslant i \leqslant 2012\right)$

Vậy không tồn tại tập hợp với tính chất đã nêu.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH KON TUM

**Câu 1.**

Điều kiện: $x \geqslant 5$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x^2+14x+9} = 5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right) = 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{x^2-4x-5}{x+4} - 5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1\\ \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = \dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

i) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2-4x-5 = x+4$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}\\ x = \dfrac{5-\sqrt{61}}{2}\end{array}\right.$$

ii) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4\left(x^2-4x-5\right) = 9\left(x+4\right)$

$$\Leftrightarrow 4x^2-25x-56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 8\\ x = -\dfrac{7}{4}\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$, $x = 8$.

**Câu 2.**

Từ giả thiết ta có $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, b_n = a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

+ Ta chứng minh đẳng thức sau bằng quy nạp

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*).$$

Với n = 0; n = 1 thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng tới n ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 = (a_{n-1} + a_n)(a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1})^2$$
$$= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 + a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n-1}a_{n+2} - 2a_n a_{n+1}$$
$$= (-1)^{n-1} + (-1)^n + a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = a_{n-1}(a_n + a_{n+1}) - a_n(a_n + a_{n-1})$$
$$= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Suy ra (*) đúng với n + 1. Vậy (*) được chứng minh.

+ Áp dụng (*) ta có $(-1)^k \dfrac{1}{a_k b_k} = \dfrac{a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}; \forall k \in \mathbb{N}$.

Suy ra $u_n = \left(\dfrac{a_2}{a_1} - \dfrac{a_1}{a_0}\right) + \left(\dfrac{a_3}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \dfrac{3}{2}$.

Đặt $v_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ thì $v_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$; $v_0 = \dfrac{3}{2}$.

Ta có $(v_n)$ là dãy số dương và $v_n \leqslant 2; \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét hai dãy $x_n = v_{2n}$, $y_n = v_{2n+1}$.

Ta có $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x_n}}$; $y_0 = \dfrac{5}{3}$, $y_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{y_n}}$.

Vì hàm số $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ là hàm số giảm trên $(0;+\infty)$.

và $v_0 = \dfrac{3}{2}, v_1 = \dfrac{5}{3}, v_2 = \dfrac{8}{5}, v_3 = \dfrac{13}{8}$ tức là $v_0 < v_2, v_1 > v_3$.

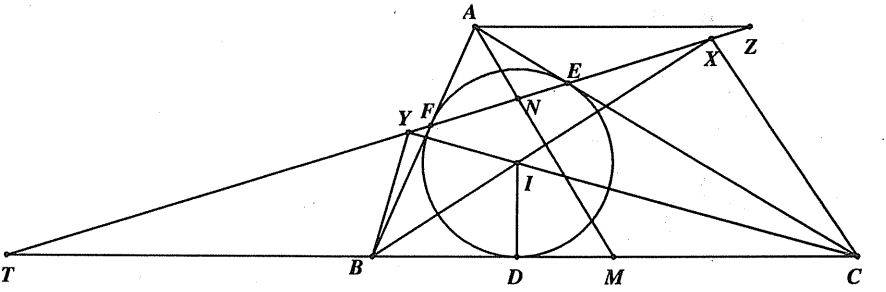
Suy ra dãy số $(x_n)$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên tồn tại $\lim x_n = L$ với $L \leqslant 2$ và dãy số $(y_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại $\lim y_n = K$ với $L, K \geqslant 0$ và L, K đều là nghiệm của phương trình:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} \text{ nên } L = K = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\lim v_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, do đó dãy số $(u_n)$ tồn tại giới hạn và

$$\lim u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}.$$

**Câu 3.**




* Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC, ta chứng minh D, I, N thẳng hàng. Thật vậy:

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với BC, Z là giao điểm của d và EF.

Vì M là trung điểm của BC nên hàng điểm (Z, N, E, F) là hàng điểm điều hòa.

Xét cực và đối cực đối với đường tròn (I):

Ta có Z thuộc đối cực của N.

Mà N thuộc EF là đối cực của A nên A thuộc đối cực của N.

Từ đó AZ là đối cực của N, suy ra $IN \perp AZ$ hay $IN \perp BC$.

Mặt khác $DI \perp BC$ nên D, I, N thẳng hàng.

* Gọi T là giao điểm của EF và BC vì AD, BE, CF đồng quy (theo định lí Cêva) nên ta có (T, D, B, C) là hàng điểm điều hòa.

Mà $\Delta BFX = \Delta BDX$ (c-g-c) nên $\widehat{TXB} = \widehat{DXB}$ do đó $BX \perp CX$.

Tương tự ta chứng minh được $BY \perp CY$.

Từ đó suy ra X, Y cùng thuộc đường tròn ($\omega$) đường kính BC.

+ Xét cực đối cực đối với đường tròn ($\omega$):

Do (T, D, B, C) là hàng điểm điều hòa nên D thuộc đối cực của T.

$DN \perp BC$ nên DN là đối cực của T, suy ra (T, N, Y, X) là hàng điểm điều hòa.

Do đó D(T, N, Y, X) là chùm điều hòa, mà $DT \perp DN$ nên DN là phân giác góc $XDY$.

Suy ra $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{DX}{DY} = \dfrac{\sin\widehat{DYX}}{\sin\widehat{DXY}}$.

+ Mặt khác, ta có BDIY và CDIX là các tứ giác nội tiếp nên

$$\frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{DBI} = \widehat{DYI} = \frac{1}{2}\widehat{DYX}$$

(hai tam giác CDY và CEY bằng nhau), do đó $\widehat{ABC} = \widehat{DYX}$.

Suy ra $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{DX}{DY} = \dfrac{\sin\widehat{DXY}}{\sin\widehat{DXY}} = \dfrac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow NX.AB = NY.AC$.

**Câu 4.**

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $P(x)$ là luỹ thừa bậc $n$ của số nguyên $y$ cho vô hạn số nguyên dương $x$.

Cho $x > 0$ và đủ lớn, ta có $P(x) = y^n > 0$, với $y > 0$.

Xét hiệu $y^n - x^n$, ta có $|y^n - x^n| = |y - x||y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}| \geqslant |y - x|x^{n-1}$,

từ đó $|y - x| \leqslant \left|\dfrac{y^n - x^n}{x^{n-1}}\right|$.

Đặt $b = |y - x|$, ta được $|b| \leqslant \left|\dfrac{P(x) - x^n}{x^{n-1}}\right| = \left|a_{n-1} + \dfrac{a_{n-2}}{x} + ... + \dfrac{a_0}{x^{n-1}}\right|$

$$\leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + ... + |a_0|.$$

Suy ra, các số nguyên $b = y - x$ bị chặn, do đó tồn tại số nguyên $c$ sao cho đẳng thức $P(x) = (x + c)^n$ đúng với vô hạn những giá trị của $x$.

Vậy $P(x) = (x + c)^n$, với $c$ là hằng số nguyên.

**Câu 5.**

Vì $\alpha = \dfrac{u}{v}$ là nghiệm của $P(x)$ nên

$$P\left(\frac{u}{v}\right) = a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{u}{v}\right) + a_0 = 0,$$

hay $P\left(\dfrac{u}{v}\right) = a_n\dfrac{u^n}{v^n} + a_{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + ... + a_1\dfrac{u}{v} + a_0 = 0$.

Khi đó, với mọi $m \in \mathbb{Z}$, ta có

$$P(m) = P(m) - P\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + ... + a_1 m + a_0 - \left(a_n\frac{u^n}{v^n} + a_{n-1}\frac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + ... + a_1\frac{u}{v} + a_0\right)$$

$$= a_n\left(m^n - \frac{u^n}{v^n}\right) + a_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{u^{n-1}}{v^{n-1}}\right) + ... + a_1\left(m - \frac{u}{v}\right),$$

Suy ra

$$v^n P(m) = a_n\left(m^n v^n - u^n\right) + a_{n-1}v\left(m^{n-1}v^{n-1} - u^{n-1}\right) + ... + a_1 v^{n-1}\left(mv - u\right).$$

Từ $m^k v^k - u^k = (mv - u)\left(m^{k-1}v^{n-1} + ... + u^{k-1}\right)$, suy ra

$a_k v^{n-k}\left(m^k v^k - u^k\right) \vdots mv - u$, hay $v^n P(m)$ chia hết cho $u - mv$.

Mặt khác $(u, v) = 1$, suy ra $(v^k, u - mv) = 1$, suy ra $P(m)$ chia hết cho $u - mv$.

**Câu 6.**

Giả sử $n = 2^a u$ và $k = 2^b v$, với u, v là các số lẻ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng đối với các cặp số và chỉ các cặp số (n, k) với a = b.

- Nếu a = b thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^{a-1}u, 2^{a-1}(u+2v)\right)$ hoặc $\left(2^{a-1}(2u+v), 2^{a-1}v\right)$. Vì các số $(u+2v)$ và $(2u+v)$ lại là số lẻ, nên máy tự động làm giảm số mũ của 2 xuống 1 đơn vị. Qua a bước thì số này trở nên bằng 0 và máy tự động sẽ dừng.

- Bây giờ giả sử $a < b$ (tương tự $a > b$ xét tương tự). Nếu $a \leqslant b-2$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u+2^{b-1-a}v), 2^{b-1}v\right)$ với các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Nếu $a = b-1$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u+v), 2^a v\right) = \left(2^{a+1}\frac{u+v}{2}, 2^a v\right)$ lại các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động làm việc mãi mãi không dừng.

- Chỉ còn việc đếm các cặp số (n, k) = ($2^a$.u, $2^a$.v), với $2^a$.u $\leqslant$ 2013, $2^a$.v $\leqslant$ 2013.

+ Có 1007 số lẻ không vượt quá 2013, bởi vậy số cặp (n, k) với a = b = 0 bằng $1007^2$;

+ 503 số không vượt quá 2013 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với a = b = 1 bằng $503^2$; ...

+ Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán

$$1007^2 + 503^2 + 252^2 + 126^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 1351709.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN BÌNH ĐỊNH

**Câu 1.**

a) Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$.

Khi đó: $\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f(-1) = a - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} \\ a = \dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} \end{cases}$.

Suy ra $|2a| \leqslant |f(1)| + |f(-1)| + 2|f(0)| < 4 \Rightarrow |a| < 2$ và $a \neq 0$.

Hàm số $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(0) = -1 - f(0) < 0; g(1) = 1 - f(1) > 0; g(-1) = 3 - f(-1) > 0.$$

Suy ra $g(-1)g(0) < 0$ và $g(1)g(0) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$.

b) Vì $|a| < 2$ nên $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số bậc hai dương.

Hơn nữa, theo câu a) $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$.

Do đó hàm số $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Suy ra: $g(x) > 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow f(x) < 3x^2 - x - 1, \forall x \geqslant 1$.

Vậy: $f\left(\frac{4}{3}\right) < 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 1 = 3.$

**Câu 2.**

Từ giả thiết ta có: $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$.

Từ công thức xác định dãy $(x_n)$, ta có:

$$y_1 = 2a \text{ và } y_{n+1} = y_n + a + \sqrt{a^2 + 4ay_n}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với 4a và cộng hai vế với $a^2$, ta được:

$$a^2 + 4ay_{n+1} = a^2 + 4ay_n + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + 4ay_n}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Đặt $u_n = \sqrt{a^2 + 4ay_n}, u_n > 0$.

Từ (2) suy ra: $u_{n+1}^2 = (u_n + 2a)^2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (3)

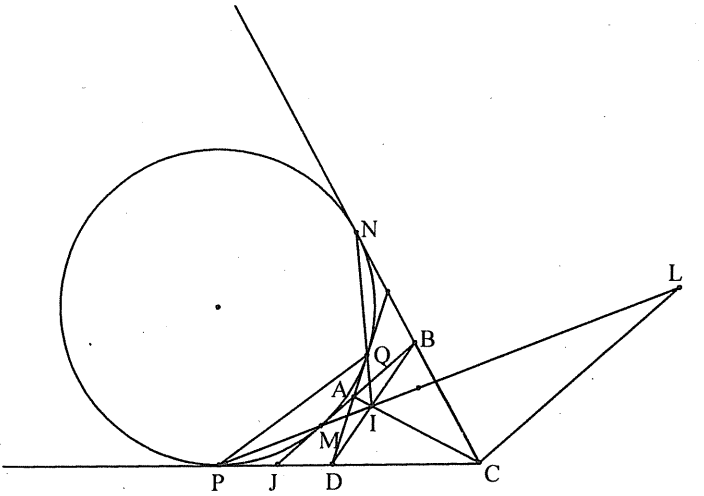
Do $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$, ta có (3) $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 2a\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số cộng có công sai $d = 2a$ và $u_1 = 3a$.

Vậy $u_n = 2an + a \Rightarrow y_n = a(n^2 + n)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{an(n+1)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \lim S_n = \frac{1}{a}.$$

**Câu 3:**




Dựng đường thẳng qua $C$ song song với $AB$ cắt PM tại $L$. $AB$ cắt $CD$ tại $J$.

Dễ thấy $\Delta CPL$ cân tại $C$ ($\widehat{LPC} = \widehat{JMP} = \widehat{AML} = \widehat{PLC}$).

Giả sử $PM$ cắt $AC$ tại $I$. Ta có: $\dfrac{AM}{CP} = \dfrac{AM}{CL} = \dfrac{IA}{IC}$ (1)

Tương tự, ta cũng giả sử: $NQ$ cắt $AC$ tại $I'$. Ta cũng có: $\dfrac{AQ}{CN} = \dfrac{I'A}{I'C}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{I'A}{I'C} \Rightarrow I \equiv I'$ (chia trong đoạn $AC$ cùng tỉ số)

$\Rightarrow$ AC, MP, NQ đồng quy.

Tương tự ta cũng có: BD, MP, NQ đồng quy.

Vậy AC, BD, MP, NQ đồng quy tại I.

**Câu 4.**

Từ giả thiết: $f(f(x)+y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)\left(\left(f(x)\right)^2 + y^2\right), \forall x,y \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $y = x^4$ vào (1): $f\left(f(x)+x^4\right) = f(0) + 8x^4 f(x)\left(f^2(x) + x^8\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Thay $y = -f(x)$ vào (1): $f(0) = f\left(x^4 + f(x)\right) - 8f^2(x)\left(f^2(x) + f^2(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (2) và (3), ta có: $16f^4(x) = 8x^4 f(x)\left(f^2(x) + x^8\right), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) - x^4\right)f(x)\left(f^2(x) + \frac{3}{4}x^8 + \left(f(x) + \frac{1}{2}x^4\right)^2\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Thay $x = 0$ vào (4) suy ra $f(0) = 0$.

Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Ta chứng minh $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Thay $x = 0$ và y tùy ý vào (1), ta được $f(y) = f(-y)$.

Thay $x = a$ và y tùy ý vào (1), ta được $f(y) = f(a^4 - y)$.

Suy ra: $f(y) = f(-y) = f\left(a^4 - y\right) = f(y - a^4), \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f\left(f(x)\right) = f\left(-f(x)\right) = f\left(a^4 + f(x)\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

và $f(y^4) = f(y^4 - a^4), \forall y \in \mathbb{R}$ (6)

Thay $y = 0$ và x tùy ý vào (1), ta được $f(f(x)) = f(x^4)$. (7)

Thay $y = a^4$ vào (1), ta được

$$f(f(x) + a^4) = f(x^4 - a^4) + 8a^4 f(x)\left(\left(f(x)\right)^2 + a^8\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (8)$$

Từ (5), (6) và (8) suy ra

$$f(f(x)) = f(x^4) + 8a^4 f(x)\left(\left(f(x)\right)^2 + a^8\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Từ (7) và (9): $8a^4 f(x)\left(\left(f(x)\right)^2 + a^8\right) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

và từ (4), nếu $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại, ta thấy $f(x) = 0$ và $f(x) = x^4$ là nghiệm của phương trình.

**Câu 5.**

Đa thức đã cho được viết lại: $P(x) = \left(x^{2017} - x\right) + \left[ax^2 + (b+1)x + c\right]$

Đặt $f(x) = ax^2 + (b+1)x + c$.

Theo định lí Fermat nhỏ: $x_i^{2017} - x_i \vdots 2017, \forall i = 1, 2, 3$

nên $f(x_i) \vdots 2017, \forall i = 1,2,3$

Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$ thì bài toán được chứng minh.

Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho 2017 thì theo trên ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \vdots 2017 \\ f(x_2) - f(x_3) \vdots 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b + 1\right] \vdots 2017 \\ (x_2 - x_3)\left[a(x_2 + x_3) + b + 1\right] \vdots 2017 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(x_1 + x_2) + b + 1 \vdots 2017 \\ a(x_2 + x_3) + b + 1 \vdots 2017 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 - x_3) \vdots 2017 \Rightarrow a \vdots 2017$$

Từ đó suy ra, $b + 1 \vdots 2017$ mà $f(x_i) = ax_i^2 + (b+1)x_i + c \vdots 2017$ nên $c \vdots 2017$.

Từ đó, $a + b + c + 1 \vdots 2017$.

Vậy $(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$

**Câu 6.**

Ở trạng thái một đống có a hòn đá, đống kia có b hòn đá ta đặt tương ứng với một điểm trên mặt phẳng tọa độ $(a,b)$.

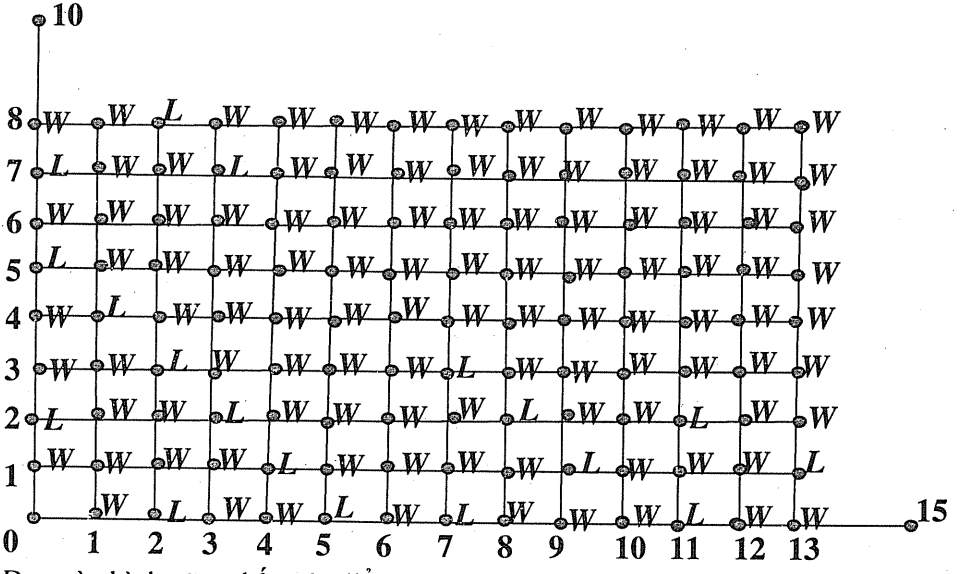
Theo giả thiết bài toán, đến lượt một người chơi nào đó thì chuyển một điểm $(a,b)$ thành một điểm $(a-i,b-i)$ trong đó $1 \leqslant i \leqslant \min\{a,b\}$, hoặc điểm $(a-1,b)$, hoặc điểm $(a,b-1)$, hoặc điểm $\left(\left[\frac{a}{2}\right],b\right)$, hoặc điểm $\left(a,\left[\frac{b}{2}\right]\right)$.

Nếu người chơi nào chuyển về điểm $(0,0)$ trước thì người đó chiến thắng.

Một điểm $(a,b)$ được gọi điểm "thua" nếu người nào phải chuyển điểm này, luôn luôn tạo ra điểm mà người chơi tiếp theo có chiến thuật chuyển về điểm $(0,0)$. Điểm như vậy kí hiệu là L.

Một điểm $(a,b)$ được gọi điểm "thắng" nếu đến lượt người nào phải chuyển điểm này, luôn tồn tại ít nhất một khả năng để chuyển điểm đó về điểm "thua". Điểm như vậy được kí hiệu là W.

Như vậy, nếu $(a,b)$ là điểm "thua" thì người đi sau luôn có chiến thuật thắng. Bài toán trở thành tìm tất cả các điểm "thua". Bây giờ biểu diễn tất cả các điểm $(a,b)$ trong đó $a \leqslant 13, b \leqslant 8$ thành các điểm W hay L trên mặt phẳng tọa độ và tìm tất cả điểm tương ứng với L.




Dựa vào hình vẽ ta thấy các điểm thỏa mãn bài toán là:

$(2,0);(5,0);(7,0);(11,0);(4,1);(9,1);(13,1);(0,2);$

$(3,2);(8,2);(11,2);(2,3);(7,3);(1,4);(0,5);(0,7);(3,7);(2,8).$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN

**Câu 1.**

Đặt $x = \cos\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$32\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right)\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 32\cos^2\alpha.\sin^2\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 = 1 - \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 2\alpha.\cos^2 2\alpha = 1 - \cos\alpha \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 4\alpha = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 8\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow 8\alpha = \pm\alpha + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = k\frac{2\pi}{9} \\ \alpha = k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \cos\left(k\frac{2\pi}{9}\right)$ hoặc $x = \cos\left(k\frac{2\pi}{7}\right), \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

**Câu 2.**

Ta có $x_{n+1} - 1 = x_n\left(x_n - 1\right)$ và $x_1 = 2$ nên $\left\{x_n\right\}$ là dãy tăng.

Mà $x_n - 1 \neq 0$ nên $\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n}$.

Hay $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}} \Leftrightarrow 2^{2^{n-1}} < x_{n+1} - 1 < 2^{2^n} \qquad (*)$$

Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp.

Với $n = 1$: $(*)$ đúng. Giả sử $2^{2^{k-1}} < x_{k+1} - 1 < 2^{2^k}$.

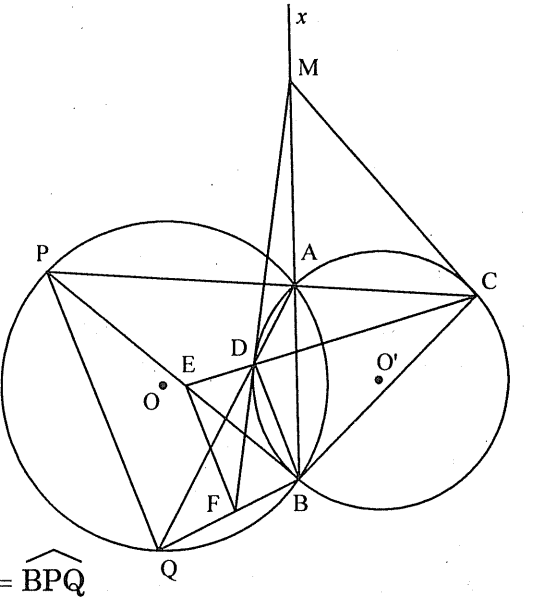
Ta có $x_{k+2} - 1 = x_{k+1}\left(x_{k+1} - 1\right) > 2^{2^{k-1}}.2^{2^{k-1}} = 2^{2^k}$.

Hơn nữa $x_{k+1} \leqslant 2^{2^k} \Rightarrow x_{k+1} - 1 \leqslant 2^{2^k} - 1$

$\Rightarrow x_{k+2} - 1 = x_{k+1}\left(x_{k+1} - 1\right) \leqslant 2^{2^k}\left(2^{2^k} - 1\right) < 2^{2^{k+1}}$.

Suy ra $2^{2^k} < x_{k+2} - 1 < 2^{2^{k+1}} \Rightarrow$ đpcm.

**Câu 3.**




Từ $\widehat{PBQ} = \widehat{PAQ}$

và $\widehat{CBD} = \widehat{PAQ}$.

Suy ra: $\widehat{PBQ} = \widehat{CBD}$.

Hơn nữa

$\widehat{BCD} = \widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$

Nên $\Delta BPQ \backsim \Delta BCD$

với tỉ số $k = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{R}{R'}$

Gọi $E = CD \cap BP, F = MD \cap BQ$

Ta thấy tứ giác BDEF nội tiếp nên

$\widehat{BDF} = \widehat{BEF}$ và $\widehat{BEF} = \widehat{BCD} = \widehat{BPQ}$

Suy ra *EF // PQ*

Do BDEF nội tiếp nên phép quay $Q_{(B,\widehat{CBP})}$ biến đường thẳng CD thành đường thẳng $C'D'$ // EF.

Phép vị tự $V_{(B,k)}$ (với $k = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{R}{R'}$) biến đường thẳng $C'D'$ thành đường thẳng PQ

Các tiếp tuyến tại C và D của $(O')$ cắt nhau trên AB, các tiếp tuyến tại A, B của $(O')$ cắt nhau tại điểm cố định I và I nằm trên CD.

Do đó $V_{(B,k)} \circ Q_{(B,\widehat{CBP})}(I) = J$ cố định nằm trên PQ.

**Câu 4.**

Chú ý rằng $f(x) > x, \forall x$.

Thật vậy, nếu $f(y) < y$ với giá trị *y* nào đó, đặt $x = y - f(y) > 0$.

Phương trình hàm đã cho trở thành $f(2y - f(y)) = 0$ (vô lí).

Nếu có $y = f(y)$, phương trình hàm đã cho trở thành $f(y) = 0$ (vô lí).

Ta sẽ chứng minh $f(x) - x$ là đơn ánh.

Thật vậy giả sử $f(x) - x = f(y) - y$ với $x \neq y$

$\Leftrightarrow x + f(y) = y + f(x) \Rightarrow f(x+y) + f(y) = f(x+y) + f(x)$

$\Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow x = y$ (vô lí).

Từ phương trình đã cho thay $x = f(x)$, ta được

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y)+f(y).$$

Hoán đổi *x, y* ta được

$$f(y+f(x)) = f(x+y)+f(x) \Rightarrow f(f(x)+f(y))-(f(x)+f(y)) = f(x+y).$$

Lấy $x+y = x'+y'$

$$\Rightarrow f(f(x)+f(y))-(f(x)+f(y)) = f(f(x')+f(y'))-(f(x')+f(y')).$$

Mà $f(x)-x$ đơn ánh nên $f(x)+f(y) = f(x')+f(y')$.

Chọn $x' = y' = \dfrac{x+y}{2}$, ta có $f(x)+f(y) = 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Bây giờ ta chứng minh f đơn ánh.

Nếu $f(x) = f(x+h)$ với $h > 0 \Rightarrow f(x)+f(x+2h) = 2f(x+h) = 2f(x)$

$\Rightarrow f(x) = f(x+2h)$.

Bằng quy nạp ta có $f(x+nh) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 < f(x+nh)-(x+nh) = f(x)-x-nh, \forall n \in \mathbb{N}$ (vô lí)

$\Rightarrow f(x)$ đơn ánh.

Ta lại có $f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y)+f(y) = 2f\left(\dfrac{f(x)}{2}+y\right)$.

Và do tính đối xứng nên $f(f(x)+f(y)) = 2f\left(\dfrac{f(y)}{2}+x\right)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{2}+y = \dfrac{f(y)}{2}+x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{2}-x = c$ (hằng số) $\Rightarrow f(x) = 2x+2c$.

Thay vào phương trình đã cho ta được $c = 0$.

Vậy $f(x) = 2x$.

**Câu 5.**

$$x+y+z+t = n\sqrt{xyzt} \Leftrightarrow (x+y+z+t)^2 = n^2xyzt$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x(y+z+t)+(y+z+t)^2 = n^2xyzt$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left[2(y+z+t)-n^2yzt\right]x+(y+z+t)^2 = 0 \ (*)$$

- Điều kiện cần

Giả sử $(*)$ có nghiệm. Gọi $(x_0,y_0,z_0,t_0)$ là nghiệm có tổng nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant t_0$.

Ta có $x_0^2 + \left[2(y_0 + z_0 + t_0) - n^2 y_0 z_0 t_0\right]x_0 + (y_0 + z_0 + t_0)^2 = 0.$

Do đó $f(x) = x^2 + \left[2(y_0 + z_0 + t_0) - n^2 y_0 z_0 t_0\right]x + (y_0 + z_0 + t_0)^2 = 0$

có nghiệm $x = x_0$, suy ra có nghiệm $x = x_1$, do đó

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -2(y_0 + z_0 + t_0) + n^2 y_0 z_0 t_0 \\ x_0 x_1 = (y_0 + z_0 + t_0)^2 \end{cases}$$

Do $x_0,y_0,z_0,t_0$ là các số nguyên dương nên $x_1$ nguyên dương.

Suy ra $(x_1,y_0,z_0,t_0)$ là nghiệm nguyên dương của $(*)$

$\Rightarrow x_1 \geqslant x_0 \Rightarrow x_1 \geqslant x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant t_0$

$\Rightarrow f(y_0) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow y_0^2 + 2(y_0 + z_0 + t_0)y_0 - n^2 y_0^2 z_0 t_0 + (y_0 + z_0 + t_0)^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow n^2 y_0^2 z_0 t_0 \leqslant y_0^2 + 2(y_0 + z_0 + t_0)y_0 + (y_0 + z_0 + t_0)^2 \leqslant 16y_0^2$

$\Rightarrow n^2 z_0 t_0 \leqslant 16 \Rightarrow n^2 \leqslant n^2 z_0 t_0 \leqslant 16.$

Vậy $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.

- Điều kiện đủ:

Với $n = 1$ phương trình $x + y + z + t = \sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(4;4;4;4)$.

Với $n = 2$ phương trình $x + y + z + t = 2\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(2;2;2;2)$.

Với $n = 3$ phương trình $x + y + z + t = 3\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(2;2;1;1)$.

Với $n = 4$ phương trình $x + y + z + t = 4\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(1;1;1;1)$.

**Câu 6.**

- Với mỗi $n \geqslant xy$.

Vì $(x,y) = 1$ nên $\exists b, 0 \leqslant b < x$ sao cho $by \equiv n \pmod{x}$.

Đặt $a = \dfrac{n - by}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = ax + by$ với $a,b \in \mathbb{N}$.

Theo điều kiện của S, $n \in S, \forall n \geqslant xy$

$\Rightarrow T \subset \{0,1,...,xy\} \Rightarrow T$ hữu hạn.

- Giả sử $T = \{t_1, t_2, ..., t_{|T|}\}$ với $t_1 < t_2 < ... < t_{|T|}$.

Vì $t_i \notin S$ nên hai số *m* và $t_1 - m$ có ít nhất một số không thuộc *S* với

$$1 \leqslant m \leqslant \left[\frac{t_i}{2}\right]$$

Mà chỉ có $i-1$ số nguyên dương nhỏ hơn $t_i$ không thuộc *S* (đó là $t_1, t_2, ..., t_{i-1}$)

nên $\left[\frac{t_i}{2}\right] \leqslant i-1 \Rightarrow t_i \leqslant 2i-1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{|T|} t_i \leqslant \sum_{i=1}^{|T|}(2i-1) = |T|^2 \Rightarrow s(T) \leqslant |T|^2$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN
# LONG AN

**Câu 1.**

Đặt $t = \sqrt{y-1}\ (t \geqslant 0)$.

Khi đó hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases} x^2 + xt^2 - t^2 - 2xt = 0 & (1) \\ x^3 + 3x^2t - 6x^2 + t^3 - 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế phương trình (1) với 3 rồi cộng với phương trình (2), ta được phương trình:

$$(x+t)^3 - 3(x+t)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x + t = 4 \Leftrightarrow t = 4 - x.$$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$x^3 - 6x^2 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Suy ra $t = 2$ (nhận) $\Rightarrow y = 5$.

Vậy hệ phương trình có nhiệm duy nhất $(x,y) = (2,5)$.

**Câu 2.**

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{3 + \sqrt{3u_n^2 + 8u_n + 9}}{u_n}$ là dãy số dương và

$$u_{n+1} = \frac{3}{u_n} + \sqrt{3 + \frac{8}{u_n} + \frac{9}{u_n^2}} > \sqrt{3}, \forall n \geqslant 1.$$

Mặt khác: $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n} + \sqrt{3 + \dfrac{8}{u_n} + \dfrac{9}{u_n^2}} < \dfrac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3 + \dfrac{8}{\sqrt{3}} + \dfrac{9}{3}} = A, \forall n \geqslant 1$.

Như vậy $(u_n)$ là dãy số dương và bị chặn.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{3}{x} + \sqrt{3 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2}}, x > 0$;

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} - \left(\frac{8}{x^2} + \frac{18}{x^3}\right).\frac{1}{2\sqrt{3 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2}}} < 0.$$

Suy ra hàm f(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$ hay hàm f(f(x)) là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)), \forall n \geqslant 1$.

Từ đó suy ra hai dãy $(u_{2k}),(u_{2k+1})$ có giới hạn hữu hạn. Gọi hai giới hạn đó lần lượt là a và b thì $\sqrt{3} \leqslant a,b \leqslant A$. Ta có:

$$u_{2k+1} = \frac{3}{u_{2k}} + \sqrt{3 + \frac{8}{u_{2k}} + \frac{9}{u_{2k}^2}}; u_{2k+2} = \frac{3}{u_{2k+1}} + \sqrt{3 + \frac{8}{u_{2k+1}} + \frac{9}{u_{2k+1}^2}}$$

Qua giới hạn, ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases} a = \frac{3}{b} + \sqrt{3 + \frac{8}{b} + \frac{9}{b^2}} = f(b) \\ b = \frac{3}{a} + \sqrt{3 + \frac{8}{a} + \frac{9}{a^2}} = f(a) \end{cases}$

Do f(x) là hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên a = b.

Như vậy:

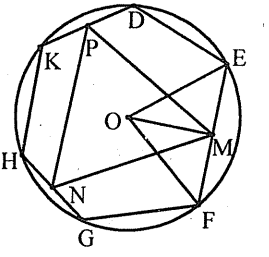
$$a = \frac{3}{a} + \sqrt{3 + \frac{8}{a} + \frac{9}{a^2}} \Rightarrow a^2 - 3 = \sqrt{3a^2 + 8a + 9}$$

$$\Leftrightarrow a(a+1)(a^2 - a - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1 \vee a = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \vee a = \frac{1-\sqrt{33}}{2}.$$

Do $\sqrt{3} \leqslant a,b \leqslant A$ nên $(u_n)$ có giới hạn và giới hạn đó là $a = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

**Câu 3.**




Đặt: $\angle EOF = 2\alpha, \angle GOH = 2\beta, \angle KOD = 2\gamma$ thì:

$OM = R.\cos\alpha, ON = R.\cos\beta, OP = R.\cos\gamma$.

Do $\angle DOE = \angle FOG = \angle HOK = 60^0$,

nên điểm O thuộc miền trong của lục giác DEFGHK.

Từ đó suy ra: $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$.

Áp dụng định lí Côsin, ta được:

$$PM^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\alpha.\cos\gamma.\cos\left(\alpha + \gamma + 60^0\right)$$

$$= R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\alpha.\sin(\alpha + \beta).\cos\left(150^0 - \beta\right);$$

$$NP^2 = R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\beta.\cos\gamma.\cos\left(\beta + \gamma + 60^0\right)$$

$$= R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\beta.\sin(\alpha + \beta).\cos\left(150^0 - \alpha\right).$$

Suy ra:

$$PM^2 - NP^2$$

$$= R^2\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta - 2\sin(\alpha + \beta).\left(\cos\alpha.\cos(150^0 - \beta) - \cos\beta.\cos(150^0 - \alpha)\right)\right]$$

$$= R^2\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta)\right] = 0.$$

Do đó PM = NP và chứng minh tương tự ta được NP = MN.

Vì vậy tam giác MNP là tam giác đều.

**Câu 4.**

Cho y = 1 thì: $f\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right) = f(x) + (x-1)^2$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2x = f\left(\frac{x^2+1}{2}\right) - 2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$$

Đặt: $g(x) = f(x) - 2x$ thì $g(x) = g\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)$ (1) thì g liên tục.

Do g là hàm số chẵn nên ta xét trên $\left[0;+\infty\right)$.

Với $a \geqslant 0$, ta xét hai trường hợp:

i) $0 \leqslant a \leqslant 1$

Xét dãy số $(x_n)$ như sau: $x_0 = a$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{2}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$

Vì $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, bằng quy nạp ta được $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ta lại có: $x_n \leqslant x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leqslant \dfrac{x_n^2+1}{2} \Leftrightarrow (x_n - 1)^2 \geqslant 0$.

Từ đó suy ra $(x_n)$ tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn

Gọi $\lim x_n = l$ thì $l = \dfrac{l^2+1}{2} \Leftrightarrow l = 1$

Vậy $\lim x_n = 1$.

Từ đó thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được

$$g(a) = g(x_0) = g\left(\frac{x_0^2+1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_1^2+1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n).$$

$$\Rightarrow g(a) = \lim_{x\to\infty} g(x_n) = g(1)$$

ii) $a > 1$

Xét dãy số $(x_n)$ xác định như sau: $x_0 = a, x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$.

Sử dụng phương pháp của dãy truy hồi ta được $\lim x_n = 1$.

Do $x_n = \dfrac{x_{n+1}^2+1}{2}$, nên thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được:

$$g(a) = g(x_0) = g\left(\frac{x_1^2+1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_2^2+1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n)$$

$$\Rightarrow g(a) = \lim_{x\to\infty} g(x_n) = g(1).$$

Từ đó suy ra $g(x) = C, \forall x \in [0;+\infty)$ và do g hàm số chẵn nên

$$g(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x) = 2x + C$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = 2x + C$ thoả mãn bài toán.

**Câu 5.**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A = 2^{2^k} - 1 = \left(2^{2^{k-1}} - 1\right)\left(2^{2^{k-1}} + 1\right) = \left(2^{2^{k-1}} + 1\right)\left(2^{2^{k-2}} + 1\right)\ldots\left(2^{2^0} + 1\right)$$

$$A = 2^{2^k} - 1 = 3\prod_{l=1}^{k-1}\left(2^{2^l} + 1\right)$$

$$A = \left(2^{2^{k-1}} + 1\right) - 2$$

Gọi $d = \left(2^{2^l} + 1, 2^{2^m} + 1\right) \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1; d = 2$

Mà $2^{2^l} + 1, 2^{2^m} + 1$ lẻ nên $d = 1$

Do đó các số $2^{2^l} + 1 \left(l = \overline{1;k-1}\right)$ nguyên tố cùng nhau nên theo định lí số dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên c sao cho:

$$c \equiv 2^{2^l} \left(\mathrm{mod}\, 2^{2^l} + 1\right), \forall l = \overline{1;k-1}$$

$$\Rightarrow c^2 + 1 \equiv \left(2^{2^l} + 1\right)\left(\mathrm{mod}\, 2^{2^l} + 1\right) \Rightarrow c^2 + 1 \vdots 2^{2^l} + 1, \forall l = \overline{1;k-1}$$

Do đó:

$$3(c^2+1)\vdots A \Rightarrow 81c^2+81\vdots A \Rightarrow \exists n\in\mathbb{Z}:(9c)^2+81=n(2^{2^k}-1)$$

$$\Rightarrow (9c)^2+3=n2^{2^k}-n-78.$$

Vậy không thể tồn tại số nguyên n nào để $n.2^{2^{2013}}-78-n$ là số chính phương.

**Câu 6.**

a) Giả sử con rắn có n cái đầu. Nếu dùng thanh kiếm 1 hoặc thanh kiếm 2 thì số đầu con rắn sẽ thay đổi là $n-21$ hoặc $n-4+2013=n+2009$ tức là tăng hoặc giảm một đại lượng là bội số của 7.

Mà 100 thì chia 7 dư 2 nên hoàng tử không thể cứu được công chúa.

b) Giả sử ban đầu có x cái đầu và sau khi chặt còn lại y cái đầu rắn thì ta có phương trình:

$$x-21u+2009v=y$$

$$\Rightarrow x-y=21u-2009v.$$

Khi đó $x-y$ là số chia hết cho 7.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN

**Câu 1.**

Điều kiện $x\geqslant 1$.

Phương trình thứ nhất được viết lại theo x

$$x^2+(y^2+2)x-2y^3-4y^2-4y=0 \ (1)$$

Ta có: $\Delta=(y^2+2)^2+8y^3+16y^2+16y=(y^2+4y+2)^2$.

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-y^2-2+y^2+4y+2}{2}=2y \\ x=\dfrac{-y^2-2-y^2-4y-2}{2}=-y^2-2y-2\leqslant -1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Thế $y=\dfrac{x}{2}$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)=x^2-2x+9 \ (2).$$

Ta chứng minh

$$\begin{cases} x^2-2x+9\geqslant 2x+5 & (3) \\ 3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)\leqslant 2x+5 & (4) \end{cases},\ \forall x\geqslant 1.$$

Thật vậy, $(3)\Leftrightarrow x^2-4x+4\geqslant 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

$$(4) \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)-2x-5 \leqslant 0.$$

Đặt $f(x)=3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)-2x-5$.

Ta có $f'(x)=3\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+4)^2}}\right)-2$. Dễ thấy $f'(x)$ là hàm giảm trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f'(2)=0$ nên $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=2$.

Do $f'(x)$ liên tục nên ta có bảng biến thiên

| x | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | | ↗ | 0 | ↘ | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \geqslant 1$ tức (4) thỏa mãn và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x=2$ và do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

**Câu 2.**

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{x}{2}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2^x}\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2^x=2\ln 2 \Leftrightarrow x=x_0=1+\log_2 \ln 2$.

Ta có bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | 0 | | $x_0$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | | | 0 | + | | | |
| f(x) | | ↘ | 1 | ↘ | $y_0$ | ↗ | 1 | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $x_1=f(a)>1$ vì $a<0$, khi $x>1$ thì $f(x)>1$ nên $x_n>1$, $\forall n \geqslant 1$.

Ta lại có $f'(x)=\dfrac{1}{2^x}\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} \in (0;\dfrac{1}{2})$ nên $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$, $\forall x>1$.

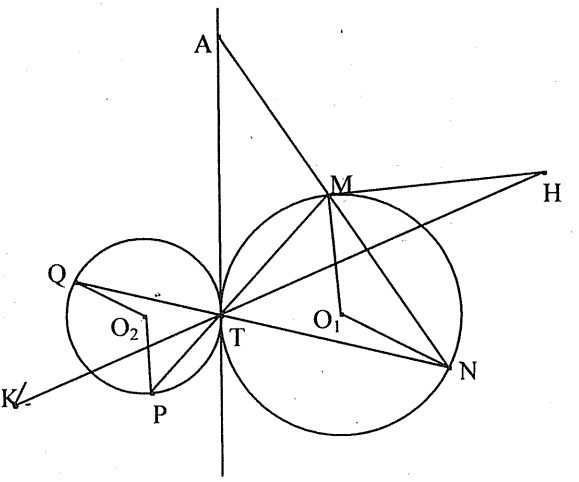
Theo định lí Lagrange, tồn tại $c>1$ sao cho

$$|f(x)-1|=|f(x)-f(1)|=f'(c)|x-1|<\frac{1}{2}|x-1|,\ \forall x>1.$$

Do đó $|x_n - 1| < \frac{1}{2}|x_{n-1} - 1| < ... < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - 1|$, $\forall n > 1$.

Theo định lí kẹp ta có $(x_n)$ hội tụ và $\lim x_n = 1$.

**Câu 3.**




Gọi H là giao điểm của các tiếp tuyến của $(O_1)$ tại M và N. Ta có H là cực của đường thẳng $\Delta$ đối với $(O_1)$. Do $\Delta$ luôn đi qua A cố định nên H luôn chạy trên đường thẳng $m$ cố định là đối cực của A đối với $(O_1)$.

Mặt khác, gọi $f$ là phép vị tự tâm T tỉ số $k = -\frac{R_2}{R_1}$.

Ta có $f(O_1) = (O_2)$ và do đó $f(M) = P$, $f(N) = Q$, suy ra $f(H) = K$.

Do H luôn chạy trên đường thẳng $m$ cố định nên K luôn chạy trên đường thẳng cố định $n = f(m)$.

**Câu 4.**

Ta có $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nên $f$ chẵn, vì vậy ta chỉ cần xác định $f(x)$ với $x \geqslant 0$.

Trường hợp $0 \leqslant x < 3$:

Xét dãy $(x_n)$ với $x_0 = x$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$.

Bằng quy nạp (hoặc dùng hàm $f(x) = \sqrt{x+6}$), ta chứng minh được $(x_n)$ tăng và bị chặn trên (bởi 3) nên tồn tại $\alpha = \lim x_n$.

Từ công thức truy hồi, suy ra $\alpha = 3$.

Khi đó

$$f(x_n) = f(\sqrt{x_{n-1} + 6}) = f(x_{n-1}) = ... = f(x_0) = f(x). \quad (1)$$

Do $f$ liên tục, nên từ (1), cho $n \to \infty$, ta được $f(x) = f(3)$.

Trường hợp $x > 3$:

Xét dãy $(x_n)$ với $x_0 = x$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$.

Chứng minh tương tự, ta có $\lim x_n = 3$ và $f(x) = f(3)$.

Suy ra $f(x) = f(3), \forall x \geqslant 0$.

Vậy $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với $C$ là hằng số tùy ý.

**Câu 5.**

Với $p = 2$, thỏa mãn bài toán. Giả sử tồn tại số nguyên tố $p \geqslant 3$ sao cho $m$ là số chính phương, tức tồn tại $a \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $p^{p+1} + (p+1)^p = a^2$.

Khi đó: $(a + p^{\frac{p+1}{2}})(a - p^{\frac{p+1}{2}}) = (p+1)^p = (2uv)^p = 2^p u^p v^p$, (1)

trong đó $p + 1 = 2uv$ với $(u,v) = 1$.

Ta có nhận xét sau:

* $a + p^{\frac{p+1}{2}}$ và $a - p^{\frac{p+1}{2}}$ cùng chia hết cho 2 nhưng không cùng chia hết cho 4

(vì nếu $(a + p^{\frac{p+1}{2}}) \equiv (a - p^{\frac{p+1}{2}}) \equiv 0 \pmod 4$ thì $2p^{\frac{p+1}{2}} \equiv 0 \pmod 4$, suy ra $p \vdots 2$); (2)

* $a + p^{\frac{p+1}{2}}$, $a - p^{\frac{p+1}{2}}$ chỉ có ước chung thật sự là 2

(vì tương tự như trên, nếu $d > 2$ là ước nguyên tố chung của $a + p^{\frac{p+1}{2}}$ và $a - p^{\frac{p+1}{2}}$ thì $2p^{\frac{p+1}{2}} \vdots d$ suy ra $p \vdots d$). (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có $a + p^{\frac{p+1}{2}} = 2^{p-1}u^p, a - p^{\frac{p+1}{2}} = 2v^p$ (hoặc đổi lại),

suy ra $p^{\frac{p+1}{2}} = \left|2^{p-2}u^p - v^p\right|$ tức là $2^{p-2}u^p \equiv v^p \pmod p$.

Mà theo định lí Fermat nhỏ thì

$u^p \equiv u \pmod p$, $v^p \equiv v \pmod p$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ nên $u \equiv 2v \pmod p$.

Lại do $p + 1 = 2uv$ nên $u, 2v < p$, vì vậy $u = 2v$, suy ra $u = 2, v = 1$

(vì $(u,v) = 1$), $p = 3$. Điều này dẫn đến $a^2 = 145$. Mâu thuẫn.

Vậy $m$ không là số chính phương.

**Câu 6.**

Có tất cả là $2^n$ tập con của E. Suy ra số các cặp (A, B) các tập con của E là $2^n.2^n = 4^n$. Ta đếm số các cặp (A, B) mà $A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A$. Ta có

$|\{(A, B)|\ A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A\}|$

$= |\{(A, B)|\ A \subseteq B\}| + |(A, B)|\ B \subseteq A\} - |\{(A, B)|\ A \subseteq B$ và $B \subseteq A\}|$.

Rõ ràng: $\{(A, B)|\ A \subseteq B$ và $B \subseteq A\}| = |\{(A, B)|\ A = B\}| = 2^n$.

Để tính $|\{(A, B)|\ A \subseteq B\}|$, ta lí luận như sau: Nếu $|B| = k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ thì có $C_n^k$ cách chọn B. Sau khi B được chọn, sẽ có $2^k$ cách chọn A. Suy ra

$$|\{(A,B) \mid A \subseteq B\}| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = 3^n.$$

Từ đó đáp số của bài toán là $4^n - 2.3^n + 2^n$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÍ TỰ TRỌNG - CẦN THƠ

**Câu 1.**

Đặt: $a = \sqrt{x}$; $b = \sqrt{y}$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\left(a^2 + b^2\right) = 4 + 2ab \\ a\left(\sqrt{3a^2 + 6ab}\right) + b\sqrt{3b^2 + 6ab} = 6 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a\left(\sqrt{3a^2 + 6ab}\right) + b\sqrt{3b^2 + 6ab} \geqslant 2\sqrt{ab\sqrt{3a^2 + 6ab}.\sqrt{3b^2 + 6ab}}$$

$$\geqslant 2\sqrt{ab\sqrt{9a^2b^2 + 18ab\left(a^2 + b^2\right) + 36a^2b^2}}$$

$$\geqslant 2\sqrt{ab\sqrt{9a^2b^2 + 36ab(ab) + 36a^2b^2}} = 6ab.$$

Suy ra $ab \leqslant 1$ (1)

Để ý rằng:

$$a\left(\sqrt{3a^2 + 6ab}\right) + b\sqrt{3b^2 + 6ab} = \frac{a\sqrt{9a}\sqrt{3a + 6b}}{3} + \frac{b\sqrt{9b}\sqrt{3a + 6b}}{3}.$$

Ta lại có theo bất đẳng thức AM – GM thì:

$$\frac{a\sqrt{9a}\sqrt{3a + 6b}}{3} + \frac{b\sqrt{9b}\sqrt{3a + 6b}}{3} \leqslant \frac{12a^2 + 6ab}{6} + \frac{12b^2 + 6ab}{6}$$

$$= 2\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

Vậy ta suy ra: $a^2 + b^2 + ab \geqslant 3$.

Mà $ab \leqslant 1$ nên $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

Từ phương trình thứ nhất ta có: $4 + 2ab \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + 4 \geqslant 2\sqrt[4]{ab} + 4$.

Vậy suy ra: $\sqrt{ab} \geqslant \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow \sqrt[4]{ab} \geqslant 1$, hay $ab \geqslant 1$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow ab = 1$, từ các dấu bằng của bất đẳng thức ta có: $a = b = 1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) = (1;1)$

**Câu 2.**

Giả thiết được viết lại: $a_{n+2} + \frac{q}{p+q}a_{n+1} \leqslant a_{n+1} + \frac{q}{p+q}a_n$

Đặt $l = \frac{q}{p+q}$. Ta có $0 < l < 1$ và đặt $b_n = a_{n+1} + \frac{q}{p+q}a_n = a_{n+1} + la_n$

Ta có $(b_n)$ bị chặn và đơn điệu nên tồn tại $\lim b_n = b$.

Đặt $b = a + \frac{q}{p+q}a = a + la$

Do $\lim (b_n) = b$ nên $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ ta có:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon(1-l)}{2}$$

Vậy $\frac{\varepsilon(1-l)}{2} > |a_{n+1} + la_n - a - la| = |(a_{n+1} - a) + l(a_n - a)|$

$$\geqslant |a_{n+1} - a| - l|a_n - a|$$

Suy ra $|a_{n+1} - a| < \frac{1-l}{2}\varepsilon + l|a_n - a|$

Từ đó dẫn đến

$$|a_{n_0+k} - a| < \frac{1-l}{2}\varepsilon + l\left(\frac{1-l}{2}\varepsilon + l|a_{n_0+k-2} - a|\right)$$

$$.... < \frac{1-l}{2}\varepsilon\left(1 + l + ... + l^{k-1}\right) + l^k|a_{n_0} - a|$$

$$= \frac{1-l}{2}\varepsilon\frac{1-l^k}{1-l} + l^k|a_{n_0} - a|$$

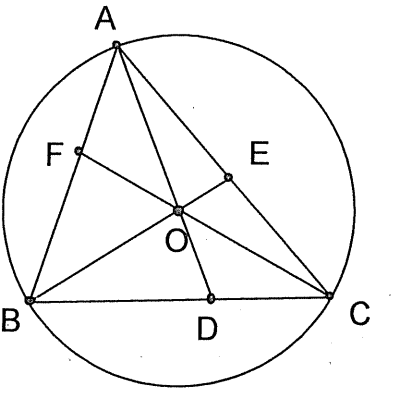
$$< \frac{\varepsilon}{2} + l^k|a_{n_0} - a|.$$

Vì $0 < l < 1$ nên $l^k|a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ với k đủ lớn.

Vậy $|a_n - a| < \varepsilon$ với n đủ lớn hay $\lim a_n = a$.

Vậy $(a_n)$ là dãy có giới hạn hữu hạn.

**Câu 3.**




Kí hiệu S là diện tích.

Ta có: $\frac{OA}{AD} = \frac{S_{AOC}}{S_{ADC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{S_{AOC} + S_{AOB}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{OB}{BE} = \frac{S_{OAB} + S_{OBC}}{S_{ABC}}$; $\frac{OC}{CF} = \frac{S_{OAC} + S_{OBC}}{S_{ABC}}$

Suy ra $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$ hay $R\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) = 2$.

(Với $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$)

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được:

$$2(AD + BE + CF) = R\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)(AD + BE + CF) \geqslant 9R.$$

Mà trong tam giác $ABC$, với tâm đường tròn nội tiếp $I$ bán kính $r$; tâm đường tròn ngoại tiếp $O$ bán kính $R$, ta luôn có công thức Euler

$OI^2 = R^2 - 2Rr$, từ đó suy ra $R \geqslant 2r$.

Vậy $AD + BE + CF \geqslant \frac{9R}{2} \geqslant 9r$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều.

**Câu 4.**

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - x^2$.

Ta có $g(x)$ liên tục, $g(1) = -2$ và $g(x + y) = g(x) + g(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x) = kx$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $g(1) = -2$ nên $k = -2$.

Do đó $f(x) = x^2 - 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy thỏa mãn bài toán.

**Câu 5.**

- Nếu 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau thì suy ra 3 số a, b, c bằng nhau.
- Do vậy ta có thể giả thiết $a \neq b \neq c \neq a$

Lần lượt trừ vế theo vế các đẳng thức ta có

$a^n - b^n = -p(b - c)$;

$b^n - c^n = -p(c - a)$;

$c^n - a^n = -p(a - b)$.

Vậy suy ra $\frac{a^n - b^n}{a - b}.\frac{b^n - c^n}{b - c}.\frac{c^n - a^n}{c - a} = -p^3$ (1)

* **Nếu n lẻ** thì $a^n - b^n$ và $a - b$ cùng dấu, suy ra $VT(1) > 0$ trong khi $VP(1) < 0$, vô lí.

* **Vậy n chẵn**

Gọi d là ước số chung lớn nhất của các hiệu: $a - b$, $b - c$, $c - a$.

Vậy $\begin{cases} a - b = du \\ b - c = dv \\ c - a = dw \end{cases}$ với $(u, v, w) = 1$ và $u + v + w = 0$.

Do $a^n - b^n = -p(b - c)$ suy ra $a-b \mid p(b - c)$

Tương tự $b-c \mid p(c - a)$ và $c-a \mid p(a - b)$

Suy ra $\begin{cases} u \mid pv \\ v \mid pw \\ w \mid pu \end{cases}$

* Giả sử rằng p không chia hết cả u, v, w.

Suy ra $u|v$; $v|w$ và $w|u$ thế nhưng do $(u, v, w) = 1$ suy ra $|u| = |v| = |w| = 1$, điều này lại mâu thuẫn với $u + v + w = 0$.

Vậy có đúng 1 trong 3 số u, v, w chia hết cho p, chẳng hạn $p|u$ suy ra $u = p.u_1$.

Tương tự như trên ta có $\begin{cases} u_1 \mid v \\ v \mid w \\ w \mid u_1 \end{cases}$

Và như vậy ta có $|u_1| = |v| = |w| = 1$.

Đẳng thức $pu_1 + v + w = 0$, suy ra p chẵn nghĩa là $p = 2$.

Như thế $v + w = -2u_1 = \pm 2$ dẫn đến $v = w = (\pm 1)$ và $u = -2v$.

Suy ra $a - b = -2(b - c)$

Hơn nữa do n chẵn, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

Từ $a^n - b^n = -p(b - c)$ suy ra $(a^k + b^k)(a^k - b^k) = -2(b - c) = a - b$.

Do $a^k - b^k \vdots a - b$ nên $a^k + b^k$ phải bằng $\pm 1$.

Do đó đúng 1 trong 2 số a, b phải lẻ mà $a - b = -2(b - c)$ là chẵn nên mâu thuẫn.

Vậy không thể xảy ra $a \neq b \neq c \neq a$

Do đó $a = b = c$ (điều phải chứng minh).

**Câu 6.**

Gọi $x_n$ là số dãy có độ dài bằng $n = 2m + 1$. Với mỗi dãy có độ dài $n = 2m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$ ta có:

1. Nếu dãy đó thỏa mãn điều kiện thì ta có 3 cách thêm 2 chữ cái giống nhau vào cuối mỗi dãy để thu được các dãy có độ dài $n + 2$. Vậy có $3x_n$ dãy có độ dài $n + 2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2. Nếu dãy đó không phải là dãy thỏa mãn điều kiện đề (có $3^n - x_n$ dãy), tuy nhiên số lần xuất hiện của A, B, C không thể đều là số chẵn nên sẽ có 2 chữ cái xuất hiện số chẵn lần và 1 chữ cái xuất hiện số lẻ lần trong mỗi dãy này. Thành thử ta có 2 cách thêm 2 chữ cái (các chữ cái có số lần xuất hiện là số chẵn) vào cuối các dãy này để được dãy có độ dài $n + 2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vì vậy: $x_{n+2} = 3x_n + 2(3^n - x_n) = x_n + 2.3^n$.

Dễ thấy $x_3 = 6$

và $x_{2m+1} - x_3 = \sum_{i=2}^{m}\left(x_{2i+1} - x_{2i-1}\right) = 2\sum_{i=2}^{m}3^{2i-1} = 2\frac{3^3\left(1-(3^2)^{m-1}\right)}{1-3^2} = \frac{3}{4}.3^{2m} - \frac{27}{4}$.

Suy ra $x_{2m+1} = \frac{3}{4}\left(3^{2m} - 1\right)$.

Vậy $x_{2013} = \frac{3}{4}\left(3^{2012} - 1\right)$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN CÀ MAU

**Câu 1.**

Điều kiện $|x| > 1$. Ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12x} \Leftrightarrow x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{35}{12} \end{cases}$

Đặt $S = u + v$; $P = u.v$ (điều kiện $S^2 - 4P \geqslant 0$)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ \dfrac{S}{P} = \dfrac{35}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \dfrac{7}{5} \\ P = \dfrac{12}{25} \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

$\Rightarrow u, v$ là nghiệm phương trình $X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{12}{25} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \dfrac{4}{5} \\ X = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{4}{5} \\ u = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{5}{4}$ và $x = \frac{5}{3}$.

**Câu 2.**

+ Ta có $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2.2^{2n}} = \dfrac{1.2.3...(2n)}{(2.4.6...(2n))^2} = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

$$\Rightarrow a_n^2 = \frac{1^2.3^2...(2n-1)^2}{2^2.4^2...(2n)^2} < \frac{1^2.3^2...(2n-1)^2}{(2^2-1)(4^2-1)...((2n)^2-1)}$$

$$= \frac{1^2.3^2...(2n-1)^2}{1.3.3.5...(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \qquad (1)$$

+ Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$, thật vậy:

Với $0 < x < 1$, ta đặt $\left[\dfrac{1}{x}\right] = m \Rightarrow 0 < m \leqslant \dfrac{1}{x} < m+1 \Rightarrow \dfrac{1}{m+1} < x \leqslant \dfrac{1}{m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} < x^{\frac{1}{m}} \leqslant x^x \text{ (vì } 0 < x < 1) \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

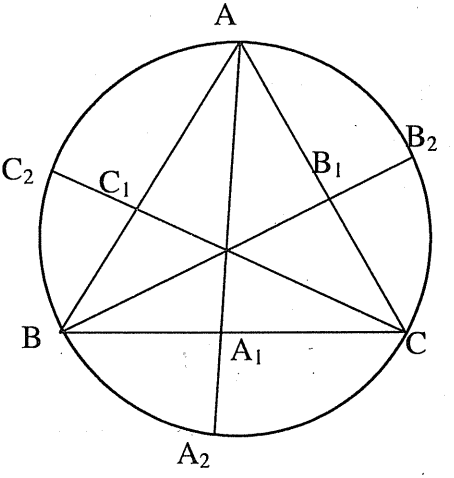
$$\underbrace{1+1+...+1}_{m-2 \text{ số}} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m+1} \geqslant m\sqrt[m]{m+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} \geqslant \frac{m}{m-2+2\sqrt{m+1}} \qquad (3)$$

+ Từ (2), (3) suy ra $\Rightarrow \dfrac{m}{m-2+2\sqrt{m+1}} < x^x < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$ (4)

+ Từ (1), (4) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2013^{a_n}.a_n^{a_n}\right) = 1$.

**Câu 3.**



Áp dụng định lí Ptolyme cho tứ giác nội tiếp $CA_2BA$, ta được:

$$CA_2.AB + BA_2.AC = BC.AA_2$$

Vì $BA_2 = CA_2$ nên $CA_2(AB + AC) = BC.AA_2$ và $\dfrac{CA_2}{AA_2} = \dfrac{BC}{AB + AC}$

Ngoài ra ta có: $\dfrac{A_1A_2}{BA_2 + A_2C} = \dfrac{A_1A_2}{2CA_2}$

Mặt khác, $\Delta CA_1A_2 \backsim \Delta ACA_2$, nên suy ra: $\dfrac{A_1A_2}{2CA_2} = \dfrac{CA_2}{2AA_2}$.

Từ đó: $\dfrac{A_1A_2}{BA_2 + A_2C} = \dfrac{BC}{2(AB + AC)}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{B_1B_2}{CB_2 + B_2A} = \dfrac{AC}{2(AB + BC)}$ (2)

$\dfrac{C_1C_2}{AC_2 + C_2B} = \dfrac{AB}{2(AC + BC)}$ (3)

Từ (1), (2), (3), cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{A_1A_2}{BA_2 + A_2C} + \frac{B_1B_2}{CB_2 + B_2A} + \frac{C_1C_2}{AC_2 + C_2B}$$
$$= \frac{BC}{2(AB + AC)} + \frac{AC}{2(AB + BC)} + \frac{AB}{2(AC + BC)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Nesbit cho 3 số dương AB, BC, AC ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB = BC = CA.

**Câu 4.**

Đặt $a = \dfrac{2012}{2013}$ $(0 < a < 1)$.

Đẳng thức trên được viết lại: $f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$ (1)

+ Từ (1), lần lượt thay $x$ bởi $ax, a^2x, ..., a^nx$ ta được

$$f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$$
$$f(ax) - 2f(a^2x) + f(a^3x) = a^2x^2$$
$$f(a^2x) - 2f(a^3x) + f(a^4x) = a^4x^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(a^nx) - 2f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = a^{2n}x^2$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$f(x) - f(ax) + f(a^{n+1}x) - f(a^{n+2}x) = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}x^2.$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, cho $n \to +\infty$, với giả thiết $f$ liên tục tại $x = 0$, ta được:

$$f(x) - f(ax) + f(0) - f(0) = \frac{1}{1-a^2}x^2$$

hay $f(x) - f(ax) = \dfrac{x^2}{1-a^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

+ Từ (2), lần lượt thay $x$ bởi $ax, a^2x, ..., a^nx$ ta được

$$f(x) - f(ax) = \frac{x^2}{1-a^2}$$

$$f(ax) - f(a^2x) = \frac{a^2x^2}{1-a^2}$$

$$f(a^2x) - f(a^3x) = \frac{a^4x^2}{1-a^2}$$

.....

$$f(a^nx) - f(a^{n+1}x) = \frac{a^{2n}x^2}{1-a^2}$$

Cộng các đẳng thức trên theo vế, ta có $f(x) - f(a^{n+1}x) = \dfrac{1-a^{2n+2}}{(1-a^2)^2}x^2$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, cho $n \to +\infty$, với giả thiết $f$ liên tục tại $x = 0$, ta được:

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{(1-a^2)^2}x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1-a^2)^2}x^2 + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-a^2)^2} + b$, với $a = \dfrac{2012}{2013}$, $b = f(0) \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

**Câu 5.**

$x^3 + 9y^2 + 9z + 23 = 2013 \Leftrightarrow x^3 + 9y^2 + 9z = 1990.$

$1990 \equiv 1 \pmod 9$

$\Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 3.$

Vì $13^3 = 2197 > 2013$ nên $x = 1;4;7;10$.

Nếu $x \leqslant 7$, ta có

$x^3 + 9y^2 + 9z \leqslant 7^3 + 9.7^2 + 9.7 = 847 < 1990.$

Do đó $x = 10 \Rightarrow 9y^2 + 9z = 990 \Leftrightarrow y^2 + z = 110 \Leftrightarrow z = 110 - y^2$.

Mà $z \leqslant y \Rightarrow 110 - y^2 \leqslant y \Rightarrow y^2 + y - 110 \geqslant 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant 10 \\ y \leqslant -11 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 10$ (vì $y \geqslant 0$)

$\Rightarrow z = 10$.

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $(x;y;z) = (10;10;10)$.

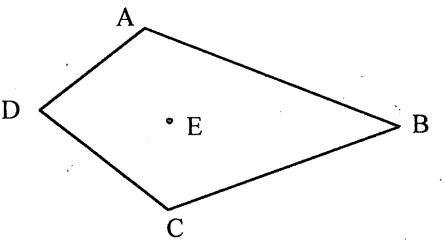
**Câu 6.**

**Ta chứng minh bổ đề**: Trong 5 điểm A, B, C, D, E bất kì trên mặt phẳng và không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng, thì luôn tồn tại 4 điểm lập thành một tứ giác lồi.

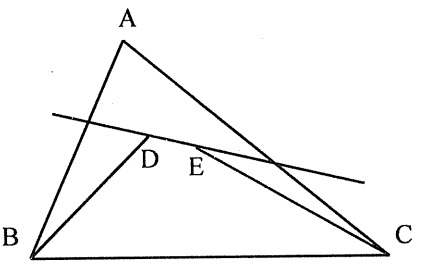
Thật vậy

Ta xét hai trường hợp

+ Nếu bao lồi G của 5 điểm trên là tứ giác, giả sử là tứ giác ABCD thì 4 điểm ABCD lập thành một tứ giác lồi.




+ Nếu bao lồi G của 5 điểm trên là tam giác, giả sử tam giác ABC. Khi đó 2 điểm D, E nằm trong tam giác. Đường thẳng DE không đi qua bất cứ đỉnh nào của tam giác ABC vì không có 3 điểm nào trong 5 điểm trên thẳng hàng. Do đó, đường thẳng DE cắt hai cạnh của tam giác ABC, không làm mất tính tổng quát ta giả sử đường thẳng DE cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC khi đó 4 điểm D, E, B, C lập thành tứ giác lồi.




**Giải bài toán**

Trước tiên ta xét 5 điểm bất kì, không có 3 điểm nào thẳng hàng, theo bổ đề trên ta có 4 điểm trong 5 điểm trên lập thành tứ giác lồi, tức là có $\frac{(5-3)(5-4)}{2} = 1$ tứ giác lồi được tạo thành, vậy bài toán được chứng minh với trường hợp $n = 5$.

Xét n điểm, với $n > 5$, vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số cách chọn ra 5 điểm bất kì trong *n* điểm trên là:

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Ta thấy tương ứng từng cách chọn ta được ít nhất một tứ giác lồi. Tuy nhiên, bất kì tứ giác lồi nào trong số đó cũng có thể được lập từ $(n-4)$ tập hợp khác nhau gồm 5 điểm nói trên, do vậy có ít nhất:

$\frac{1}{n-4}C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$ số tứ giác lồi được tạo thành từ *n* điểm đã cho.

Ta cần chứng minh: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \geqslant \frac{(n-3)(n-4)}{2}; \forall n \geqslant 6$.

$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \geqslant 60(n-4) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geqslant 0; \forall n \geqslant 6$.

Ta có:

$n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = n^3 - 3n^2 - 58n + 240 = (n-5)(n-6)(n+8)$

Lập bảng xét dấu:

| n | $-\infty$ | | $-8$ | | $5$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3 - 3n^2 - 58n + 240$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy:

$n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geqslant 0; \forall n \geqslant 6$.

Vậy số tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho ít nhất là:

$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, với $n > 4$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO BÌNH THUẬN

**Câu 1.**

Từ phương trình thứ ba của hệ, ta có $y = \frac{-2x(x^2+1)}{(3x^2-1)} \Rightarrow x + y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}$

Đặt $x = \tan\varphi, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\varphi \neq 0$. Suy ra $y = \tan 3\varphi - \tan\varphi$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $z = \frac{x^2 - y^2 - 1}{2(x+y)} = \tan\varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi}$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = 1 + x^2 \Leftrightarrow (y + z - x)^2 = 1 + x^2.$$

Thay x, y, z vào và biến đổi ta được $\cos 5\varphi = \pm\cos(\frac{\pi}{2} - 6\varphi)$

Giải hai phương trình, đối chiếu điều kiện $\varphi \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, ta được 10 giá trị $\varphi$ thỏa mãn là $\varphi = \pm\frac{\pi}{22},\pm\frac{3\pi}{22},\pm\frac{5\pi}{22},\pm\frac{7\pi}{22},\pm\frac{9\pi}{22}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x,y,z) = (\tan\varphi, \tan 3\varphi - \tan\varphi, \tan\varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi}),$$

với $\varphi = \pm\frac{\pi}{22},\pm\frac{3\pi}{22},\pm\frac{5\pi}{22},\pm\frac{7\pi}{22},\pm\frac{9\pi}{22}$.

**Câu 2.**

Trước hết ta chứng minh $x_n \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Thật vậy $x_1 = x_2 = 1 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Giả sử đã có $x_k \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right), \forall k \leqslant n$.

Khi đó $x_{n+1} < \frac{2}{5\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ và $x_{n+1} > 0$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $x_n \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hàm: $f(x) = \frac{2}{5\pi}x^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x - x, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{4}{5\pi}x + \frac{2\pi}{5}\cos x - 1$, $f''(x) = \frac{4}{5\pi} - \frac{2\pi}{5}\sin x$.

Suy ra $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow x = x_0 = \arcsin\frac{2}{\pi^2}$

Do đó $f''(x) > 0$ với $x \in [0;x_0]$ và $f''(x) < 0$ với $x \in \left(x_0;\frac{\pi}{2}\right)$.

và $f'(0) = \frac{2\pi}{5} - 1 > 0; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{5}$

Từ đó, do tính liên tục của $f'(x)$ suy ra tồn tại $x_1 \in \left(x_0;\frac{\pi}{2}\right)$ để $f'(x_1) = 0$,

và $f'(x) > 0$ nếu $x \in (0;x_1)$; $f'(x) < 0$ nếu $x \in \left(x_1;\frac{\pi}{2}\right)$.

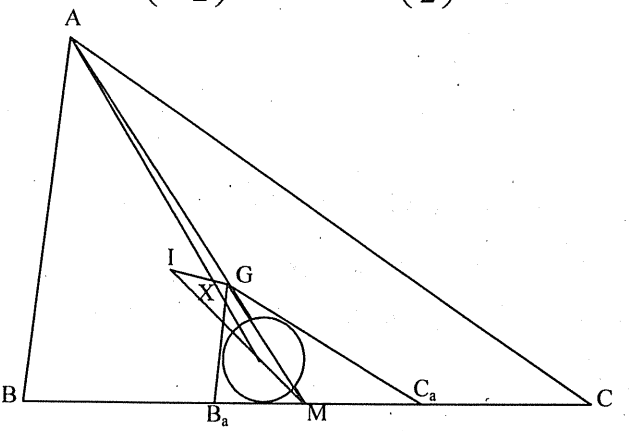
Do $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Suy ra $f(x) > 0, \forall\, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Bằng quy nạp chứng minh rằng $(x_n)$ là dãy không giảm, bị chặn bởi $1 \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Đặt $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ thì $1 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$. Lấy giới hạn hai vế từ công thức truy hồi, ta được $a = \frac{2}{5\pi}a^2 + \frac{2\pi}{5}\sin a$ hay $f(a) = 0$.

Từ nhận xét $f(x) > 0, \forall\, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ta được $a = \frac{\pi}{2}$.

**Câu 3.**




Gọi X là giao điểm của $AI_a$ với GI, M là trung điểm BC.

Ta có phép vị tự tâm M, tỉ số 3, biến $\Delta GB_aC_a$ thành $\Delta ABC$.

Suy ra $\frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}} = -2$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác IGM với cát tuyến $AXI_a$, ta có:

$$\frac{\overline{XG}}{\overline{XI}} = \frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AG}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{XI}}{\overline{XG}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AG}}.\frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}} = \frac{3}{2}.(-2) = -3$$

Tương tự, gọi Y, Z là giao điểm của $BI_b$, $CI_c$ với IG thì ta có $\frac{\overline{YI}}{\overline{YG}} = \frac{\overline{ZI}}{\overline{ZG}} = -3$.

Vậy $X \equiv Y \equiv Z$ hay $AI_a$, $BI_b$, $CI_c$ đồng quy tại một điểm trên GI.

**Câu 4.**

Trong (1) thay x bởi x – y và y bởi x + y ta có

$$f'(x) = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y} \forall x,y \in \mathbb{R}; y \neq 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x+y) - f'(x-y)}{2y} \forall x,y \in \mathbb{R}; y \neq 0$$

Do (2) nên $f'(x+y) = \dfrac{f(x+2y)-f(x)}{2y}$

và $f'(x-y) = \dfrac{f(x)-f(x-2y)}{2y}$

$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{f(x+2y)-2f(x)+f(x-2y)}{4y^2}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}; y \neq 0$ (3)

$\Rightarrow f'''(x) = \dfrac{f'(x+2y)-2f'(x)+f'(x-2y)}{4y^2}$

$= \dfrac{1}{4y^2}\left[\dfrac{f(x+3y)-f(x+y)}{2y} - 2\dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y} + \dfrac{f(x-y)-f(x-3y)}{2y}\right]$

$= \dfrac{1}{8y^3}\left(f(x+3y)-3f(x+y)+3f(x-y)-f(x-3y)\right)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}; y \neq 0$ (3)

Mặt khác theo (1) ta lại có $f(y)-f(x) = (y-x)f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x+3y)-f(x-3y) = 6yf'(x)$ và $f(x+y)-f(x-y) = 2yf'(x)$

Thay vào (3) $\Rightarrow f'''(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) = a,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) = ax+b,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Nếu $k$ là ước của $3^{\frac{k-1}{2}}+1$ thì ta có $3^{\frac{k-1}{2}} \equiv 1 \pmod k$ (1)

$\Leftrightarrow 3^{k-1} \equiv 1 \pmod k$ (2)

Gọi $d$ là bậc của 3 theo mod $k$.

Từ (1) và (2) ta có d là ước của k – 1 nhưng d lại không chia hết $\dfrac{k-1}{2}$

$\Rightarrow d = k-1 \Rightarrow$ k là số nguyên tố.

Ngược lại, nếu k là số nguyên tố.

Ta có k là số nguyên tố dạng $4l+1$ nên theo luật tương hỗ Gauss ta có

$\left(\dfrac{3}{k}\right) = \left(\dfrac{k}{3}\right)$

Mà $k \equiv 2 \pmod 3$ nên $\left(\dfrac{k}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right) = -1$ (do 2 không là số chính phương mod 3).

Từ đó suy ra $3^{\frac{k-1}{2}} \equiv -1 \pmod k \Leftrightarrow 3^{\frac{k-1}{2}}+1 \equiv 0 \pmod k$, đpcm.

**Câu 6.**

Gọi $S_n$ là số cách chọn ra một số người từ $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc và $T_n$ là số cách chọn ra một số người từ $2n - 1$ người xếp thành 2 hàng dọc, trong đó khuyết một chỗ ở đầu của một hàng. Ta có $S_1 = 2$, $T_1 = 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | | | |
| 2 | 4 | | | |

Hình 1. $S_n$ với $n = 5$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | |
| | 3 | | | |

Hình 2. $T_n$ với $n = 5$

Xét $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 1). Ta xét các cách chọn thỏa mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau:

1) Người ở vị trí số 1 được chọn: Khi đó người ở vị trí số 2 và số 3 không được chọn $\Rightarrow$ Có $T_{n-1} + 1$ cách chọn (+1 là do bổ sung cách chọn người vị trí số 1 và không chọn gì nữa cả)

2) Người ở vị trí số 2 được chọn: Tương tự, có $T_{n-1} + 1$ cách chọn.

3) Cả hai người ở vị trí số 1 và số 2 đều không được chọn: Có $S_{n-1}$ cách chọn.

Vậy ta có $S_n = S_{n-1} + 2T_{n-1} + 2$ (1).

Xét $2n - 1$ người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 2). Ta xét các cách chọn thỏa mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau:

1) Người ở vị trí số 1 được chọn: Khi đó người ở vị trí số 2 không được chọn $\Rightarrow$ Có $T_{n-1} + 1$ cách chọn

2) Người ở vị trí số 1 không được chọn: Có $S_{n-1}$ cách chọn.

Vậy ta có $T_n = S_{n-1} + T_{n-1} + 1$ (2)

Từ (1) ta suy ra $2T_{n-1} = S_n - S_{n-1} - 2$, $2T_n = S_{n+1} - S_n - 2$. Thay vào (2), ta được

$S_{n+1} - S_n - 2 = 2S_{n-1} + S_n - S_{n-1} - 2 + 2$

$S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} + 2$.

Từ đây giải phương trình sai phân này tìm được

$$S_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} - 2}{2}.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM VĨNH LONG

**Câu 1.**

Trước hết, ta sẽ chứng minh $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}, \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$, với mọi $x \geqslant 0$.

Xét hàm số

$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, x \geqslant 0 \Rightarrow g'(x) = -\sin x + x \Rightarrow g''(x) = 1 - \cos x \geqslant 0.$$

Do đó hàm $g'(x)$ đồng biến và $g'(x) \geqslant g'(0) = 0$ nên $g(x)$ cũng đồng biến, suy ra

$g(x) \geqslant g(0) = 0$, tức là $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \geqslant 0$.

Hơn nữa, nếu xét hàm số

$h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}, \forall x \geqslant 0 \Rightarrow h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$ nên đây cũng là hàm đồng biến; suy ra $h(x) \geqslant h(0) = 0$, tức là $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}, \forall x \geqslant 0$.

Hai bất đẳng thức trên được chứng minh.

Trở lại bài toán, phương trình đã cho tương đương với

$(x^2+1)\sin x = 1 + x - x^5 - \sqrt[3]{3x+1}$.

Xét hàm số $f(x) = (x^2+1)\sin x - 1 - x + x^5 + \sqrt[3]{3x+1}, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2x.\sin x + (x^2+1)\cos x - 1 + 5x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$,

ta sẽ chứng minh rằng:

$$f'(x) > 2x.\sin x + (x^2+1)\cos x - 1 + 5x^4 \geqslant 0.$$

Biểu thức này không đổi khi thay $x$ bởi $-x$ nên ta chỉ cần xét $x \geqslant 0$, khi đó theo nhận xét trên thì

$$2x.\sin x + (x^2+1)\cos x - 1 + 5x^4$$

$$\geqslant 2x.(x - \frac{x^3}{6}) + (x^2+1)(1 - \frac{x^2}{2}) - 1 + 5x^4 = \frac{5x^2}{2} + \frac{25x^4}{6} \geqslant 0$$

Suy ra $f'(x) > 0$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến, mà $f(0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

**Câu 2.**

Ta có $x_4 = 4$. Tiếp theo, với mọi $n \geqslant 4$, ta có

$$x_n x_{n-3} = x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-2}^2 \text{ và } x_{n+1}x_{n-2} = x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}x_{n-2} - x_n x_{n-3} = x_n^2 + x_n x_{n-1} - x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-2}^2 \text{ hay}$$

$$x_{n-2}\left(x_{n+1} + x_{n-1} + x_{n-2}\right) = x_n\left(x_n + x_{n-1} + x_{n-3}\right)$$

$$\Rightarrow x_{n-2}\left(x_{n+1} + x_n + x_{n-1} + x_{n-2}\right) = x_n\left(x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} + x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{x_n x_{n-1}} = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}{x_{n-1}x_{n-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} + x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{x_n x_{n-1}} = \ldots = \frac{x_4 + x_3 + x_2 + x_1}{x_3 x_2} = \frac{3+1+1+1}{1.1} = 6.$$

Do đó $x_{n+1} = 6x_n x_{n-1} - x_n - x_{n-1} - x_{n-2}$.

Vì $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ nên từ sự xác định như trên, ta suy ra $x_n$ nhận giá trị nguyên với mọi số n nguyên dương.

**Câu 3.**

Ta có $f(x) = x\left(5x^{12} + 13x^4 + 9a\right)$ và $65 = 5 \times 13$.

Giả sử $x$ là một số nguyên.

Nếu $x \equiv 0 \pmod{13}$ thì $f(x) \equiv 0 \pmod{13}$.

Nếu $x \not\equiv 0 \pmod{13}$ thì $5x^{12} + 13x^4 + 9a \equiv 5 + 9a \pmod{13}$.

Do đó $f(x) \equiv 0 \pmod{13}$ khi và chỉ khi $a \equiv -2 \pmod{13}$.

Nếu $x \equiv 0 \pmod 5$ thì $f(x) \equiv 0 \pmod 5$. .

Nếu $x \not\equiv 0 \pmod 5$ thì $5x^{12} + 13x^4 + 9a \equiv 3 + 9a \pmod 5$.

Do đó $f(x) \equiv 0 \pmod 5$ khi và chỉ khi $a \equiv -2 \pmod 5$.

Suy ra, số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho f(x) chia hết cho 65 với mọi giá trị nguyên của x được xác định bởi $a + 2 = lcm(5,13) = 65$ hay $a = 63$..

**Câu 4.**

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau. Nếu a, b, c > 0 và abc = 1 thì ta có các bất đẳng thức như sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c \text{ (1) và } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant ab + bc + ca \text{ (2)}$$

Chứng minh bổ đề 1. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$2\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=3\sqrt[3]{a^3}=3a.$$

Tương tự ta cũng có $2\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3b$ và $2\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geqslant c$.

Cộng các bất đẳng thức trên ta có (1).

Chứng minh bổ đề 2. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a}{b}+2\frac{b}{c}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}=3\sqrt[3]{a^3b^3}=3ab.$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{c}+2\frac{c}{a}\geqslant 3bc$ và $\frac{c}{a}+2\frac{a}{b}\geqslant 3ca$.

Cộng các bất đẳng thức trên ta có (2).

Trở lại bài toán ban đầu. Kết hợp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và các bất đẳng thức (1), (2), ta nhận được

$$\frac{a}{b^2(c+1)}+\frac{b}{c^2(a+1)}+\frac{c}{a^2(b+1)}=\frac{a^2}{b^2a(c+1)}+\frac{b^2}{c^2b(a+1)}+\frac{c^2}{a^2c(b+1)}$$

$$\geqslant\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2}{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2}{(a+b+c)+(ab+bc+ca)}$$

$$\geqslant\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}}{2}=\frac{3}{2}.$$

**Câu 5.**

Cho $x=y=z=0$, ta có $(2kf(0)-1)^2\leqslant 0$, suy ra $f(0)=\frac{1}{2k}$.

Cho $x=y=z=1$, ta có $(2kf(1)-1)^2\leqslant 0$, suy ra $f(1)=\frac{1}{2k}$.

Cho $y=z=0, x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)\leqslant\frac{1}{2k}$.

Cho $x=y, z=1$, suy ra $2kf(x^2)+8kf(x)\geqslant 3+8k^2f^2(x)$.

Vì $f(x^2)\leqslant\frac{1}{2k}$ nên $3+8k^2f^2(x)\leqslant 1+8kf(x)$. Từ đó suy ra

$(2kf(x)-1)^2\leqslant 0$ hay $f(x)=\frac{1}{2k}$ với mọi $x$.

**Câu 6.**

Gọi $G$ là trọng tâm tứ diện và $G_A$ là trọng tâm của tam giác $BCD$. Ta có

$$GA^2=\left(\frac{3}{4}AG_A\right)^2=\frac{9}{16}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}\right)^2$$

$$=\frac{3\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)^2-\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{16}$$

$$=\frac{3\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)-\left(CD^2+DB^2+BC^2\right)}{16}.$$

Chứng minh tương tự ta cũng thu được

$$GB^2=\frac{3\left(BA^2+BC^2+BD^2\right)-\left(CD^2+DA^2+AC^2\right)}{16};$$

$$GC^2=\frac{3\left(CA^2+CB^2+CD^2\right)-\left(BD^2+DA^2+AB^2\right)}{16};$$

$$GD^2=\frac{3\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)-\left(BC^2+CA^2+AB^2\right)}{16}.$$

Từ đó suy ra $m_A=\frac{4}{3}GA,\ m_B=\frac{4}{3}GB,\ m_C=\frac{4}{3}GC,\ m_D=\frac{4}{3}GD$.

Do đó

$$m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2=\frac{16}{9}\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$$

$$=\frac{4}{9}\left(AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2\right)$$

Chú ý rằng $\frac{h_A}{V}=\frac{3}{S_{BCD}};\frac{h_B}{V}=\frac{3}{S_{CDA}};\frac{h_C}{V}=\frac{3}{S_{DAB}};\frac{h_D}{V}=\frac{3}{S_{ABC}}$.

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\left(\frac{1}{S_{ABC}}+\frac{1}{S_{BCD}}+\frac{1}{S_{CDA}}+\frac{1}{S_{DAB}}\right)\left(AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2\right)\geqslant 32\sqrt{3}.$$

Trong mọi tam giác có diện tích $S$, độ dài cạnh lần lượt là $a,b,c$, ta đều có bất đẳng thức

$$4\sqrt{3}S\leqslant\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Do đó

$$\left(AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2\right)\geqslant 2\sqrt{3}\left(S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}\right).$$

Cuối cùng sử dụng bất đẳng thức

$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geqslant 16, \forall x,y,z,t>0$, ta được

$$\left(\frac{1}{S_{ABC}}+\frac{1}{S_{BCD}}+\frac{1}{S_{CDA}}+\frac{1}{S_{DAB}}\right)\left(AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2\right)$$

$$\geqslant 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{S_{ABC}}+\frac{1}{S_{BCD}}+\frac{1}{S_{CDA}}+\frac{1}{S_{DAB}}\right)\left(S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}\right)\geqslant 32\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ đều.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU AN GIANG

**Câu 1.**

❖ Ta có x = y = 0 hoặc x = y = – 1 là nghiệm của hệ.

❖ Ta chứng minh hệ không có nghiệm khác các nghiệm trên:

▪ Xét x > 0, ta có

$$1+y^7=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7>1+x^7.$$

Suy ra y > x.

Khi đó

$$1+y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7>1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7>1+y^7$$

(vì x > 0)

Suy ra x > y (mâu thuẫn)

Tương tự y > 0 hệ cũng vô nghiệm.

Vậy nếu x > 0 hoặc y > 0 hệ vô nghiệm.

▪ Xét x < –1

Suy ra $1+x^7<0\Rightarrow 1+y<0\Rightarrow y<-1$

Ta có

$$1+y^7=1+(x+x^2)+(x^3+x^4)+(x^5+x^6)+x^7>1+x^7$$

$$\Rightarrow y>x$$

Tương tự từ y < –1 suy ra x > y (mâu thuẫn).

Vậy nếu x < –1 hoặc y < –1: hệ vô nghiệm.

▪ Xét $-1<x<0\Rightarrow 1+x^7>0\Rightarrow 1+y>0\Rightarrow y>-1$.

Ta có:

$$1+y^7=1+x(x+1)+x^3(x+1)+x^5(x+1)+x^7<1+x^7$$

$$\Rightarrow y<x$$

$1+x^7=1+y(y+1)+y^3(y+1)+y^5(y+1)+y^7<1+y^7$

$\Rightarrow$ y > x (mâu thuẫn).

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\{(0;0),(-1;-1)\}$

**Câu 2.**

a. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+4}{6-x}$ đồng biến trên $(-\infty;6)$.

Ta có $u_0=0<1$.

Giả sử $u_n<1$ khi đó $u_{n+1}=f(u_n)<f(1)=1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}$, suy ra $(u_n)$ bị chặn trên (1).

Ta lại có $u_1=\dfrac{2}{3}>u_0$.

Giả sử $u_n>u_{n-1}\Rightarrow f(u_n)>f(u_{n-1})\Rightarrow u_{n+1}>u_n$.

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}$ suy ra $(u_n)$ tăng (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn.

b. Ta có: $u_k-4=\dfrac{u_{k-1}+4}{-6+u_{k-1}}-4=\dfrac{5(u_{k-1}-4)}{-u_{k-1}+6}$

$$\Rightarrow\frac{1}{u_k-4}=\frac{-u_{k-1}+6}{5(u_{k-1}-4)}=\frac{-1}{5}+\frac{2}{5(u_{k-1}-4)}.$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k-4}=\frac{-n}{5}+\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_{k-1}-4}.$$

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k-4}=\frac{1}{u_0-4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k-4}=-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_{k-1}-4}-\frac{n}{5}$$

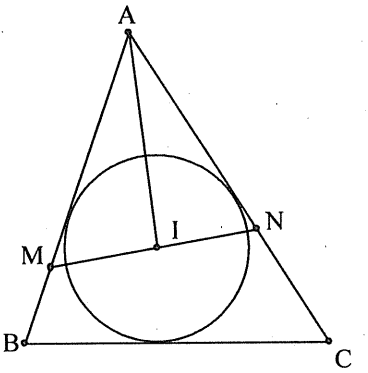
$$=-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\left[T_n-\frac{1}{u_n-4}\right]-\frac{n}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}T_n=-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}.\frac{1}{u_n-4}-\frac{n}{5}\Rightarrow T_n=\frac{-5}{12}-\frac{6}{u_n-4}-\frac{n}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{T_n}{n+2013}=-\frac{5}{12(n+2013)}-\frac{6}{(u_n-4)(n+2013)}-\frac{n}{3(n+2013)}$$

$$\Rightarrow\lim\frac{T_n}{n+2013}=-\frac{1}{3}$$

**Câu 3.**




Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

Ta thấy: MN đi qua I (hình vẽ) từ đó suy ra:

$$S_{IAM}+S_{IAN}=\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r.AM+\frac{1}{2}r.AN=\frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r\left(AB+AC+BC\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{AN}+\frac{AC.BM}{AM}=BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN}+\frac{AC.BM}{BC.AM}=1 \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy: $1\geqslant 2\sqrt{\frac{AB.AC.BM.CN}{BC^2.AM.AN}}$,

suy ra $\frac{BM.CN}{AM.AN}\leqslant\frac{BC^2}{4.AB.AC}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB.CN}{BC.AN}=\frac{AC.BM}{BC.AM}=\frac{1}{2}$,

tức là $\frac{AM}{BM}=\frac{2AC}{BC}$ và $\frac{AN}{CN}=\frac{2AB}{BC}$.

**Câu 4.**

$$f\left(x\right)-f\left(y\right)=\cos\left(x+y\right)g\left(x-y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (*)$$

Chọn $x=\frac{\pi}{2}-y; y\in\mathbb{R}$, $(*)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-f\left(y\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=f\left(y\right)\ (a)$.

Chọn $x=\frac{\pi}{2}+y; y\in\mathbb{R}$, $(*)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f\left(y\right)=-\sin 2y.g\left(\frac{\pi}{2}\right)\ (b)$

Từ (a), (b) ta có: $f\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-\sin 2y.g\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad (c)$.

Theo (*): $f\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-g(2y)\quad (d)$.

Từ (c) và (d) suy ra:

$g(2y)=\sin 2y.g\left(\frac{\pi}{2}\right),\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow g(2x)=a\sin 2x\Rightarrow g(x)=a\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$

(với $a=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ cho trước).

Cho $y=0;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)-f(0)=\cos x.g(x)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+b\left(b=f(0)\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại hai hàm số: $\begin{cases} f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+b \\ g(x)=a\sin x \end{cases}$ (với a, b là hằng số cho trước),

ta thấy thỏa mãn (*).

**Câu 5.**

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x ; y).

Nếu ƯCLN(x; y) = d >1 $\Rightarrow$ d | $2^k$ nên d là lũy thừa của 2.

Chia 2 vế cho $d^m$, ta giả sử gcd(x ; y) = 1 và suy ra x, y lẻ.

Nếu n chẵn, n = 2m ta có $x^n-y^n=(x^m-y^m)(x^m+y^m)$

Nên $x^m-y^m=2^a.x^m+y^m=2^{k-a}$ với a là số nguyên dương.

Khi đó $x^m=2^{a-1}(1+2^{k-2a})$ mà a lẻ nên a = 1.

Vì m$\geqslant$2 nên: $x^m-y^m=(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}y+\ldots+y^{m-1})>2$ (mâu thuẫn)

Do đó n là số lẻ.

Ta có: $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$

Nhưng do x, y lẻ nên $x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}\equiv n\equiv 1 \pmod 2$

$\Rightarrow x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}=1$, không thể xảy ra vì x, y nguyên dương và n > 2.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

**Câu 6.**

a) Số cách chọn ra mỗi loại 2 bài: $C_6^2.C_4^2.C_2^2=90$ cách.

b)

* Trường hợp 1: Chọn 1 bài dễ, 4 bài trung bình, 1 bài khó: $C_6^1.C_4^4.C_2^1$ (cách).

* Trường hợp 2: Chọn 1 bài dễ, 3 bài trung bình, 2 bài khó: $C_6^1.C_4^3.C_2^2$ (cách).

* Trường hợp 3: Chọn 2 bài dễ, 3 bài trung bình, 1 bài khó: $C_6^2.C_4^3.C_2^1$ (cách).

* Trường hợp 4: Chọn 2 bài dễ, 2 bài trung bình, 2 bài khó: $C_6^2.C_4^2.C_2^2$ (cách).

* Trường hợp 5: Chọn 3 bài dễ, 2 bài trung bình, 1 bài khó: $C_6^3.C_4^2.C_2^1$ (cách).

* Trường hợp 6: Chọn 3 bài dễ, 1 bài trung bình, 2 bài khó: $C_6^3.C_4^1.C_2^2$ (cách).

* Trường hợp 7: Chọn 4 bài dễ, 1 bài trung bình, 1 bài khó: $C_6^4.C_4^1.C_2^1$ (cách).

Vậy có 686 cách chọn ra mỗi loại ít nhất 1 bài.

c)

Trường hợp 1: Chọn 2 bài dễ, 2 bài trung bình, 2 bài khó: $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$ (cách).

Trường hợp 2: Chọn 3 bài dễ, 3 bài trung bình: $C_6^3.C_4^3 = 80$ (cách).

Vậy có 90 + 80 = 170 cách chọn ra số bài dễ bằng số bài trung bình.

d)

Trường hợp 1: Chọn 4 bài trung bình, 2 bài dễ: $C_4^4.C_6^2 = 15$ (cách).

Trường hợp 2: Chọn 4 bài trung bình, 1 bài dễ, 1 khó: $C_4^4.C_6^1.C_2^1 = 12$ (cách).

Trường hợp 3: Chọn 4 bài trung bình, 2 bài khó: $C_4^4.C_2^2 = 1$ (cách).

Trường hợp 4: Chọn 3 bài trung bình, 2 bài dễ, 1 bài khó: $C_4^3.C_6^2.C_2^1 = 120$ (cách).

Trường hợp 5: Chọn 3 bài trung bình, 1 bài dễ, 2 bài khó: $C_4^3.C_6^1.C_2^2 = 24$ (cách).

Vậy có 172 cách chọn ra số bài trung bình nhiều hơn bài dễ.

## TRƯỜNG THPT HẬU NGHĨA - LONG AN

**Câu 1.**

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - y)(x^2 + y^2 - xy) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = y \\ x^2 + y^2 - xy = 0 \end{array}\right.$$

$x^2 + y^2 - xy = 0$ (vô nghiệm)

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2y+1} = 7 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant 7 \\ 2y + 1 = 49 - 14y + y^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 12 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (2; 4), (–2; 4).

**Câu 2.**

Chứng minh dãy số $(u_n)$ giảm (phương pháp quy nạp)

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow u_2 < u_1$

Giả sử: $u_{k+1} < u_k \Leftrightarrow \sqrt{\frac{u_k^2+1}{3}} < u_k \Leftrightarrow 2u_k^2 > 1 \Leftrightarrow u_k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ (do $u_k > 0$)

Cần chứng minh: $u_{k+2} < u_{k+1}$.

Ta có:

$$u_{k+2} = \sqrt{\frac{u_{k+1}^2+1}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{u_k^2+1}{3}+1}{3}} = \sqrt{\frac{u_k^2+4}{9}}$$

$$Do\ u_k^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow u_k^2 + 4 < 3u_k^2 + 3$$

$$\Rightarrow u_{k+2} < \sqrt{\frac{3u_k^2+3}{9}} = u_{k+1}$$

Vậy dãy số $(u_n)$ giảm.

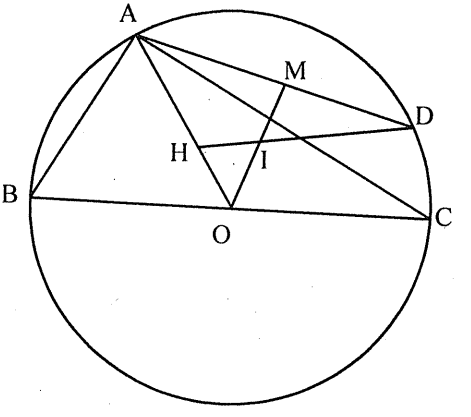
Ta có: $u_{n+1} < u_n \Rightarrow \sqrt{\frac{u_n^2+1}{3}} < u_n \Rightarrow u_n > \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ Dãy số $(u_n)$ hội tụ. Đặt $\lim u_n = a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{3}u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1} \Rightarrow \sqrt{3}\,a = \sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\lim u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 3.**



Ta có H là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ; (1)

O, M và I lần lượt là trung điểm BC, AD và OM $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ ; (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$.

Xét phép vị tự tâm H tỉ số $k=\frac{1}{4}$.

Ta có: $V_H^{k=\frac{1}{4}}(D)=I$.

Mà D $\in$(C) $\Rightarrow$ I$\in$(C'), với (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm H tỉ số $k=\frac{1}{4}$.

**Câu 4.**

Ta có: $xy=\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$

$f(x+y)+xy=f(x)+f(y)$

$\Leftrightarrow f(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}=f(x)+\frac{x^2}{2}+f(y)+\frac{y^2}{2}$ (1)

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

(1) $\Rightarrow g(x+y)=g(x)+g(y)$

$\Rightarrow g(x)=ax$

Mà $g(1)=f(1)+\frac{1}{2}=2013\Rightarrow a=2013$

$\Rightarrow f(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}=2013x-\frac{x^2}{2}$

**Câu 5.**

Ta có: $(9^n+14^n+16^n)\equiv(9^n+1+3^n)(\text{mod}13)$

n = 3k + e (k$\in\mathbb{N}$) và n $\in$ {0; 1; 2}

$1+3^n+9^n=1+3^{3k+r}+9^{3k+r}=1+27^k.3^r+729^k.9^r$

$\Rightarrow(1+3^n+9^n)\equiv(1+3^r+9^r)$ (mod13).

Ta có:

$r=0\Rightarrow 1+3^0+9^0=3$;

$r=1\Rightarrow 1+3^1+9^1=13\vdots 13$;

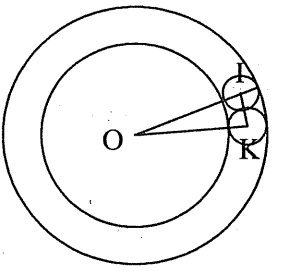
$r=2\Rightarrow 1+3^2+9^2=91\vdots 13$.

$\left(9^n+14^n+16^n\right)\vdots 13 \Leftrightarrow \left(1+3^n+9^n\right)\vdots 13$

$\Leftrightarrow \left(1+3^r+9^r\right)\vdots 13$, $(r \in \{0; 1; 2\}) \Leftrightarrow r \neq 0$

$\Leftrightarrow$ n không chia hết cho 3.

**Câu 6.**




Do (C) tiếp xúc ngoài với $(C_1)$ và tiếp xúc trong với $(C_2)$

$\Rightarrow$ (C) có bán kính R = 1.

Gọi đường tròn (C) tâm I và (C') có tâm K thỏa mãn yêu cầu đề bài và (C) tiếp xúc ngoài với (C').

Ta có tam giác OIK cân tại O nên

OI = OK = 2014 và IK = 2

$$\cos\widehat{IOK} = \frac{OI^2+OK^2-KI^2}{2OI.OK} = \frac{2028097}{2028098}$$

$\Rightarrow$ Số đường tròn (C) nhiều nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\left[\frac{360^0}{\cos^{-1}\frac{2028097}{2028098}}\right] = 6327.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU - ĐĂK LĂK

**Câu 1.**

Xét $|x| \leqslant 1$, đặt $x = \cos\alpha$, phương trình trở thành:

$\cos 5\alpha + 2013 = 0$ (vô nghiệm).

Xét $|x| > 1$, đặt $x = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$, phương trình trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)^5 - \frac{5}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) + 2013 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(u^5+\frac{1}{u^5}\right) + 2013 = 0$$

$\Leftrightarrow u^{10}+2.2013.u^5+1=0$

$\Leftrightarrow u^5=-2013\pm\sqrt{2013^2-1}$

Từ đó tính được: $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2013+\sqrt{2013^2-1}}+\sqrt[5]{-2013-\sqrt{2013^2-1}}\right)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2013+\sqrt{2013^2-1}}+\sqrt[5]{-2013-\sqrt{2013^2-1}}\right).$$

**Câu 2.**

Giả sử tồn tại số k sao cho $u_k \geqslant u_{k+1}$ thì từ (2) ta có:

$u_k \geqslant u_{k+1} \Rightarrow u_{k+1} > u_{k+2} \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+3} \Rightarrow \cdots$

Do đó: $u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} > \cdots$ (vô lí vì $(u_n)$ nguyên dương )

Vậy $(u_n)$ tăng thực sự.

Mà $(u_n)$ nguyên dương nên bằng quy nạp ta có: $u_n \geqslant n$.

Do đó: $\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\frac{3}{u_3}+\cdots+\frac{n}{u_n} \leqslant \frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{n}{n}=n$

$\Rightarrow 0<\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\frac{3}{u_3}+\cdots+\frac{n}{u_n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{2}{u_2}+\frac{3}{u_3}+\cdots+\frac{n}{u_n}\right)=0$

**Câu 3.**

Ta có: $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$

$=4abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$=16SR-8\frac{S^2}{P}=8S(2R-r)$

$=16R^2(2R-r).\sin A.\sin B.\sin C$

$\leqslant 16R^2(2R-r).\frac{3\sqrt{3}}{8}=6\sqrt{3}.R^2(2R-r)$

**Câu 4.**

Ta có: $f(x)\equiv 0$ là một hàm thỏa mãn đề ra.

Nếu tồn tại $x_0$ sao cho $f(x_0)\neq 0$ thì:

$f(y_1)=f(y_2)\Rightarrow f(x_0.f(y_1))=f(x_0.f(y_2))$

$\Rightarrow y_1.f(x_0)=y_2.f(x_0)\Rightarrow y_1=y_2$

Vậy $f(x)$ đơn ánh, mà $f(x)$ liên tục nên $f(x)$ đơn điệu.

Thay $x=0; y=0\Rightarrow f(0)=0$.

Có: $xf(y)=f(yf(x))=f(1.f(xf(y)))=xf(y).f(1)$

$\Rightarrow xf(y)[f(1)-1]=0;\forall x,y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(1)=1>f(0)=0$

Vậy $f(x)$ tăng.

Mà $f(1.f(y))=y.f(1);\forall x,y\in R\Rightarrow y=f(f(y));\forall y\in\mathbb{R}$

Nếu $y>f(y)\Rightarrow f(y)>f(f(y))\Rightarrow y>f(f(y))$ (vô lí)

Nếu $y<f(y)\Rightarrow f(y)<f(f(y))\Rightarrow y<f(f(y))$ (vô lí)

Vậy $y=f(y);\forall y\in\mathbb{R}$

Vậy có hai hàm thỏa mãn đề ra là: $f(x)\equiv 0$; $f(x)\equiv x$.

**Câu 5.**

Gọi 7 số nguyên tố đó là: $p_1, p_2, \cdots, p_7$

Từ đề ra ta có đẳng thức: $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_7^2=p_8^2$, với $p_8$ nguyên tố lẻ.

Vì $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_7^2=p_8^2$ lẻ nên trong $p_1, p_2, \cdots, p_7$ có 2m số chẵn và n số lẻ.

Mà $p_i^2$ chia 8 chỉ nhận các số dư là 4; 1 tùy theo $p_i$ chẵn hay lẻ.

Do đó: $2m.4+n\equiv 1(\bmod 8)\Rightarrow n\equiv 1(\bmod 8)\Rightarrow n=1$.

Vậy trong $p_1, p_2, \cdots, p_7$ có 6 số bằng 2 và 1 số lẻ. Giả sử $p_7$ lẻ.

Ta có: $p_8^2-p_7^2=24\Rightarrow 24\geqslant p_8^2-(p_8-2)^2=4p_8-4\Rightarrow p_8\leqslant 7$.

Thử trực tiếp chỉ có $p_8=7; p_7=5$ thỏa mãn.

Vậy 7 số nguyên tố cần tìm gồm 6 số 2 và 1 số 5.

**Câu 6.**

Vì $A\vdots 2^{1000}\Rightarrow 10^k.\overline{a_{2013}\cdots a_{k+2}a_{k+1}}+\overline{a_k\cdots a_2a_1}\vdots 2^k$

$\Rightarrow \overline{a_k\cdots a_2a_1}\vdots 2^k;\forall k\leqslant 1000$

$a_1$ có 1 cách chọn bằng 2 (vì $a_1\vdots 2$).

$\overline{a_2a_1}$ có 1 cách chọn bằng 12 (vì $\overline{a_2a_1}\vdots 2^2$).

Với $k<1000$, nếu $\overline{a_k\cdots a_2a_1}$ có 1 cách chọn để $\overline{a_k\cdots a_2a_1}\vdots 2^k$

thì $\overline{a_k\cdots a_2a_1}$ chia $2^{k+1}$ dư $2^k$ hoặc 0.

Mà $10^k$ chia $2^{k+1}$ dư $2^k$ nên trong hai số

$$B=\overline{1a_k\cdots a_2a_1}=10^k+\overline{a_k\cdots a_2a_1};C=\overline{2a_k\cdots a_2a_1}=2.10^k+\overline{a_k\cdots a_2a_1}$$

có đúng một số chia hết cho $2^{k+1}$.

Do đó có 1 cách chọn $\overline{a_{k+1}a_k\cdots a_2a_1}$ sao cho $\overline{a_{k+1}\cdots a_2a_1}\vdots 2^{k+1}$.

Theo quy nạp thì $\overline{a_{1000}\cdots a_2a_1}$ có 1 cách chọn để $\overline{a_{1000}\cdots a_2a_1}\vdots 2^{1000}$.

Mà $\overline{a_{1000}\cdots a_2a_1}\vdots 2^{1000}\Rightarrow A\vdots 2^{1000}$.

Do đó $a_{2013};a_{2012};\cdots;a_{1001}$ được chọn tùy ý trong các số 1, 2.

Vậy số các số thỏa mãn đề ra là $2^{1013}$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN KHÁNH HÒA

**Câu 1.**

Giả sử hệ có nghiệm $(x_1,x_2,...,x_{2014})$ và gọi X, Y lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các giá trị $x_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Khi đó, từ hệ phương trình ban đầu ta được:

$$2X\geqslant x_i^{2014}\ (i=1,2,...,2014)\Rightarrow 2X\geqslant X^{2014}\Rightarrow X^{2013}\leqslant 2.$$

Mặt khác, cũng từ hệ phương trình ban đầu ta cũng có:

$$2Y\leqslant x_i^{2014}\leqslant Y^{2014}\Rightarrow Y^{2013}\geqslant 2.$$

Từ đó, $X=Y=\sqrt[2013]{2}\Rightarrow x_1=x_2=...=x_{2014}=\sqrt[2013]{2}$.

Thử lại, ta thấy các số trên thỏa mãn hệ phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm là: $(x_1,x_2,...,x_{2014})=\left(\sqrt[2013]{2},\sqrt[2013]{2},...,\sqrt[2013]{2}\right)$.

**Câu 2.**

Chứng minh: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. Bằng quy nạp ta chứng minh được: $0<x_n<1$ và

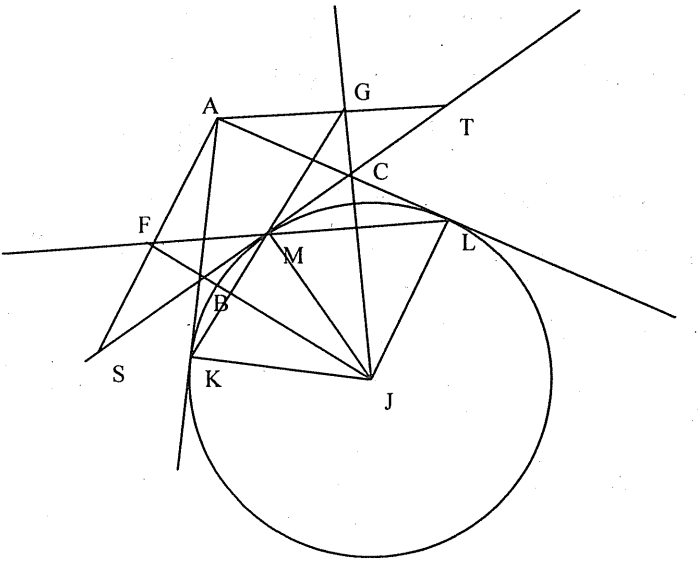
$$x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0\ (\forall n\geqslant 1)\Rightarrow (x_n)\text{ là dãy giảm.}$$

Dãy $(x_n)$ giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim x_n=a$ thì $a\geqslant 0$ và $a=a-a^2\Leftrightarrow a=0$.

Ta lại có: $\lim\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\lim\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}x_n}=\lim\frac{1}{1-x_n}=1.$

Do đó, theo định lí trung bình Cesaro ta được: $\lim\frac{1}{nx_n}=1\Rightarrow\lim nx_n=1.$

**Câu 3.**




Do AB, BC, CA tiếp xúc với (J) nên BM = BK và CM = CL.
Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng
SB = AB và TC = AC )vì khi đó SM = AK = AL = MT).

Vì tứ giác AKJL nội tiếp nên $\widehat{KAL}+\widehat{KJL}=180^0$ (1).

Do FJ, CJ lần lượt là các đường phân giác của các góc $\widehat{KJL}$ và $\widehat{MJL}$

nên $\widehat{FJC}=\frac{1}{2}\widehat{KJL}$ (2).

Do AJ là phân giác trong góc A nên ta được $\widehat{JAL}=\frac{1}{2}\widehat{KAL}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FJC}+\widehat{JAL}=90^0$ (4)

Do tính chất tiếp tuyến nên $CJ\perp FL=\widehat{JFL}+\widehat{FJC}=90^0$ (5)

Từ (4), (5) ta suy ra được $\widehat{JFL}=\widehat{JAL}$

$\Rightarrow$ AFJL nội tiếp $\Rightarrow JB\perp SA=\Delta SAB$ cân tại B $\Rightarrow$ SB = AB.
Chứng minh tương tự được TC = AC.

**Câu 4.**

- Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f\left(f(x_1) + 2f(x_1)\right) = f\left(f(x_2) + 2f(x_2)\right)$$

$$\Rightarrow f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ là đơn ánh.}$$

- Thay $y = -f(x)$ vào phương trình đầu ta được:

$$f\left(f(x) + 2f(-f(x))\right) = f(-f(x)) \Rightarrow f(-f(x)) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Cần chứng minh với mỗi $y \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in \mathbb{R}$: $y = f(x)$.

Thay $x = -f(y)$ vào phương trình đầu ta được:

$$f\left(f(-f(y)) + 2f(y)\right) = f(-f(y)) + y + f(y) \Rightarrow f(f(y)) = y.$$

- Do $f$ song ánh nên $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Giả sử $(a,b) = d$. Đặt $a = dx,\ b = dy,$ với $(x,y) = 1$.

Khi đó, $\dfrac{xy(x+y)d}{x^2 + xy + y^2}$ là số nguyên.

Ta có: $\left(x^2 + xy + y^2,\ x\right) = \left(y^2, x\right) = 1,\ \left(x^2 + xy + y^2, y\right) = 1$ và

$\left(x^2 + xy + y^2,\ x + y\right) = 1$ nên ta phải có:

$\left(x^2 + xy + y^2\right) \mid d \Rightarrow d \geqslant x^2 + xy + y^2.$

Từ đó, $|a-b|^3 = d^3|x-y|^3 \geqslant d^3 \geqslant d^2.\left(x^2 + xy + y^2\right) > d^2xy = ab.$

**Câu 6.**

Gọi $S_n$ là số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa yêu cầu.

Số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa $a_n = n$ là $S_{n-1}$.

Với mỗi $1 \leqslant i \leqslant n-1$ cố định, số các hoán vị thỏa yêu cầu là $C_{n-1}^{i-1}$.

Khi đó, $S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1 \Rightarrow S_n = 2^n - n - 1.$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG
# TIỀN GIANG

**Câu 1.**

Ta có:

$$\sqrt{x+1} = 32x^3 + 48x^2 + 18x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 64x^3 + 96x^2 + 36x + 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+4} = (4x+2)^3 - 3(4x+2).\ (1).$$

Đặt $t = 4x + 2$. Phương trình (1) thành: $\sqrt{t+2} = t^3 - 3t$. (2).

Điều kiện: $t \geqslant -2$.

Nếu $t > 2$ thì ta có:

$$t^3 - 3t = (t^3 - 4t) + t = t(t^2 - 4) + \sqrt{t^2}$$

$$> \sqrt{t^2} = \sqrt{(t^2 - t - 2) + t + 2} = \sqrt{(t+1)(t-2) + t + 2} > \sqrt{t+2}.$$

Do đó, nghiệm của phương trình (2) (nếu có) phải nằm trong đoạn [–2; 2].

Vì vậy ta có thể đặt $t = 2\cos\alpha$, với $\alpha \in [0; \pi]$.

Khi đó, $\frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$.

Do đó, phương trình (2) thành:

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = \sqrt{2(1+\cos\alpha)} \Leftrightarrow 2\cos3\alpha = 2\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \cos3\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha \pm \frac{\alpha}{2} = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $3\alpha \pm \frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ nên $k = 0$ hoặc $k = 1$. Do đó, $\alpha \in \left\{0; \frac{4\pi}{5}; \frac{4\pi}{7}\right\}$.

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là: $\left\{0; \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 1}{2}; \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) - 1}{2}\right\}$.

**Câu 2.**

Ta có: $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n - 1)(x_n - 2)$ (1)

Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có f đồng biến trên (1; +∞) và nghịch biến trên (–∞; 1). (2)

+ Nếu $a > 2 \vee a < 0 \Leftrightarrow f(a) > 2 \Leftrightarrow x_2 > 2$ thì do f đồng biến trên (1; +∞) nên $x_3 = f(x_2) > f(2) = 2$. Bằng quy nạp ta có: $x_n > 2, \forall n > 1$.

Do đó, từ (1) suy ra: $x_{n+1} > x_n > 2, \forall n > 1$. (3)

Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = c \in \mathbb{R}$. Do (3) nên $c > 2$.

Từ (1) suy ra: $c = 1 \vee c = 2$. Điều này mâu thuẫn.

+ Nếu $0 < a < 1$ thì do (2) nên:

$$f(1) < f(a) < f(0) \Rightarrow 1 < x_2 < 2 \Rightarrow f(1) < f(x_2) < f(2)$$

$$\Rightarrow 1 < x_3 < 2 \Rightarrow ... \Rightarrow 1 < x_n < 2, \forall n > 1.$$

Từ (1) suy ra: $(x_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = c < 2$.

Chuyển qua giới hạn trong đẳng thức (1) ta được: $c = 1 \vee c = 2$ (loại).

+ Nếu $1 < a < 2$ thì do (2) nên:

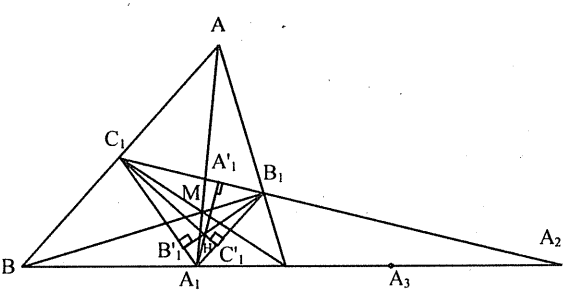
$$f(1) < f(a) < f(2) \Rightarrow 1 < x_2 < 2 \Rightarrow ... \Rightarrow 1 < x_n < 2, \forall n > 0.$$

Tương tự ta có: $\lim x_n = 1$.

+ Nếu $a = 0$ hoặc $a = 2$ thì $x_n = 2, \forall n > 1$ nên $\lim x_n = 2$.

+ Nếu $a = 1$ thì $x_n = 1, \forall n > 0$ nên $\lim x_n = 1$.

**Câu 3.**




Gọi $(O; R)$ là đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ và $H$ là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$ là giao của ba đường cao $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$.

Kí hiệu $(A_3)$, $(B_3)$, $(C_3)$ lần lượt là các đường tròn đường kính $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$.

Ta có: $\overline{HA_1}.\overline{HA'_1} = \overline{HB_1}.\overline{HB'_1} = \overline{HC_1}.\overline{HC'_1}$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{H/(A_3)} = \mathscr{P}_{H/(B_3)} = \mathscr{P}_{H/(C_3)}$ (1).

Ta có: $(B, C, A_1, A_2) = -1$ nên theo hệ thức Newton ta có: $\overline{A_3B}.\overline{A_3C} = A_3A_1^2$.

Do đó: $A_3O^2 - R^2 = \mathscr{P}_{A_3/(O)} = \overline{A_3B}.\overline{A_3C} = A_3A_1^2$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{O/(A_3)} = OA_3^2 - A_3A_1^2 = R^2$.

Tương tự: $\mathscr{P}_{O/(A_3)} = \mathscr{P}_{O/(B_3)} = \mathscr{P}_{O/(C_3)} = R^2$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $O$ và $H$ nằm trên trục đẳng phương của $(A_3)$ và $(B_3)$, $(B_3)$ và $(C_3)$

Suy ra: $OH \perp A_3B_3$, $OH \perp B_3C_3$. Do đó ta có đpcm.

**Câu 4.**

Vì $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $3^n - 1$ chia hết cho 1, –1, 2, –2 nên các đa thức hằng 1, –1, 2, –2 thỏa mãn bài toán. Giả sử tồn tại đa thức f(x) khác bốn đa thức trên thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó tồn tại một số nguyên dương lẻ n sao cho $f(n) \notin \{1;-1;2;-2\}$.

Thật vậy, nếu ngược lại thì với mọi số nguyên dương lẻ n, $f(n) \in \{1;-1;2;-2\}$.

Do có vô hạn số nguyên dương lẻ nên $\exists a \in \{1;-1;2;-2\}$ sao cho có vô hạn các số nguyên dương k (trong số các số nguyên dương lẻ) thỏa f(k) = a.

Nên đa thức f(x) – a có vô số nghiệm, vì vậy nó là đa thức 0.

Hay $f(x) \equiv a$ (mâu thuẫn).

Lấy p là một ước nguyên tố bất kì của f(n). Vì $f(n) \mid (3^n - 1) \Rightarrow p \mid (3^n - 1)$.

Hay $3^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Hơn nữa, ta có: $[f(n+p) - f(n)] \vdots (n + p - n) = p$. Do đó, $f(n+p) \vdots p$.

Mà $f(n+p) \mid (3^{n+p} - 1) \Rightarrow p \mid (3^{n+p} - 1)$. Do đó, $3^{n+p} \equiv 1 \pmod{p}$.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có: $3^p \equiv 3 \pmod{p}$

$\Rightarrow 1 \equiv 3^{n+p} = 3^n.3^p \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p = 2$

Như vậy f(n) chỉ có một ước nguyên tố duy nhất là 2.

Mà $n = 2t + 1, t \in \mathbb{N}$ nên ta có: $3^n - 1 = 3.9^t - 1 \equiv 2 \pmod{4}$.

Nên $3^n - 1 \not\vdots 4$.

Hơn nữa $3^n - 1 \vdots f(n)$ nên f(n) = 2 hoặc f(n) = –2. (mâu thuẫn).

Vậy chỉ có bốn đa thức hằng 1, –1, 2, –2 thỏa mãn bài toán.

**Câu 5.**

Kí hiệu [x] để chỉ phần nguyên của số thực x.

Ta có: $\{x\} = x - [x]$, $\{x^2\} = x^2 - [x^2]$, $\{x^{2013}\} = x^{2013} - [x^{2013}]$.

Theo đề bài ta có: $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$.

Suy ra: $x^2 = x + a$ (1) và $x^{2013} = x + b$ (2), trong đó

$a = [x^2] - [x], b = [x^{2013}] - [x]$.

Từ (1) ta có: $\Delta = 1 + 4a \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$ (do $a \in \mathbb{Z}$).

+ Nếu a = 0 thì $x^2 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ đều là số nguyên.

+ Nếu $a > 0$ thì khi đó tồn tại 2 số nguyên $c_n > 1$ và $d_n > 0$ sao cho:

$$x^n = c_n x + d_n, \forall n \geqslant 3. (*).$$

Thật vậy, với $n = 3$ thì từ (1) ta có: $x^2 = x + a$

$\Rightarrow x^3 = x^2 + ax = x + a + ax = (1 + a)x + a$.

Ta chọn: $c_3 = 1 + a > 1, d_3 = a > 0$.

Giả sử (*) đúng với $n = k \geqslant 3$.

Tức là ta có: $x^k = c_k x + d_k$, với $c_k, d_k \in \mathbb{Z}, c_k > 1, d_k > 0$. (3)

Suy ra: $x^{k+1} = x.x^k = c_k x^2 + d_k x = c_k(x + a) + d_k x = (c_k + d_k)x + c_k a$.

Ta chọn: $c_{k+1} = c_k + d_k, d_{k+1} = c_k a$.

Do (3) và $a \in \mathbb{Z}^+$ nên $c_{k+1}, d_{k+1} \in \mathbb{Z}$ và $c_{k+1} > 1, d_{k+1} > 0$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có (*) là mệnh đề đúng.

Nói riêng, với $n = 2013$ thì tồn hai số nguyên $c_{2013} > 1$ và $d_{2013} > 0$ sao cho:

$$x^{2013} = c_{2013}x + d_{2013}.$$

Do đó, từ (2) suy ra: $c_{2013}x + d_{2013} = x + b \Rightarrow x = \dfrac{b - d_{2013}}{c_{2013} - 1} \in \mathbb{Q}$ (do $b \in \mathbb{Z}$).

Như vậy x là một nghiệm hữu tỉ của phương trình: $X^2 - X - a = 0$ nên nó là một số nguyên. Vậy ta có đpcm.

**Câu 6.**

Do $A \neq \varnothing$ nên $\exists a_0 \in A$ và $B \neq \varnothing$ nên $\exists b_0 = \min\{x \mid x \in B\}$..

+ Nếu $b_0 = 1 \in B$ thì theo ii) ta có $a_0 + 1 \in A$ và $2a_0 + 1 \in B$.

Do đó, cũng theo ii) ta có:

$$(a_0 + 1) + 1 = a_0 + 2 \in A \Rightarrow a_0 + 3 = (a_0 + 2) + 1 \in A.$$

Tiếp tục áp dụng bước trên $a_0$ lần ta có:

$$2a_0 + 1 = (a_0 + 1) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a_0 \text{ số } 1} \in A.$$

Do đó: $2a_0 + 1 \in A \cap B$. Mâu thuẫn với (i).

+ Nếu $b_0 \geqslant 3$ thì $\{1; 2\} \subset A$.

Do đó, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ áp dụng ii) n lần ta có: $1 + nb_0 = 1 + \underbrace{b_0 + b_0 + \ldots + b_0}_{n \text{ số } b_0} \in A$

và tương tự $2 + nb_0 \in A$.

Vì vậy, tất cả các số nguyên dương không chia hết cho $b_0$ đều thuộc A.

Do đó, theo i) nên mọi phần tử $x \in B$ phải là bội của $b_0$. (*)

Mặt khác, theo ii) ta có: $2.1 + b_0 = 2 + b_0 \in B$ và $2.2 + b_0 = 4 + b_0 \in B$.

Do (*) nên $2 + b_0$ và $4 + b_0$ là bội của $b_0$, suy ra $2 = (4 + b_0) - (2 + b_0)$ là bội của $b_0$.

Điều này vô lí vì $b_0 \geqslant 3$. Vậy $b_0 = 2 \in B$. Do đó, $1 \in A$.

Khi đó, theo ii) ta có: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1 + 2n = 1 + \underbrace{2 + 2 + ... + 2}_{\text{n số 2}} \in A \text{ và } 2 + 2n = 2.1 + \underbrace{2 + 2 + ... + 2}_{\text{n số 2}} \in B.$$

Như vậy, *A* chứa tất cả các số nguyên dương lẻ và *B* chứa tất cả các số nguyên dương chẵn.

Do i) nên *A* không chứa số nguyên chẵn nào và *B* không chứa số nguyên lẻ nào.

Vậy tập *A* là tập tất cả các số nguyên dương lẻ và tập *B* là tập tất cả các số nguyên dương chẵn.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI

**Câu 1.**

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y \\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x. \end{cases}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ y = \log_{\frac{1}{4}} x. \end{cases}$

Hàm số $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm ngược của hàm $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, do đó đồ thị của hai hàm này đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$.

Bởi vậy (x,y) là nghiệm của (1) khi và chỉ khi $x = y$, nghĩa là

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \left(\frac{1}{4}\right)^x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$

**Câu 2.**

Dễ thấy rằng $x_n \geqslant 2, \forall n = 1,2,...$

Ta có $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{4 + \sqrt{8x_1 + 1}} \leqslant \sqrt{4+5} = 3.$

Giả sử $x_n \leqslant 3$.

Khi đó $x_{n+1} = \sqrt{4 + \sqrt{8x_n + 1}} \leqslant \sqrt{4+5} = 3$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $x_n \leqslant 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tóm lại, ta đã chứng minh được: $2 \leqslant x_n \leqslant 3, \forall n = 1, 2,...$ (1)

Ta có $x_1 < x_2$. Giả sử $x_{n-1} < x_n$, khi đó

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{\left(4 + \sqrt{8x_n + 1}\right) - \left(4 + \sqrt{8x_{n-1} + 1}\right)}{x_{n+1} + x_n}$$

$$= \frac{\sqrt{8x_n + 1} - \sqrt{8x_{n-1} + 1}}{x_{n+1} + x_n} > 0.$$

Vậy $x_n < x_{n+1}$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra dãy số đã cho là dãy số tăng.

Dãy $(x_n)$ tăng và bị chặn trên, do đó hội tụ.

Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

Từ (1) suy ra $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Từ $x_{n+1} = \sqrt{4 + \sqrt{8x_n + 1}}, \forall n = 1,2,...$, cho $n \to +\infty$, ta được

$x = \sqrt{4 + \sqrt{8x + 1}}$. (2)

Với điều kiện $2 \leqslant x \leqslant 3$, ta có

$(2) \Leftrightarrow x^2 = 4 + \sqrt{8x+1} \Leftrightarrow \sqrt{8x+1} = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 8x + 1 = x^4 - 8x^2 + 16 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

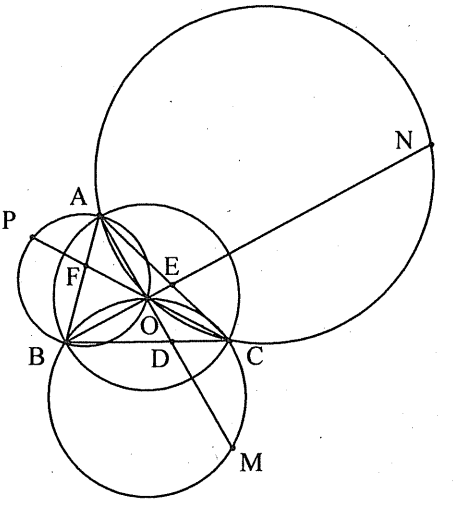
Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 3$.

**Câu 3.**

Gọi D, E, F là giao điểm của AO và BC, BO và CA, CO và AB (tương ứng).

Xét phép nghịch đảo I cực O, phương tích $k = R^2 > 0$ thì (O;R) là đường tròn nghịch đảo nên I biến A thành A, B thành B, C thành C.

Do đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB đi qua cực O lần lượt biến thành các đường thẳng BC, CA, AB.




Ngoài ra O, M, D thẳng hàng nên I biến M thành D.

Tương tự, I biến N thành E, P thành F.

Do đó ta có: $OM.OD = ON.OE = OP.OF = R^2$.

Suy ra: $OM.ON.OP = \dfrac{R^6}{OD.OE.OF} = \dfrac{OA}{OD}.\dfrac{OB}{OE}.\dfrac{OC}{OF}.R^3$.

Gọi $h_1, h_2, h_3$ lần lượt là khoảng cách từ O đến BC, CA, AB, ta có:

$\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta OBD}} = \dfrac{AB.h_3}{BD.h_1}$, tương tự $\dfrac{OB}{OE} = \dfrac{BC.h_1}{CE.h_2}$, $\dfrac{OC}{OF} = \dfrac{CA.h_2}{AF.h_3}$.

Do đó

$$\frac{OM.ON.OP}{R^3} = \frac{AB}{BD}.\frac{BC}{CE}.\frac{CA}{AF}$$

$$= \frac{(AF + FB)(BD + DC)(CE + EA)}{BD.CE.AF} \geqslant 8\sqrt{\frac{FB.DC.EA}{FA.DB.EC}} = 8$$

(theo bất đẳng thức AM - GM)

Trong đó $\dfrac{FB.DC.EA}{FA.DB.EC} = 1$ do AD, BE, CF đồng quy tại O (theo định lí Cêva).

Từ đó suy ra $OM.ON.OP \geqslant 8R^3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $OM.ON.OP$ là $8R^3$.

**Câu 4.**

Dễ thấy đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $\deg P = h \geqslant 1$.

Đặt $x = a - c, y = b - a, z = c - b$. Khi đó $x + y + z = 0$.

Từ giả thiết suy ra

$$P(\sqrt{3}x) + P(\sqrt{3}y) + P(\sqrt{3}z) = P(x - y) + P(y - z) + P(z - x),$$

với x, y, z là ba số thực sao cho $x + y + z = 0$.

Như vậy thay bộ (x; y; z) bởi bộ (x; x; –2x) ta được

$$P(\sqrt{3}x) + P(\sqrt{3}x) + P(-2\sqrt{3}x) = P(0) + P(3x) + P(-3x), \forall x \in \mathbb{R}. \ (1)$$

Giả sử $P(x) = \sum_{i=0}^{h} a_i x^i$ ($a_h \neq 0$, quy ước $x^0 = 1$). Thay vào (1) ta được

$$2\sum_{i=0}^{h} a_i(\sqrt{3}x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-2\sqrt{3}x)^i = a_0 + \sum_{i=0}^{h} a_i(3x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-3x)^i. \ (2)$$

So sánh hệ số của $x^h$ ở hai vế của (2) ta được

$$2(\sqrt{3})^h + (-2\sqrt{3})^h = 3^h + (-3)^h. \ (3)$$

Dễ thấy h = 1, h = 2 thỏa (3). Tiếp theo xét $h \geqslant 3$.

Từ (3) ta thấy rằng h phải là số chẵn: h = 2k, với $k \geqslant 2$.

Khi đó (3) trở thành: $2.3^k + 12^k = 2.9^k \Leftrightarrow 2 + 4^k = 2.3^k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2. \end{array}\right.$

Tóm lại từ (3) suy ra h chỉ có thể là h = 1, h = 2, h = 4.

- Trường hợp h = 1. Khi đó $P(x) = mx + n\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

  Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta thấy thỏa mãn.

- Trường hợp h = 2. Khi đó $P(x) = mx^2 + nx + p\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

  Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$3m\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$= m\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right] \text{ (đúng).}$$

- Trường hợp h = 4.

Khi đó $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Trong phương trình hàm đã cho ở đầu bài, thay bộ (a; b; c) bởi (x; 0; 0) ta được

$$P(\sqrt{3}x) + P(0) + P(-\sqrt{3}x) = P(2x) + 2P(-x), \forall x \in \mathbb{R}. \ (4)$$

Thay $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e, \forall x \in \mathbb{R}$ vào (4) ta được

$$9mx^4 + 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 + \sqrt{3}qx + 9mx^4 - 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 - \sqrt{3}qx + 3e$$

$$= 16mx^4 + 8nx^3 + 4px^2 + 2qx + 2mx^4 - 2nx^3 + 2px^2 - 2qx + 3e, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay $18mx^4 = 18mx^4 + 6nx^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó n = 0.

Vậy: $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$9m\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] + 3p\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$= m\left[(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4\right]$$

$$+p\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right]. (5)$$

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức

$$9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right]$$

$$= (2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4. (6)$$

Đặt $x = a-c, y = b-a, z = c-b$. Khi đó $x+y+z=0$. Ta có

$$9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] = 9(x^4+y^4+z^4). (7)$$

Mặt khác

$$(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4$$

$$= (x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4$$

$$= 2(x^4+y^4+z^4) - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3$$

$$-4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 - 4z^3x + 6z^2x^2 - 4zx^3$$

$$= 2(x^4+y^4+z^4) - 4x^3(y+z) - 4y^3(x+z) - 4z^3(x+y)$$

$$+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2). (8)$$

Do $x+y+z=0$ nên $x^2+y^2+z^2 = -2(xy+yz+zx)$. Suy ra

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

$$= 4[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyx(x+y+z)] = 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Như vậy $x^4+y^4+z^4 = 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$. Thay vào (8) ta được

$$(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4 = 9(x^4+y^4+z^4). (10)$$

Từ (7) và (10) suy ra (6) được chứng minh. Do đó (5) đúng, nghĩa là đa thức $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận: Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$P(x) = mx + n, \forall x \in \mathbb{R}$;

$P(x) = mx^2 + nx + p\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$;

$P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e\,(m \neq 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

**<u>Chú ý:</u>** Từ (4) ta so sánh hệ số của $x^h$ ở hai vế cũng suy ra được h chỉ có thể là $h = 1, h = 2, h = 4$.

**Câu 5.**

Phương trình đặc trưng của dãy số là $\lambda^2 - 18\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \pm \sqrt{80}$.

Vậy: $u_n = A\left(9+\sqrt{80}\right)^n + B\left(9-\sqrt{80}\right)^n, \forall n = 0, 1, 2, ...$

Do $u_0 = 9, u_1 = 161$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ \left(9+\sqrt{80}\right)A + \left(9-\sqrt{80}\right)B = 161 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{9+\sqrt{80}}{2} \text{ và } B = \frac{9-\sqrt{80}}{2}.$$

Do đó $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(9+\sqrt{80}\right)^{n+1} + \left(9-\sqrt{80}\right)^{n+1}\right], \forall n \in \mathbb{N}$. Bởi vậy

$$\frac{u_n^2 - 1}{5} = \frac{\frac{1}{4}\left[\left(9+\sqrt{80}\right)^{n+1} + \left(9-\sqrt{80}\right)^{n+1}\right]^2 - 1}{5}$$

$$= \frac{\left[\left(9+\sqrt{80}\right)^{n+1} + \left(9-\sqrt{80}\right)^{n+1}\right]^2 - 4\left(9+\sqrt{80}\right)^{n+1}\left(9-\sqrt{80}\right)^{n+1}}{20}$$

$$= \frac{1}{20}\left[\left(9+\sqrt{80}\right)^{n+1} - \left(9-\sqrt{80}\right)^{n+1}\right]^2$$

$$= \frac{1}{20}\left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k 9^{n+1-k}\sqrt{80}^k - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k 9^{n+1-k}\left(-\sqrt{80}\right)^k\right]^2$$

$$= \frac{1}{20}\left[C_{n+1}^1 9^n\sqrt{80} + C_{n+1}^3 9^{n-2}.\left(\sqrt{80}\right)^3 + C_{n+1}^5 9^{n-4}.\left(\sqrt{80}\right)^5 + \cdots\right]^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{80}\right)^2}{20}\left[C_{n+1}^1 9^n + C_{n+1}^3 9^{n-2}.\left(\sqrt{80}\right)^2 + C_{n+1}^5 9^{n-4}.\left(\sqrt{80}\right)^4 + \cdots\right]^2$$

$$= \left[2\left(C_{n+1}^1 9^n + C_{n+1}^3 9^{n-2}.80 + C_{n+1}^5 9^{n-4}.80^2 + \cdots\right)\right]^2.$$

Vì với mọi số tự nhiên n thì $2\left(C_{n+1}^1 9^n + C_{n+1}^3 9^{n-2}.80 + C_{n+1}^5 9^{n-4}.80^2 + \cdots\right)$ là số nguyên nên suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 6.**

Giả sử 9 đội bóng đó là: $A_1; A_2; ...; A_9$.. Xét tại một thời điểm nào đó trong giải đấu. Gọi $n_1; n_2; ...; n_9$ tương ứng là số trận mà đội $A_1; A_2; ...; A_9$ đã đấu tính đến thời điểm đó. Khi đó $n = n_1 + n_2 + ... + n_9$ là một số chẵn vì mỗi trận đấu diễn ra sẽ được tính hai lần trong tổng đó. Như vậy tồn tại một số chẵn trong các số $n_1; n_2; ...; n_9$. Giả sử đó là $n_1$.

Xét đội $A_1$. Chia 8 đội còn lại ra thành hai nhóm:

Nhóm 1: Gồm các đội đã đấu với đội $A_1$.

Nhóm 2: Gồm các đội chưa đấu với đội $A_1$.

Vì $n_1$ là một số chẵn nên ta chỉ có hai khả năng sau:

TH1: Trong nhóm 1 có từ 6 đội trở lên.
TH2: Trong nhóm 2 có từ 4 đội trở lên.
Ta xét từng khả năng.

**TH1: Trong nhóm 1 có từ 6 đội trở lên:**

Giả sử trong nhóm 1 có 6 đội là $A_2;A_3;A_4;A_5;A_6;A_7$.

Xét đội $A_2$. Ta chia 5 đội còn lại ra làm hai nhóm.

Nhóm 1.1: Gồm những đội đã thi đấu với đội $A_2$.

Nhóm 1.2: Gồm những đội chưa thi đấu với đội $A_2$.

Theo nguyên lí Dirichlet ta có hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nhóm 1.1 có 3 đội trở lên. Nếu tất cả các đội trong nhóm 1 đôi một chưa có đội nào đã thi đấu với nhau thì khẳng định của đề bài đã đúng. Ngược lại, nếu có hai đội nào đó đã thi đấu với nhau thì hai đội này cùng với $A_1$, $A_2$ hợp thành 4 đội đôi một đã thi đấu với nhau.

Khả năng 2: Nhóm 1.2 có từ ba đội trở lên. Nếu tất cả các đội này đã thi đấu với nhau thì chọn ba đội trong nhóm này cùng với đội $A_1$ hợp thành 4 đội đôi một đã thi đấu với nhau. Ngược lại, nếu có hai đội nào đó chưa thi đấu với nhau thì hai đội đó cùng với đội $A_2$ tạo nên ba đội đôi một chưa thi đấu với nhau.

**TH2: Trong nhóm 2 có từ 4 đội trở lên:**

Khi đó:

- Nếu tất cả các đội trong nhóm 2 đôi một đều đã đấu với nhau thì bài toán đã chứng minh.

- Trường hợp ngược lại, tức có hai đội nào đó chưa thi đấu với nhau. Khi đó, hai đội đó cùng với đội $A_1$ sẽ là 3 đội chưa đá với nhau trận nào.

Tóm lại, trong mọi trường hợp ta luôn chọn được các đội bóng thỏa yêu cầu bài toán.

# TRƯỜNG THPT ĐĂK SONG - ĐĂK NÔNG

**Câu 1.**

Điều kiện $x \geqslant 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\sqrt{2(x-2)^2+2x} \leqslant x-2+\sqrt{x}$ (*)

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x} \geqslant 0 \\ v=x-2 \end{cases}$

Khi đó bất phương trình (*) có dạng

$$\sqrt{2u^2+2v^2} \leqslant u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0 \\ 2u^2+2v^2 \leqslant (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0 \\ (u-v)^2 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ \sqrt{x}=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x=4$.

**Câu 2.**

- Dùng quy nạp chứng minh $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Xét $x_{n+1}-x_n = x_n^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

  Vậy dãy $(x_n)$ tăng $\Rightarrow 1 = x_1 < x_2 < \ldots$

* Giả sử $(x_n)$ bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = a > 1$. Do đó $a = a + a^2 \Rightarrow a = 0 < 1$.

Vô lí, suy ra $(x_n)$ không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n = +\infty$

Ta có $x_{n+1} = x_n + x_n^2 \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = x_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{x_n}{x_{n+1}}$.

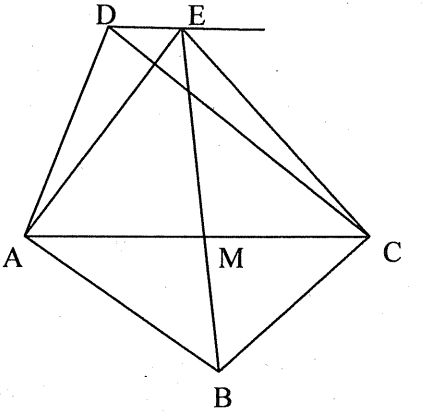
Nên: $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_4} + \ldots + \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n+1}}$

$= \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_{n+1}}$

Do $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{x_{n+1}} = 0$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_4} + \ldots + \dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \lim\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_{n+1}}\right) = 1$

**Câu 3.**




Vì $ACED$ là hình thang cân nên

$AD = CE, AE = CD$

Từ $AB.CD = AD.BC$

suy ra $AB.AE = BC.CE$

Vì M là trung điểm của $AC$ nên diện tích của hai tam giác $ABE$, $CBE$ bằng nhau, hay

$$AB.AE.\sin\widehat{BAE} = BC.CE.\sin\widehat{BCE}$$

Suy ra $\sin\widehat{BAE} = \sin\widehat{BCE}$

Do $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} \neq \widehat{BCA} + \widehat{CAD}$ nên $\widehat{BAE} \neq \widehat{BCE}$

Do đó $\widehat{BAE} = \pi - \widehat{BCE}$ hay $ABCE$ là tứ giác nội tiếp

Tương tự suy ra ACED là tứ giác nội tiếp.

Vì $ACED, ABCE$ là những tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$.

Suy ra ABCD là tứ giác nội tiếp.

**Câu 4.**

Thay $2x + 1 = u - 1$ ta được $4x + 7 = 2u + 1$ và ii) trở thành

$$f(u-1) + 2g(2u+1) = \frac{u-5}{2} \text{ hay } f(x-1) + 2g(2x+1) = \frac{x-5}{2} \quad (*)$$

Từ phương trình (*) và phương trình i) ta được

$$g(2x+1) = \frac{x-5}{2} - 2x = -\frac{3}{4}(2x+1) - \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}.$$

Thay vào phương trình i) ta được

$$f(x-1) = 2x - \frac{x-5}{2} + 2x = \frac{7}{2}(x-1) + 6 \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x + 6$$

Vậy $f(x) = \frac{7}{2}x + 6$, $g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

**Câu 5.**

Ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6\\ &= 7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^6)\\ &= 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2.\end{aligned}$$

Kết hợp với i), ii) ta được $a^2 + ab + b^2 \vdots 7^3$.

Ta có : $(a+b)^2 > a^2 + ab + b^2 \geqslant 7^3 = 343$

$\Rightarrow a + b \geqslant \left[\sqrt{343}\right] = 18.$

Thử lại với $a = 1, b = 18$ ta thấy thỏa mãn

Vậy $(a; b) = (1; 18)$.

**Câu 6.**

Mỗi dãy con 10 được biểu thị bằng 1 dấu * thì còn lại 4 vị trí để đặt các số 0 và 1 ở trước hai dấu * đó, hoặc giữa hai dấu * hoặc sau hai dấu *, chẳng hạn $01\overset{*}{\overbrace{10}}0\overset{*}{\overbrace{1}}01$

Chú rằng trong mỗi nhóm các số 0 và 1 còn lại này nếu đã có số 1 thì bên phải của nó không thể đặt số 0 mà phải đặt số 1. Như vậy mỗi dãy con phải có dạng: $0^m|1^n * 0^p|1^q * 0^r|1^s$ (1)

Với $m + n + p + q + r + s = 4$, m, n, p, q, r, s là các số tự nhiên.

Dấu gạch đứng | ngăn cách 0 và 1 trong mỗi nhóm (có tất cả 3 dấu |). Độ dài của dãy (1) (gồm các chữ số 0,1 và các dấu | và *) là 9. Các dãy khác nhau tùy vào vị trí sắp xếp của 5 kí tự dấu: | * | * | trong dãy độ dài 9 đó.

Vậy số các dãy khác nhau là: $C_9^5 = 126$.

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẠC LIÊU

**Câu 1.**

Xét hệ: $\begin{cases} xy^4 + y^3 + y^2 + 5x = y^5 + xy^2 + y(x+5) & (1) \\ \sqrt{2y^2 - 6x + 8} + 2 \leqslant \sqrt{x} + 2013x - 2012y & (2) \end{cases}$

Điều kiện $x \geqslant 0;\ 2y^2 - 6x + 8 \geqslant 0$

$(1) \Leftrightarrow (x-y)(y^4 - y^2 - y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[(y^2-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow x = y.$

Thay $x = y$ vào (2), ta được: $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} \leqslant \sqrt{x} + x - 2$

Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$, bất phương trình trở thành: $\sqrt{2u^2 + 2v^2} \leqslant u + v$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geqslant 0 \\ (u-v)^2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy nghiệm của hệ là (4; 4)

**Câu 2.**

Ta có $5u_{n+1}u_n^4 - 4u_n^5 = 30$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(4u_n + \frac{30}{u_n^4}\right), \quad \forall n \geqslant 2.$$

Từ cách xác định của dãy, ta có $(u_n)$ là dãy số dương

Mặt khác

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(4u_n + \frac{30}{u_n^4}\right) = \frac{1}{5}\left(u_n + u_n + u_n + u_n + \frac{30}{u_n^4}\right) \geqslant \sqrt[5]{30} \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Do đó $u_n \geqslant \sqrt[5]{30}$ với mọi $n \geqslant 2$. (1)

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{5}\left(4x + \frac{30}{x^4}\right)$ trên $\left[\sqrt[5]{30};+\infty\right)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{30}{x^5}\right) \leqslant \frac{4}{5}\left(1 - \frac{30}{30}\right) = 0 \text{ trên } \left[\sqrt[5]{30};+\infty\right).$$

Suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\sqrt[5]{30};+\infty\right)$.

nên $\max f(x) = f\left(\sqrt[5]{30}\right) = \sqrt[5]{30}$. Mà $u_{n+1} = f(u_n)$ nên $u_n \leqslant \sqrt[5]{30}$ (2)

Kết hợp (1) và (2), ta có $\sqrt[5]{30} \leqslant u_n \leqslant \sqrt[5]{30}$.

Vậy $\lim u_n = \sqrt[5]{30}$.

**Câu 3.**

Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

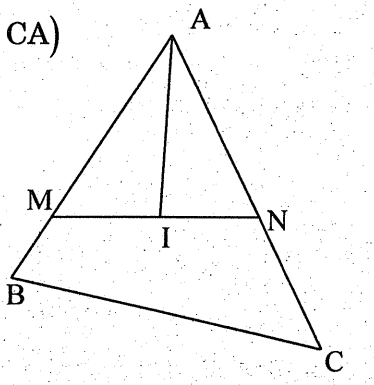
Ta có: MN đi qua I $\Leftrightarrow S_{IAM} + S_{IAN} = \frac{S_{SAM}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}rAM + \frac{1}{2}rAN = \frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.AC}{AN} + \frac{AB.AC}{AM} = AB + BC + CA$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{AN} + \frac{AC.BM}{AM} = BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} = 1.$$



Theo bất đẳng thức AM – GM

$$1 = \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} \geqslant 2\sqrt{\frac{AB.CN}{BC.AN}.\frac{AC.BM}{BC.AM}}.$$

Suy ra $P = \frac{BM.CN}{AM.AN} \leqslant \frac{BC^2}{4AB.AC}$ hay $P \leqslant \frac{25}{84}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB.CN}{BC.AN} = \frac{AC.BM}{BC.AM} = \frac{1}{2}$.

hay $\frac{AM}{BM} = 2\frac{AC}{BC} = \frac{14}{5}$ và $\frac{AN}{CN} = 2\frac{AB}{BC} = \frac{6}{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{25}{84}$ khi $\frac{AM}{BM} = \frac{14}{5}$ và $\frac{AN}{CN} = \frac{6}{5}$.

**Câu 4.**

Giả sử có $y_1$ và $y_2$ mà $f(y_1) = f(y_2)$. Khi đó với mọi x, ta có

$$f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2)) \Leftrightarrow f(x) + y_1 = f(x) + y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

Do đó f là đơn ánh.

Thay y = 0, ta được f(x +f(0)) = f(x) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lại thay x = 0, ta được f(f(y)) = f(0) + y hay f(f(x)) = x + f(0) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay x bởi f(x), ta được:

f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y = x + y + f(0) = f(f(x + y)).

Vì f đơn ánh nên f(x + y) = f(x) + f(y) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Vì f đơn điệu và cộng tính trên R nên f(x) = kx với mọi x $\in$ và k tùy ý

Thay biểu thức của f(x) vào hệ thức $f(x + f(y)) = f(x) + y$, ta được

$$f(x + f(y)) = f(x + ky) = kx + k^2y$$

Lại có $f(x) + y = kx + y$

Vì thế $f(x + f(y)) = f(x) + y \Leftrightarrow kx + k^2y = kx + y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$

hay $k = \pm 1$.

Suy ra f(x) = x hoặc f(x) = –x. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy f(x) = x hoặc f(x) = –x.

**Câu 5.**

Ta có $30x^4 - 3x^2 - 7y^2 - 14x^2y^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (15x^2 - 7y^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 - 7y^2 - 9 = 0 \ (1)$$

Giả sử (1) có nghiệm nguyên $(x_0, y_0)$. Ta có:

$$15x_0^2 - 7y_0^2 - 9 = 0 \Rightarrow 15x_0^2 - 7y_0^2 = 9 \Rightarrow 7x_0^2 \vdots 3 \Rightarrow y_0^2 \vdots 3 \Rightarrow y_0 \vdots 3$$

hay $y_0 = 3m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, ta được $5x_0^2 - 21m^2 = 3 \Rightarrow 5x_0^2 \vdots 3 \Rightarrow x_0^2 \vdots 3 \Rightarrow x_0 \vdots 3$

hay $x_0 = 3n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $15n^2 - 7m^2 = 1$ hay $15n^2 = 7m^2 + 1 \Rightarrow (7m^2 + 1) \vdots 5$

Mặt khác với mọi $m \in \mathbb{Z}$ thì $m^2$ tận cùng bởi 0, 1, 4, 5, 6, 9

$\Rightarrow 7m^2$ tận cùng bởi 0, 7, 8, 5, 2, 3

$\Rightarrow 7m^2 + 1$ tận cùng bởi 1, 8, 9, 6, 3, 4

Do đó $7m^2 + 1$ không thể chia hết cho 5. Cho nên (1) không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

**Câu 6.**

Gọi A là một điểm trong 2013 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính bằng 1, kí hiệu là (A, 1).

Trường hợp 1: Nếu tất cả 2012 điểm còn lại đều nằm trong đường tròn (A, 1) thì bài toán được giải quyết.

Trường hợp 2: Giả sử B là điểm nằm ngoài đường tròn (A, 1). Khi đó AB > 1. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính bằng 1, kí hiệu (B, 1).

Gọi C là điểm thứ ba trong 2001 điểm còn lại. Ta có A, B, C là ba điểm bất kì nên theo giả thiết BC < 1 hoặc AC < 1. Do đó C nằm trong (A, 1) hoặc C nằm trong (B, 1).

Suy ra hai đường tròn (A, 1); (B, 1) chứa tất cả 2013 điểm đã cho.

Mà 2013 = 2.1006 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet thì một trong hai đường tròn này sẽ chứa 1006 điểm đã cho.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG BÌNH DƯƠNG

**Câu 1.**

Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, với mọi *x*.

Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$.

Đặt $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$

(có thể viết điều kiện $y \geqslant 0$ hoặc chính xác hơn là $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$),

Ta có phương trình trở thành: $2y^2 - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0$,

Ta được $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (loại $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

**Câu 2.**

Ta có: $x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2 = (x_n - a)^2 + x_n \geqslant x_n, \forall n > 1$.

Vậy dãy $(x_n)$ là dãy đơn điệu tăng. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, chuyển sang giới hạn ta thu được phương trình:

$$l = (l-a)^2 + l \Rightarrow l = a$$

Nếu tồn tại k để $x_k > a$ thì $x_n > a, \forall n \geqslant k$.

Điều đó kéo theo dãy đã cho không có giới hạn.

Giả sử $x_n \leqslant a, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó: $(x_n - a)^2 + x_n \leqslant a$ hay $a - 1 \leqslant x_n \leqslant a$ thì:

$$x_{n+1} = (x_n - a)^2 + x_n \leqslant (a - x_n) + x_n = a.$$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì điều kiện cần và đủ là: $a - 1 \leqslant b \leqslant a$

và khi đó: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

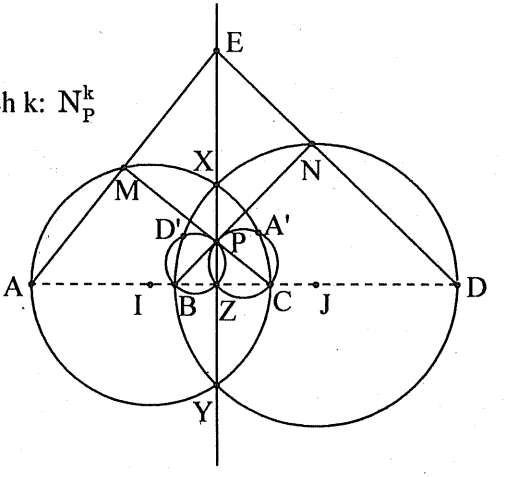
**Câu 3.**

Ta có P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (AC) và (BD).

Suy ra: $P_{P/(AC)} = P_{P/(BD)} = k$

Khi đó: $\overline{PC}.\overline{PM} = \overline{PB}.\overline{PN} = k$

Xét phép nghịch đảo cực P, phương tích k: $N_P^k$




Qua $N_P^k$ thì:

$M \longleftrightarrow C$

$N \longleftrightarrow B$

$A \longleftrightarrow A'$

$D \longleftrightarrow D'$

$XY \longleftrightarrow XY$

Suy ra:

$AM \xleftrightarrow{N_P^k} (PA'C)$ và $DN \xleftrightarrow{N_P^k} (PD'B)$ (như hình vẽ)

Do đó để chứng minh AM, DN, XY đồng quy, ta sẽ chứng minh XY là trục đẳng phương của hai đường tròn (PA' C) và (PD' B).

Ta có: $\widehat{PZC} = \widehat{PZB} = 90^0$ nên Z là giao điểm của hai đường tròn (PA' C) và (PD' B). Do đó, PZ ≡ XY.

Suy ra XY là trục đẳng phương của hai đường tròn (PA' C) và (PD' B). Do đó, AM, DN, XY đồng quy.

**Câu 4.**

Tìm nghiệm riêng: $f(x) = c \Leftrightarrow c = 0$. Thỏa mãn đề bài. Giả sử $f(x) \neq 0$

Cho x = y = 0 ta được $f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Cho x =1; y = –1 ta được $f(1)[1 + f(-1)] = 0$

Xét f(1) = 0, ta thay y = 1, x tùy ý ta được $f(x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(1) = a \neq 0$ khi đó $f(-1) = -1$.

Cho y =1 và x tùy ý vào (1) ta được $f(x+1) = af(x) + a$. (2)

Thay y bởi y +1 vào (1) và kết hợp (2) ta được $f(xy + x) = f(x) + af(xy)$ (3)

Cho y = – 1 vào (3) ta được:

$$f(-x) = -\frac{1}{a}f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = f(1) = -\frac{1}{a}f(-1) = \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow a = \pm 1$.

Với a = –1: Cho y =1 vào (3) ta được $f(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vô lí.

Với a = 1: Khi đó $f(x + xy) = f(x) + f(xy)$ (4)

hay $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Mà f(x) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và f(1) = 1 nên ta tìm được f(x) = x

Thử lại ta thấy hai hàm số $f(x) = 0; f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.**

Đặt A = a + 1; B = b + 2; C = c + 3.

Bài toán trở thành: Chứng minh rằng nếu A + B + C chia hết cho 30 thì $A^5 + B^5 + C^5$ chia hết cho 30.

Ta có: 30 = 2.3.5 và 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau.

Theo định lí Fermat: $A^2 \equiv A \pmod 2$

$\Rightarrow A^4 \equiv A^2 \equiv A \pmod 2 \Rightarrow A^5 \equiv A^2 \equiv A \pmod 2$;

$A^3 \equiv A \pmod 3 \Rightarrow A^5 \equiv A^3 \equiv A \pmod 3$;

$A^5 \equiv A \pmod 5$.

Theo tính chất của phép đồng dư, ta có:

$A^5 + B^5 + C^5 \equiv A + B + C \pmod 2$

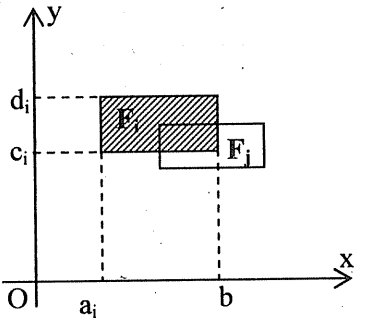
$A^5 + B^5 + C^5 \equiv A + B + C \pmod 3$

$A^5 + B^5 + C^5 \equiv A + B + C \pmod 5$

Do đó $A^5 + B^5 + C^5 \equiv A + B + C \pmod{2.3.5}$. Tức là nếu $A + B + C$ chia hết cho 30 thì $A^5 + B^5 + C^5$ chia hết cho 30.

Ta có điều cần chứng minh.

**Câu 6.**




Ta chiếu các hình chữ nhật này lên hai trục tọa độ Ox và Oy ta có sự tương ứng 1 – 1 sau:

$$F_i \longleftrightarrow \begin{cases} [a_i, b_i] \subset Ox \\ [c_i, d_i] \subset Oy \end{cases}$$

Như vậy ta có họ các đoạn thẳng $[a_i, b_i] \subset Ox$, họ các đoạn thẳng $[c_i, d_i] \subset Oy$, $\forall i = \overline{1...n}$.

Do $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ với mọi $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,...,n\}$ nên $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \varnothing$ với $i,j \in \{1,2,...,n\}$.

Từ đó, theo định lí Kelli thì $\bigcap_i^n [a_i, b_i] \neq \varnothing$. Suy ra, tồn tại $a^* \in \bigcap_i^n [a_i, b_i]$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được sự tồn tại của $b^* \in \bigcap_i^n [c_i, d_i]$.

Điều này chứng tỏ rằng $F^* = (a^*; b^*) \in \bigcap_{i=1}^n F_i$.

Vậy, nếu hai hình bất kì trong chúng có giao khác rỗng thì cả họ n hình chữ nhật trên có giao khác rỗng.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE - BẾN TRE

**Câu 1.**

Hệ phương trình viết lại: $\begin{cases} 16x^2 + y^4 - 8xy^3 - 1 = 0 & (1) \\ 2 + 8xy - 16x^2 - 2y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) cộng (2) ta có:

$$y^4 - 8xy^3 - 2y^2 + 8xy + 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 - 8xy(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 1 - 8xy) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm 1 \\ 8xy = y^2 - 1 \end{array}\right.$$

- Nếu $y = -1$ thay vào (1) ta có $16x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{1}{2}$

- Nếu y = 1 thay vào (1) ta có $16x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$

- Nếu $8xy = y^2 - 1$ thì do y = 0 không thỏa mãn hệ nên $x = \frac{y^2 - 1}{8y}$

Thay vào (1) ta có: $16\left(\frac{y^2-1}{8y}\right)^2 + y^4 - 8\left(\frac{y^2-1}{8y}\right)y^3 - 1 = 0$

Khai triển và rút gọn ta có: $5y^3 - 6y + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{(5y^2-1)(y-1)(y+1)}{y} = 0$

Giải phương trình này ta có: $y = \pm 1$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Thay vào (1) tìm được x, thử lại ta có nghiệm của hệ là:

$$(x; y) = \left(-\frac{1}{2};-1\right), \left(\frac{1}{2};1\right), (0;-1), (0;1), \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

**Câu 2.**

* Ta có $2x_n.x_{n-1} = x_{n-1}^2 + 4$. Do $x_1 = 2013 > 0$ nên bằng phương pháp quy nạp ta có $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

* Vậy $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{4}{x_{n-1}})$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{4}{x_{n-1}}) \geqslant 2$. Vậy dãy số $(x_n)$ bị chặn dưới bởi số 2.

* Ta có: $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{4}{x_{n-1}^2})$, do $x_n \geqslant 2, \forall n$ nên $\frac{4}{x_{n-1}^2} \leqslant 1$.

Vậy $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{4}{x_{n-1}^2}) \leqslant 1$.

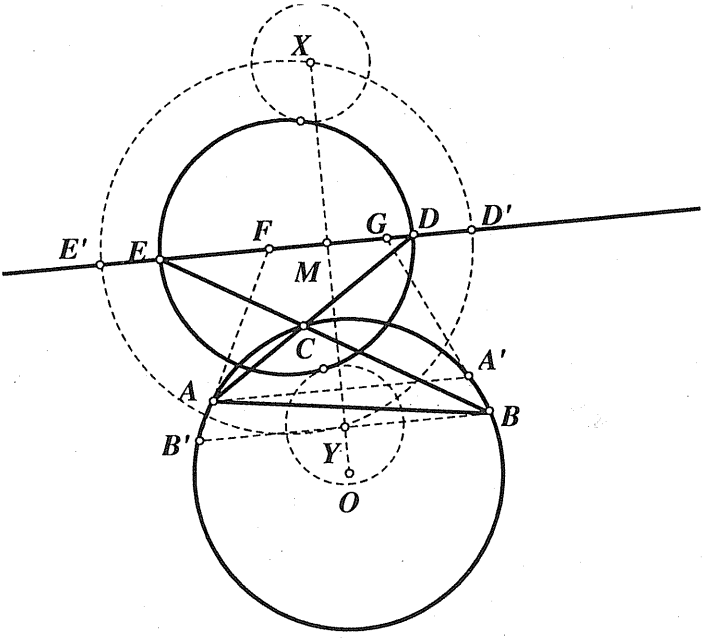
Suy ra $x_n \leqslant x_{n-1}, \forall n$ nên dãy số $(x_n)$ là dãy giảm.

* Tóm lại dãy số $(x_n)$ giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.

* Gọi $a = \lim x_n$, ta có $\begin{cases} a \geqslant 2 \\ a = \frac{1}{2}(a + \frac{4}{a}) \end{cases}$. Giải hệ này ta được a = 2.

Vậy $\lim x_n = 2$.

**Câu 3.**




Gọi $M$ là hình chiếu của $O$ lên $d$ và A', B' lần lượt là điểm đối xứng với A, B qua đường thẳng OM. Giả sử AB', A'B cắt $d$ theo thứ tự tại F, G thì F, G cố định.

Gọi $X, Y$ là các điểm cố định trên đường thẳng $OM$ sao cho

$$MX^2 = MY^2 = FA \cdot GB.$$

Theo tính chất đối xứng thì $M$ chính là trung điểm của $FG$ và

$$GA' = FA, GB = FB' \text{ và } AA', BB' \text{ song song với } d.$$

Đặt $MF = MG = a$.

Ta có: $\widehat{GBE} = \widehat{A'BC} = \widehat{A'AC} = \widehat{FDA}$.

Tương tự: $\widehat{GEB} = \widehat{FAD}$. Suy ra $\Delta GBE \backsim \Delta FDA$ (g.g)

Do đó: $GE \cdot FD = GB \cdot FA = MX^2 = MY^2$.

Theo tính chất phương tích thì đường tròn đường kính $D'E'$ đi qua $X, Y$.

Do $DD' = EE' = a$ nên các đường tròn đường kính $DE, D'E'$ đồng tâm. Suy ra đường tròn đường kính $DE$ tiếp xúc với hai đường tròn cố định có tâm là $X, Y$ và bán kính bằng $a$.

Ta có điều phải chứng minh.

**Câu 4.**

Trong (1), thay x bởi f(y) ta được:

$$f(0) = f(f(y)) - 2f^2(y) + f(f(y)) - 2$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 2f(f(y)) - 2f^2(y) - 2$$

$$\Leftrightarrow f(f(y)) = f^2(y) + \frac{f(0)+2}{2} \qquad (2)$$

Trong (1), thay x bởi f(x) và kết hợp với (2) ta được:

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=f(f(y))-2f(x)f(y)+f(f(x))-2$$

$$\Rightarrow f\big(f(x)-f(y)\big)=f^2(y)+\frac{f(0)+2}{2}-2f(x)f(y)+f^2(x)+\frac{f(0)+2}{2}-2$$

$$\Rightarrow f\big(f(x)-f(y)\big)=\big(f(x)-f(y)\big)^2+f(0) \qquad (3)$$

Do $f(x)\equiv 0$ không là nghiệm (1), nên $\exists y_0\in\mathbb{R}: f(y_0)\neq 0$

Từ (1), ta có:

$$f(x-f(y_0))-f(x)=-2xf(y_0)+f(f(y_0))-2\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì vế phải là hàm bậc nhất theo nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Do đó f là một toàn ánh.

Khi đó (2) và (3) được viết lại:

$$f(x)=x^2+\frac{f(0)+2}{2};$$

$$f(x)=x^2+f(0).$$

Từ hai đẳng thức trên cho ta f(0) = 2. Suy ra: $f(x)=x^2+2$.

Thử lại: Thay $f(x)=x^2+2$ vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}\big(x-f(y)\big)^2+2&=f^2(y)-2xf(y)+x^2+2\\&=f^2(y)-2xf(y)+x^2+2\end{aligned}\quad\text{(đúng)}$$

Kết luận: $f(x)=x^2+2$ thỏa mãn yêu câu bài toán.

**Câu 5.**

Đặt $f(n)=n^3-5n^2+676n+m$. Ta chứng minh tồn tại a, b nguyên để

$f(n)\equiv(n+2a)^3+b\,(\text{mod}\,2003)$.

$f(n)\equiv(n+2a)^3+b\,(\text{mod}\,2003)$

$\Leftrightarrow n^3-5n^2+676n+m\equiv n^3+6an^2+12a^2n+8a^3+b\ (\text{mod } 2003)$

Chọn a nguyên sao cho $6a\equiv -5(\text{mod}2003)\Leftrightarrow 6a\equiv 1998\ (\text{mod } 2003)$

$\Leftrightarrow a\equiv 333(\text{mod } 2003)$

Khi đó $12a^2\equiv 12.333^2\ (\text{mod } 2003)\Leftrightarrow 12a^2\equiv 676(\text{mod } 2003)$.

Do đó chỉ cần chọn $b\equiv m-8a^3\ (\text{mod } 2003)$.

Suy ra $f(n)\equiv(n+2a)^3+b\ (\text{mod } 2003)$ với

$a\equiv 333\ (\text{mod } 2003), b\equiv m-8a^3\ (\text{mod } 2003)$.

Ta chứng minh với mọi i, j nguyên ta có

$f(i)\equiv f(j)\ (\text{mod } 2003)\Leftrightarrow i\equiv j\ (\text{mod } 2003)$.

Với mọi i, j nguyên ta có

$f(i) \equiv f(j) \pmod{2003} \Leftrightarrow (i+2a)^3 \equiv (j+2a)^3 \pmod{2003}$.

**Trường hợp** $(j+2a,2003) = 1$ và $(I+2a,2003) = 1$

Ta có $(i+2a)^{3.667}.(j+2a)^2 \equiv (j+2a)^{2003} \pmod{2003}$

Do $(j+2a,2003) = 1$ và 2003 nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có

$(j+2a)^{2002} \equiv 1 \pmod{2003}$.

$\Rightarrow (i+2a)^{3.667}.(j+2a)^2 \equiv (j+2a) \pmod{2003}$ (1)

$\Rightarrow (j+2a)^2 \equiv (i+2a)^{3.667}.(j+2a)^3 \pmod{2003}$

$\equiv (i+2a)^{2004} \pmod{2003} \equiv (i+2a)^2 \pmod{2003}$

$\Rightarrow (i+2a)^{3.667}.(j+2a)^2$

$\equiv (i+2a)^{3.667}.(i+2a)^2 \pmod{2003} \equiv (i+2a) \pmod{2003}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $i \equiv j \pmod{2003}$

**Trường hợp** $(j+2a) \vdots 2003$

$\Rightarrow (j+2a)^3 \vdots 2003 \Rightarrow (i+2a)^3 \vdots 2003 \Rightarrow (i+2a) \vdots 2003$

$\Rightarrow i \equiv j \pmod{2003}$

**Trường hợp** $(i+2a) \vdots 2003$ tương tự

Từ đó suy ra $f(i) \equiv f(j) \pmod{2003} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{2003}$

$\Rightarrow$ Tập $\{f(1), f(2), \ldots, f(2003)\}$ là hệ thặng dư đầy đủ theo (mod 2003)

$\Rightarrow$ tồn tại $n \in \{1,2,\ldots,2003\}$ sao cho $f(n) \vdots 2003$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Câu 6.**

Với $(i,j,0) \in S_z$, đặt $T_{ij} = \{(i,j,z) \mid (i,j,z) \in S\}$

Khi đó ta có $S = \bigcup_{(i,j,0)\in S_z} T_{ij}$

và $|S|^2 = \left|\bigcup_{(i,j,0)\in S_z} T_{ij}\right|^2 = \left(\sum_{(i,j,0)\in S_z} |T_{ij}|\right)^2 \leqslant \sum_{(i,j,0)\in S_z} 1. \sum_{(i,j,0)\in S_z} |T_{ij}|^2 = |S_z|. \sum_{(i,j,0)\in S_z} |T_{ij}|^2$

Xét tập $V = \bigcup_{(i,j,0)\in S_z} (T_{ij} \times T_{ij})$

với $T_{ij} \times T_{ij} = \{((i,j,t_1),(i,j,t_2)) \mid (i,j,t_k) \in S, k = 1; 2\}$

Ta có $|V| = \left|\bigcup_{(i,j,0)\in S_z} (T_{ij} \times T_{ij})\right| = \sum_{(i,j,0)\in S_z} |T_{ij} \times T_{ij}| = \sum_{(i,j,0)\in S_z} |T_{ij}|^2$

Ta định nghĩa ánh xạ như sau:

$f : V \to S_x \times S_y$

$\left((i,j,t_1),(i,j,t_2)\right) \mapsto \left((0,j,t_1),(i,0,t_2)\right)$

Ta chứng minh được f là đơn ánh:

Giả sử $\left((0,j,t_1),(i,0,t_2)\right) = \left((0,j',t_1'),(i',0,t_2')\right) \Rightarrow \begin{cases}(0,j,t_1) = (0,j',t_1') \\ (i,0,t_2) = (i',0,t_2')\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} j = j', t_1 = t_1' \\ i = i', t_2 = t_2' \end{cases} \Rightarrow \left((i,j,t_1),(i,j,t_2)\right) = \left((i',j',t_1'),(i',j',t_2')\right)$ nên f là đơn ánh.

Suy ra $|V| \leqslant |S_x \times S_y| = |S_x| . |S_y|$.

Vậy ta có điều phải chứng minh $|S|^2 \leqslant |S_x|.|S_y|.|S_z|$.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT KIÊN GIANG

**Câu 1.**

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ y + x = 3x^3 + 2x^2 + x \\ z + y = 3y^3 + 2y^2 + y \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t, t \in \mathbb{R}$, ta thấy

$f'(t) = 9t^2 + 4t + 1 > 0\ \forall t$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ phương trình ở trên có dạng: $\begin{cases} x + z = f(z) \\ y + x = f(x) \\ z + y = f(y) \end{cases}$

Do hệ phương trình hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $x = \max\{x;y;z\}$

Khi đó: $x \geqslant z \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(z)$, tức là $y + x \geqslant x + z \Leftrightarrow y \geqslant z$

Suy ra $f(y) \geqslant f(z) \Leftrightarrow z + y \geqslant x + z \Leftrightarrow y \geqslant x$

mà $x = \max\{x;y;z\}$ nên $x = y$.

Suy ra $f(y) = f(x) \Leftrightarrow y + z = y + x \Leftrightarrow x = z$.

Vậy $x = y = z$, thay vào hệ ta có $3x^3 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(-1;-1;-1), (0;0;0), \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

**Câu 2.**

+) Xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2} = \dfrac{2(x_n - 2)}{x_n + 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}$ (1)

Do $x_1 = 2{,}1 > 2$ nên $x_2 > x_1$, bằng phương pháp quy nạp ta được $(x_n)$ là dãy tăng.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ (a>2), thế vào ta được:

$$a = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 + 8a - 4}}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{ (vô lí)}$$

Vậy khi $n \to +\infty$ thì $x_n \to +\infty$. (3)

+) Ta lại có: $x_{n+1} + 2 = \dfrac{x_n + 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - 2}{x_{n+1} + 2} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1} - 2 - x_n + 2}{(x_n - 2)(x_{n+1} - 2)} = \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2}$$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4} = \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 10 - \frac{1}{x_{n+1} - 2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_{i+1}^2 - 4} = \lim\limits_{n\to+\infty} (10 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}) = 10$.

**Câu 3.**

+ Gọi H đối xứng với D qua I; PQ là tiếp tuyến với (I) tại H; $(P \in AB, Q \in AC)$

Ta chứng minh A, H, K thẳng hàng.

Thật vậy:

Gọi $\{K'\} = AH \cap BC$, ta có tam giác PHI đồng dạng với tam giác IDB

$\Rightarrow \dfrac{PH}{ID} = \dfrac{IH}{DB}$

$\Rightarrow PH.DB = IH.ID = r^2$

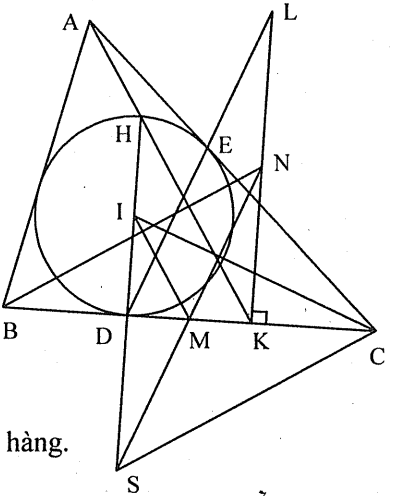
Tương tự:

$QH.DC = r^2$

$\Rightarrow PH.DB = QH.DC$

$\Rightarrow \dfrac{PH}{DC} = \dfrac{QH}{PB} = \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PH}{BK'}$

$\Rightarrow BK' = CD$




Mà $BK = CD \Rightarrow K' \equiv K$ Hay A, K, H thẳng hàng.

+ Gọi S đối xứng với N qua M, do

$\Delta MDS = \Delta MKN\,(c-g-c)$ mà $\widehat{NKM} = 90^0$ nên I, D, S thẳng hàng.

+ Mặt khác: $\Delta BKN = \Delta CDS\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{NBK} = \widehat{DCS} \Rightarrow BN \,//\, SC$.

+ Dễ thấy $DL \parallel SN$ mà $DL \perp IC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), suy ra $SN \perp IC$ hay $SM \perp IC$. Như vậy M là trực tâm của tam giác ICS.

Suy ra $IM \perp SC$. Vậy $AK \perp BN$.

**Câu 4.**

Ta có $f_1(x) = -\dfrac{2(x+2013)+7}{x+2013+3}$, đặt $t = x + 2013$ khi đó

$$f_1(t-2013) = -\frac{2t+7}{t+3} = -2 - \frac{1}{t+3}$$

$$f_2(t-2013) = f_1(f_1(t-2013))$$

$$= -2 - \frac{1}{f_1(t-2013)+3} = -2 - \frac{1}{1-\dfrac{1}{t+3}} = -3 - \frac{1}{t+2}$$

$$f_3(t-2013) = f_1(f_2(t-2013))$$

$$= -2 - \frac{1}{f_2(t-2013)+3} = -2 - \frac{1}{\dfrac{1}{t+2}} = t$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f_{3n}(t-2013) = t \;\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ và } t \notin \{-2;-3\}$$

Hay $f_{3n}(x) = x + 2013$. Do đó $f_{2013}(2012) = 4025$.

**Câu 5.**

Ta có $2010^x \geqslant 1, 2011^y \geqslant 1 \ \forall x, y \in \mathbb{N}$.

suy ra $2010^x + 2011^y \geqslant 2$ nên $2012^z \geqslant 2$.

Tức là $z \geqslant 1$ và $2012^z$ là số chẵn.

Hơn nữa $2011^y$ là số lẻ nên $2010^x$ là số lẻ kéo theo $x = 0$ và $2010^x = 1$.

Ta đưa về xét các số tự nhiên $y, z$ thỏa mãn $1 + 2011^y = 2012^z$. (2)

- Nếu $z = 1$ thì $1 + 2011^y = 2012$ suy ra $y = 1$ thỏa mãn.
- Nếu $z \geqslant 2$ ta sẽ chứng minh (2) vô nghiệm
- Ta có $2012^z = 4^z.503^z$ chia hết cho 8 và $2011 = 8k + 3$ với $k = 251$.

+ Khi $y = 2n$ thì $2011^y = (8k+3)^{2n} = (8h+1)^n = 8t + 1$, với n, h, t là các số nguyên dương, suy ra $1 + 2011^y = 8t + 2$ không chia hết cho 8.

+ Khi $y = 2n + 1$ thì

$2011^y = (8k+3)^{2n+1} = (8k+3)^{2n}.(8k+3) = (8t+1)(8k+3) = 8s + 3$, với s là số nguyên dương suy ra $1 + 2011^y = 8s + 4$ không chia hết cho 8.

Vậy có 1 bộ nghiệm tự nhiên duy nhất $(x;y;z) = (0;1;1)$.

**Câu 6.**

Gọi $P_i$ ( $i = 1,..,7$) là 7 đa giác cùng có diện tích bằng 1 và V là hình vuông có diện tích bằng 4 chứa 7 đa giác đó.

Giả sử không có hai đa giác nào mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn $\frac{1}{7}$, tức là $S_{P_i \cap P_j} < \frac{1}{7} \ \forall i, j$.

Ta có $S_{P_i \cup P_j} = S_{P_i} + S_{P_j} - S_{P_i \cap P_j} > 1 + 1 - \frac{1}{7} = \frac{13}{7}$.

Ta lại có $S_{P_1 \cup P_2 \cup P_3} = S_{P_1 \cup P_2} + S_{P_3} - S_{(P_1 \cup P_2) \cap P_3} > \frac{13}{7} + 1 - \frac{2}{7} = \frac{18}{7}$

Khi đó $S_{P_1 \cup P_2 \cup ... P_7} > 7 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}\right) = 4$ (vô lí)

Vậy có ít nhất hai đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{7}$.p.

# Phần III

## PHỤ LỤC ĐỀ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4, LẦN XIX – NĂM 2013 KHÔNG ĐÁP ÁN

## A. LỚP 10

### TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU ĐỒNG THÁP

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases}(x+7y)\sqrt{x}+(y+7x)\sqrt{y}=8\sqrt{2xy(x+y)}\\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2x-1}=y^2-2x-1\end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng DE, CF và DF, BE; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Chứng minh rằng hai đường thẳng OA và MN vuông góc với nhau.

**Câu 3.**

Cho a, b, c là ba số dương và $2(ab + bc + ac) = 3abc$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^3+1}+1}+\frac{b^2}{\sqrt{b^3+1}+1}+\frac{c^2}{\sqrt{c^3+1}+1}\geqslant 3.$$

**Câu 4.**

Giả sử phương trình $x^3 + ax^2 + c = 0$ với các hệ số nguyên a, b, c có 3 nghiệm nguyên $x_1, x_2, x_3$ sao cho $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho 3.

Chứng minh rằng $a + b + c + 1$ chia hết cho 3.

**Câu 5.**

Có bao nhiêu cách sắp k người vào n toa tàu $(k \geqslant n; n \in \mathbb{N}^*)$ sao cho mỗi toa đều có người?

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ sao cho với mọi số hữu tỉ $x > 0$ ta có:

$$\begin{cases}f(x+1)=f(x)+1\\ f(x^2)=(f(x))^2\end{cases}$$

# TRƯỜNG THPT TRẦN QUỐC TUẤN - KON TUM

**Câu 1.**

Giải phương trình: $3\left(x^2+4x+5\right)=10\sqrt{x^3+5x^2+9x+6}$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi BE và CF là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$BE \perp CF \Leftrightarrow \cot A = 2\left(\cot B + \cot C\right).$$

**Câu 3.**

Cho ba số thực $x, y, z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=12(x+y+z)-10(xy+yz+zx)+2013$.

**Câu 4.**

Tìm đa thức $f(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$2f(x)+f(1-x)=x^2$$

**Câu 5.**

Tìm số nguyên a sao cho đa thức $f(x)=x^{13}+x+90$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2-x+a$.

**Câu 6.**

Ba đống sỏi có 51, 49 và 5 viên. Ta thực hiện một trong hai nước đi như sau: Một nước đi là dồn 2 đống tùy ý thành 1 đống; nước đi khác là chọn đống có số chẵn viên sỏi để chia thành 2 đống bằng nhau. Hỏi có thể thực hiện một dãy các nước đi như thế để chia 3 đống sỏi thành 105 đống mà mỗi đống chỉ có 1 viên sỏi hay không?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT - QUẢNG NGÃI

**Câu 1.**

Cho $x, y, z \in [0,5; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$3(yz+zx+xy)-x-y-z-7xyz.$$

**Câu 2.**

Cho 20 số nguyên dương $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ với $x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$.

Kí hiệu: $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_{20}\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con của X có dạng $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$, $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_k\}$ với $0 < k < 8$ và thỏa mãn ba điều kiện sau

i) $A \cap B = \varnothing$.

ii) $\{x_i; x_{i+1}\} \not\subset A$, $\{x_i; x_{i+1}\} \not\subset B$ với mọi $i = 1; 2; 3; \ldots; 19$.

iii) $\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{b_i}\right| < \frac{2}{3431}$.

**Câu 3.**

Cho p là số nguyên tố lẻ và hàm f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi

$$f(1) = \frac{p(p-1)}{2} \text{ và } (1-n)f(n) - \frac{1-n^{p-1}}{1-n} - (p-1)n^{p-1} \text{ với mọi } n \neq 1.$$

Với mọi số nguyên a, chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên m thỏa mãn $[f(m) - a^{2013}]$ chia hết cho p.

**Câu 4.**

Dãy $(a_n)$ được gọi là tuần hoàn từ chỉ số $n_0$ nếu tồn tại số nguyên dương T thỏa mãn $a_{n+T} = a_n$ với $\forall\, n \geqslant n_0$. T được gọi là chu kì của dãy, số $T_0$ nhỏ nhất trong các số T được gọi là chu kì cơ sở của dãy

Cho hàm f: $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $f(n) = (\sum_{i=1}^{k} a_i^m)^s$ nếu $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ trong đó m, s là hai số nguyên dương cho trước. Xét dãy $(x_n)$ xác định bởi: $x_0 = a \in \mathbb{N}^*$, $x_k = f(x_{k-1})$ với $\forall\, k \geqslant 1$.

1) Chứng minh rằng dãy $(x_n)$ tuần hoàn.

2) Với m = 1, s = 2, $a = 2^{2007}$, tìm chu kì cơ sở của dãy.

**Câu 5.**

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{2010} \frac{k^{2011} - k}{2011} \equiv 1006 \pmod{2011}$.

**Câu 6.**

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và với mọi điểm M nằm trong tam giác đó (không thuộc các cạnh của tam giác) ta có bất đẳng thức:

$$\frac{MA.MB + MA.MC + MB.MC}{MA_1.MB_1 + MA_1.MC_1 + MB_1.MC_1} \leqslant \frac{MA.MB.MC}{2MA_1.MB_1.MC_1}.$$

Trong đó $A_1$, $B_1$, $C_1$ là hình chiếu vuông góc của M lên BC, CA, AB.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG LÊ KHA TÂY NINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)^3 = z & (1) \\ (y+z)^3 = x & (2) \\ (z+x)^3 = y & (3) \end{cases}$

**Câu 2.**

Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác nhọn ABC. (C) là đường tròn tâm I và nằm trong tam giác ABC. D, E, F theo thứ tự là các giao điểm của đường tròn (C) với các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

**Câu 3.**

Cho các số thực dương a, b, c.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geqslant 2(ab + bc + ca)$.

**Câu 4.**

Giải phương trình: $y^2 = x^3 + x$, với x, y là các số nguyên.

**Câu 5.**

Trên mặt phẳng cho 10 đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường thẳng nào song song, không có ba đường thẳng nào đồng quy, với ba giao điểm bất kì trong số chúng đều tìm được hai giao điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 23 giao điểm.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho:

$$f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}\ (*)$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU AN GIANG

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC và đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh rằng AD', BE', CF' đồng quy.

**Câu 3.**

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geqslant \frac{1}{ab + bc + ca}.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các số nguyên tố P sao cho $P^2 - P + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

**Câu 5.**

Cho tập hợp A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}. Từ các chữ số của tập hợp A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 5 chữ số khác nhau và số đó không chia hết cho 2 nhưng chia hết cho 3.

b) Có 7 chữ số khác nhau, chứng tỏ rằng trong các số đó không có cặp số nào chia hết cho nhau

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho:

$f(2)=2$;

$f(mn)=f(m).f(n)$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$;

$f(m)<f(n),\forall m<n$.

# TRƯỜNG THPT HẬU NGHĨA - LONG AN

**Câu 1.**

Giải phương trình: $x^4+x-2=2x\sqrt{x^2-x+3}$.

**Câu 2.**

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp trong đường tròn (C) có tâm O và điểm H sao cho $3\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AO}$. Gọi D là điểm tùy ý trên đường tròn (C) và D khác A; M là trung điểm đoạn AD và I là trung điểm đoạn OM. Chứng minh rằng ba điểm H, I và D thẳng hàng.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC=a, AC=b$ và $AB=c$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

**Câu 4.**

Chứng minh rằng: $2^{5^{2013}}+5^{2^{2012}}-3$ chia hết cho 7.

**Câu 5.**

Cho hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ đồng tâm O, có bán kính lần lượt là $R_1=2013$ và $R_2=2015$. Hỏi có thể đặt được nhiều nhất bao nhiêu đường tròn (C) sao cho các đường tròn (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C_1)$, tiếp xúc trong với đường tròn $(C_2)$ và các đường tròn (C) này không phủ nhau.

**Câu 6.**

Tìm hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$f(1)=a\ (a>0)$ và $f(n+m)=f(n)+f(m)+mn;\ \forall m,n\in\mathbb{N}$.

# TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH - ĐÀ NẴNG

**Câu 1.**

Giải phương trình và hệ phương trình:

a) $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2}+x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93$.

b) $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+3=2y\end{cases}$.

**Câu 2.**

a) Tìm tất cả số nguyên x sao cho: $\dfrac{x^3+3}{x+3}$ là số nguyên.

b) Tìm tất cả số nguyên x sao cho: $\dfrac{x^3+3}{x^2+3}$ là số nguyên.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi M là điểm bất kì trong tam giác ABC. Chứng minh $P_{M/(O)}=\dfrac{-\left(S_a.MA^2+S_b.MB^2+S_c.MC^2\right)}{S}$

Trong đó: $S,S_a,S_b,S_c$ lần lượt là diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB; $P_{M/(O)}$ là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O; R).

**Câu 4.**

a) Cho ba số thực dương a, b, c và ac + bc + ca = abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\geqslant\sqrt{3}.$$

b) Cho tam giác ABC có chu vi bằng 3; gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=3a^2+3b^2+3c^2+4abc$.

**Câu 5.**

Cho hàm số y = f(x) thỏa mãn 3f(1 – x) + f(x – 1) = 2x + 3. Tính f(2012).

**Câu 6.**

Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm A(1; 2); B(9; –4) và C(5; 5).

a) Tìm tọa độ điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho MN//BC và AM = CN.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1; 2) cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại E, F sao cho độ dài đoạn MN nhỏ nhất.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - VŨNG TÀU

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-3}=y+\sqrt{y^2+3} \\ x^3-y^3=3x-3y+4 \end{cases}$.

**Câu 2.**

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN. BM và BN lần lượt cắt đường tròn đường kính OA tại các điểm E, F khác B. Chứng minh rằng:

a) AM đi qua trung điểm đoạn thẳng EF.

b) Đường thẳng EF đi qua một đểm cố định khi cát tuyến AMN thay đổi.

**Câu 3.**

Cho $x,y,z$ là các số dương biết rằng $xyz=x+y+z+2$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^3+1}}\geqslant 1.$$

**Câu 4.**

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $(2p+1)^2+(2qa+1)^2-1$ là một số chính phương.

**Câu 5.**

Có 9 học sinh ngồi vào một cái bàn tròn, cô giáo phát 10 cái kẹo cho các học sinh một cách tùy ý (có thể có em không có kẹo). Sau đó thực hiện các thao tác, mỗi lần cô chọn một học sinh có không ít hơn 2 kẹo và chuyển sang cho hai bạn bên cạnh mỗi bạn một viên kẹo. Quá trình được thực hiện liên tiếp.

Chứng minh rằng có một thời điểm mà từ đó trở đi luôn luôn có không ít hơn 5 em học sinh có kẹo.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(x+1)=1+f(x)\,\forall x\in\mathbb{Q}$;

ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}\ \forall x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

# B. LỚP 11

## TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2-2x+2014}-1\right)\left(y+\sqrt{y^2-2y+2014}-1\right)=2013\\ \frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+(x+y)\sqrt{x+2}.\end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn: $\begin{cases}u_1\in(0;1)\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+4u_n+1}{u_n^2+u_n+1},\quad n\geqslant 1.\end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số $(u_n)$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Câu 3.**

Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*), các đường cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H*. Tiếp tuyến tại *B*, *C* của đường tròn (*O*) cắt nhau tại *G*. *GD* cắt *EF* tại *S*. Chứng minh rằng *HS* đi qua trung điểm *M* của cạnh *BC*.

**Câu 4.**

Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left((x-y)^2\right).2013^{(x-y)^2}=x^2-2y.f(x).2013^x+\left[f(y)\right]^2.2013^{2y},\forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

**Câu 5.**

Tìm các bộ số tự nhiên $(m,p,q,x,y)$ với $p,q$ là các số nguyên tố thỏa mãn:

$$2^{4m+2}+1=p^xq^y$$

**Câu 6.**

Với số nguyên dương $n>1$, xét $S=\{1;2;3;...;n\}$. Tô các số của S bằng hai màu, $a$ số màu đỏ và $b$ số màu xanh. Hãy tìm số các bộ (x, y, z) thuộc $S^3$ sao cho thỏa mãn cả hai điều kiện sau:

a) $x,y,z$ được tô cùng màu.

b) $x+y+z$ chia hết cho n.

# TRƯỜNG THPT PLEIKU - GIA LAI

**Câu 1.**

Giải phương trình: $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1$ (1)

**Câu 2.**

Cho n là số nguyên dương chẵn.

Chứng minh rằng: $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

**Câu 3.**

Cho tam giác nhọn ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua I, cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ có giá trị không đổi.

**Câu 4.**

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3abc$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc$.

**Câu 5.**

Cho dãy số $(x_n)$ thỏa mãn $x_1 = 4$ ; $x_{n+1} = x_n^2 - 2; \forall n \geqslant 1$.

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_1 x_2 ... x_n}$.

**Câu 6.**

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y), \forall x \in \mathbb{R}.$$

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH - TRÀ VINH

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9^{2y-1} + 3^{x+2y-2} + 3^{x-2y} - 2\sqrt{x^2 + 12y^2 - 2x - 12y + 4} = 3 \\ 30\sqrt{x - 2y} - 4\sqrt{2y - 1} = 2013(x - 2y) \end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ được xác định $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{10 + \sqrt{u_n^2 + 75}} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tìm công thức số hạng tổng quát $u_n$.

b) Chứng minh rằng $\frac{u_n^2 - u_{2n}^2}{u_{2n}^2}$ chia hết cho 3.

**Câu 3.**

Gọi $AA_1$, $CC_1$ là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đường phân giác của góc nhọn giữa hai đường thẳng $AA_1$, $CC_1$ cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại P, Q tương ứng. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh AC, đường phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt đoạn HM tại R. Chứng minh rằng tứ giác PBQR nội tiếp được một đường tròn.

**Câu 4.**

Cho a, b, c là ba số thực, $a < 3$ và $a \neq 0$. Biết đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ luôn có 3 nghiệm âm. Chứng minh rằng $b + c \neq 4$.

**Câu 5.**

Cho số nguyên dương n. Kí hiệu r(n) là tổng các số dư của n khi chia cho 1, 2, 3,..., n. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên dương n thỏa $r(n) = r(n-1)$.

**Câu 6.**

Trên bảng có hai số 1 và 2. Thực hiện trò chơi sau: Nếu trên bảng có hai số a và b thì được phép viết thêm số $c = a + b + ab$. Hỏi bằng cách đó có thể viết được các số 2013 và 193042013 hay không?

# TRƯỜNG THPT KRÔNG NÔ - ĐẮK NÔNG

**Câu1.**

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^{2006}} + \frac{1}{b^{2006}} + \frac{1}{c^{2006}} \geqslant 4^{2006}\left(\frac{1}{(2a+b+c)^{2006}} + \frac{1}{(a+2b+c)^{2006}} + \frac{1}{(a+b+2c)^{2006}}\right).$$

**Câu 2.**

Giải phương trình, hệ phương trình sau:

a) $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x.\cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$

b) $\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$

**Câu 3.**

Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_o = 2 \\ u_1 = 5 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}; n \geqslant 2 \end{cases}$

Tìm số hạng tổng quát $u_n$?

**Câu 4:**

Cho điểm A cố định trên đường tròn và điểm C di động trên đường tròn đó.

Dựng hình thoi ABCD (hướng quay của tia AB đến AC và AD theo chiều dương lượng giác) sao cho góc $\widehat{ABC} = 2\text{arccot}\sqrt{2}$.

a) Xác định phép đồng dạng biến điểm C thành điểm B.

b) Tìm quỹ tích của các điểm B và D. Xác định các quỹ tích đó.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH - HẬU GIANG

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x^3 - y^3 + x^2y + 2xy^2 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2+y-8}\left(x^2+y-3\right) + \left(x^2-y-5\right)\sqrt{-x^2+y} = 4 - x^2 & (2) \end{cases}$$

**Câu 2.**

Tìm giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1 > 0,\ 3(n+2)x_{n+1}^2 = 2(n+1)x_n^2 + (n+4), n \geqslant 1.$$

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC với các góc A, B, C được đo bằng đơn vị radian và bé hơn $\frac{\pi}{2}$. Từ điểm A dựng hình chiếu vuông góc đến các đường phân giác trong của các góc B, C trong $\Delta ABC$ tương ứng là $A_1$, $A_2$. Tương tự, từ đỉnh B ta dựng được hai điểm là $B_1$, $B_2$ và từ đỉnh C ta dựng được hai điểm là $C_1$, $C_2$.

Chứng minh rằng:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > \frac{\pi^3.r}{8A.B.C}$$

(với r là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$).

**Câu 4.**

Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $f(0) = 1$;

ii) $f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{4225}\left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant 2112$.

**Câu 6.**

Mỗi một đồng xu đều có hai mặt: Mặt hình và mặt chữ. Ban đầu các mặt của 2013 đồng xu đều là hình. Mỗi một nước đi, ta làm cho 100 đồng xu trong chúng lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả các đồng xu đều xuất hiện mặt chữ hay không? Tại sao? Cũng câu hỏi đó cho trường hợp có 2014 đồng xu.

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU ĐỒNG THÁP

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4xy + 4\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = (n^2+1)\cos\dfrac{n\pi}{2\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a. Chứng minh rằng $u_n > \dfrac{3}{4}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b. Tính $\lim u_n$.

**Câu 3.**

Cho hai đường tròn $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt nhau tại D và E. Trên tia DE lấy điểm A. Cát tuyến qua A cắt $(O_1)$ tại P và B. Cát tuyến qua A cắt $(O_2)$ tại Q và C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC. M là giao điểm của PD và BE, N là giao điểm của EC và DQ. Chứng minh rằng AO vuông góc với MN, biết rằng B, D, C thẳng hàng.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn điều kiện:

$2f(2x) = f(x) + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Cho số nguyên tố p có dạng p = 4k + 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n có dạng n = 4k.(2k)! thì $n^2 + 2^n$ chia hết cho 2p.

**Câu 6.**

Tại một kì thi Olympic, có n đoàn tham dự. Mỗi đoàn có k thí sinh, mỗi thí sinh thi một môn khác nhau. Tại buổi giao lưu các đoàn với nhau, ban tổ chức bố trí các đoàn vào một bàn tròn sao cho các thí sinh trong cùng một đoàn ngồi kề nhau và không có hai thí sinh thi cùng môn nào ngồi kề nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT - QUẢNG NGÃI

**Câu 1.**

Giải phương trình: $$\frac{(x+\frac{1}{x})^6 - x^6 - \frac{1}{x^6} - 2}{12(x^3+\frac{1}{x^3}) + 18(x+\frac{1}{x})} = x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3}.$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tính $\lim v_n$ với $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_n+2}$, n = 1, 2, 3, ...

**Câu 3.**

Cho 2013 đường tròn gồm một đường tròn lớn và 2012 đường tròn nhỏ, mỗi đường tròn nhỏ tiếp xúc trong với đường tròn lớn và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn nhỏ bên cạnh. Gọi $A_i$ ($i = \overline{1, 2012}$) là tiếp điểm của mỗi đường tròn nhỏ thứ i với đường tròn lớn. Chứng minh rằng

$A_1A_2.\ A_3A_4 ...\ A_{2011}A_{2012} = A_2A_3.\ A_4A_5 ...\ A_{2012}A_1$.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất

$f(x + f(y)) = f(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Câu 5.**

Có thể hay không thể phân tích đa thức $f(x) = x^5 - x + 2013$ thành tích của hai đa thức mà mỗi đa thức đều có hệ số nguyên và có bậc lớn hơn hoặc bằng 1?

**Câu 6.**

Cho dãy số 1, 2, 3, ..., 2014. Một phép biến đổi là ta xóa đi hai số bất kì trong dãy và thêm vào một số mới bằng bình phương của tổng của hai số vừa xóa. Sau 2013 lần biến đổi như vậy, số còn lại là số chẵn hay số lẻ?

# TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG – ĐÀ LẠT

**Câu 1.**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4y - x^2y^2 - 2 = 4x^2y + 3x^2 - 2x^4 + y & (1) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{3(y+1)} = 6 - y & (2) \end{cases}$$

**Câu 2.**

Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2\sqrt{1+2u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}\,u_n}{n}$.

**Câu 3.**

Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng MN song song với AD.

**Câu 4.**

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f^2(x) + f^2(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 5.**

Cho $a_1 = 19$, $a_2 = 98$. Với mỗi số nguyên $n \geqslant 2$, xác định $a_{n+1}$ bằng số dư của $a_n + a_{n-1}$ khi chia cho 100. Tìm số dư của $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2013}^2$ khi chia cho 8.

# MỤC LỤC

## LỚP 10

# LỚP 11

# SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

***HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA**
**CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA DU LỊCH GIA LAI TRÊN TOÀN QUỐC**
***HỆ THỐNG NHÀ SÁCH & SIÊU THỊ CỦA**
**CÔNG TI CỔ PHẦN VĂN HÓA PHƯƠNG NAM TRÊN TOÀN QUỐC**
***davibooks.vn**
**NHÀ SÁCH TRỰC TUYẾN**
**ĐT: 62972354**

| | |
|---|---|
| HUẾ: | **CÔNG TY CP SÁCH&TBTH HUẾ** – 76 Hàn Thuyên – TP. Huế |
| ĐÀ NẴNG: | **NS LAM CHÂU** – 129 Phan Chu Trinh |
| QUẢNG NGÃI: | **NS TRẦN QUỐC TUẤN** – 526 Quang Trung |
| NHA TRANG: | **CÔNG TY CP PHS** – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang |
| | **SIÊU THỊ TÂN TIẾN** – 11 Lê Thành Phương – Nha Trang |
| BÌNH THUẬN: | **NS HƯNG ĐẠO** – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết |
| ĐỒNG NAI: | **NS KIM NGÂN** – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa |
| | **NS BIÊN HÒA** – 35 Cách Mạng Tháng 8 – TP. Biên Hòa |
| | **NS MINH ĐỨC** – 156 Đường 30/4 – TP. Biên Hòa |
| VŨNG TÀU: | **NS ĐÔNG HẢI** – 38 Lý Thường Kiệt |
| | **NS HOÀNG CƯƠNG** – 163 Nguyễn Văn Trỗi |
| GIA LAI: | **CÔNG TY SÁCH TBTH** – 40B Hùng Vương – TP. Plieku |
| DAKLAK: | **NS LÝ THƯỜNG KIỆT** – 55 – 57 Lý Thường Kiệt |
| KONTUM: | **CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 129 Phan Đình Phùng |
| LÂM ĐỒNG: | **CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt |
| | **NS CHÍ THÀNH** – 72D Bùi Thị Xuân – Đà Lạt |
| DĂK NÔNG: | **NS GIÁO DỤC** – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa |
| TÂY NINH: | **NS VĂN NGHỆ** – 295 Đường 30 tháng 4 |
| LONG AN: | **CÔNG TY PHS** – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An |
| TIỀN GIANG: | **CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho |
| ĐỒNG THÁP: | **NS VIỆT HƯNG** – 196 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh |
| BẾN TRE: | **CÔNG TY CP SÁCH TBTH** – 03 Đồng Khởi |
| SÓC TRĂNG: | **NS TRẺ** – 41 Trần Hưng Đạo |
| KIÊN GIANG: | **NS ĐÔNG HỒ I** – 98B Trần Phú – Rạch Giá |
| | **NS ĐÔNG HỒ II** – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá |
| BÌNH DƯƠNG: | **NHÀ SÁCH 277** – 518 Cách Mạng Tháng Tám – Thủ Dầu Một |
| CÀ MAU: | **NS MINH TRÍ** – 44 Nguyễn Hữu Lễ |
| AN GIANG: | **NS THƯ QUÁN** – 3/5 Tôn Đức Thắng – TP. Long Xuyên |
| | **NS THANH KIÊN** – 496 Võ Thị Sáu – TP. Long Xuyên |
| | **TT VĂN HÓA TỔNG HỢP** – 15 – 17 Hai Bà Trưng |

**SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC**

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*
Giám đốc NGUYỄN BÁ CƯỜNG

*Chịu trách nhiệm nội dung:*
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

*Biên tập nội dung:*
LƯU THẾ SƠN

*Kĩ thuật vi tính:*
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

*Trình bày bìa:*
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

*Đối tác liên kết:*
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

**TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC 30 THÁNG 4, LẦN THỨ XIX – 2013**
**TOÁN HỌC**

Mã số: 02.02.19/29.PT2013

In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH MTV In Tín Lộc.
Đăng kí KHXB số: 1143– 2013/CXB/19-71/ĐHSP ngày 26/08/2013.
QĐXB số: 1195/QĐ-ĐHSP ngày 25/10/2013.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2013.