Phần hai. Tuyển tập các bài toán

I. Đề bài

1. Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Bài 1.1. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Lấy D, E nằm trên AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. F là giao điểm của BD, CE. H, K là điểm đối xứng của F qua AC, BC.

(a) Chứng minh H, D, K thẳng hàng.

(b) Chứng minh tam giác DEF cân.

Bài 1.2. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác $ABC(AB > AC)$ tiếp xúc với AB, AC tại P, Q. Gọi R, S lần lượt là trung điểm BC, AC. Giao điểm của PQ, RS là K. Chứng minh rằng B, O, K thẳng hàng.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nhọn nhận H làm trực tâm. Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

Bài 1.4. Gọi AB là một dây cung cố định của đường tròn (O). P là điểm di động trên dây cung AB nhưng không trùng với hai đầu mút. Vẽ đường tròn (C) đi qua A, P tiếp xúc trong với (O) và đường tròn (D) đi qua B, P tiếp xúc trong với (O). Lấy N là giao điểm thứ 2 của $(C), (D)$.

(a) Chứng minh rằng $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$. Từ đó hãy chỉ ra N di động trên đường nào.

(b) Chứng minh rằng NP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và các đường phân giác AA', BB', CC'. Tính $\widehat{B'A'C'}$.

Bài 1.6. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng CD ở N. Gọi K là giao điểm của EM và BN. Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

Bài 1.7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ $(AB < AC)$. Đường tròn $(O; r)$ đường kính AB và đường tròn $(P; R)$ đường kính AC cắt nhau ở D và A.

(a) Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh $\triangle ABE$ cân và các điểm O, N, P thẳng hàng.

(b) Dựng đường kính NQ của (O). Chứng minh Q, D, M thẳng hàng.

(c) Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh $PK \perp OK$.

Bài 1.8. Tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, hãy chứng minh rằng

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle H_aH_bH_c$.

Bài 1.9. Cho dây cung AB cố định trên (O) và $\widehat{AOB} = 120°$. M là một điểm di động trên cung lớn AB, đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB tại E, F. Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 1.10. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. Gọi S là hình chiếu vuông góc của O lên d. Vẽ các cát tuyến SAB, SEF. AF, BE lần lượt cắt d tại C, D. Chứng minh S là trung điểm của CD.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và đường phân giác BE của tam giác ABC ($H \in BC, E \in AC$). Đường thẳng qua A vuông góc với BE cắt BC, BE lần lượt tại M, N.

(a) Chứng minh tứ giác $ANHB$ nội tiếp một đường tròn. Gọi đường tròn đó là (O).

(b) Đường thẳng CN cắt (O) tại T ($T \neq N$). Chứng minh rằng : $CH \cdot BC = CN \cdot CT$.

(c) Gọi I là giao điểm của ON và AH. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{4HI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Bài 1.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AO, K là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Chứng minh rằng IK là đường trung trực của DE.

Bài 1.13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Kẻ đường kính AA' của (O), I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, A' thẳng hàng.

(b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{AHG} = 2S_{AOG}$.

Bài 1.14. Cho M là một điểm nằm bên trong hình bình hành $ABCD$. Khi đó, hãy chứng minh bất đẳng thức

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \leqslant AC \cdot BC$$

Bài 1.15. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC. A là điểm di động trên nửa đường tròn ($A \neq B, C$). Trên nửa đường tròn kia lấy I là điểm chính giữa cung BC. Dựng $AH \perp BC$ tại H. Gọi $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH, ABC.

(a) Chứng minh $AI \perp O_1O_2$.

(b) HO_1 cắt AB tại E, HO_2 cắt AC tại F. Chứng minh $\triangle O_1O_2H \backsim \triangle ABC$.

(c) Tìm vị trí điểm A để $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất.

Bài 1.16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. C là một điểm trên nửa đường tròn ($C \neq A, B$). Dựng $CH \perp AB$ tại H. E, F lần lượt là hình chiếu của H trên CA, CB.

(a) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến tại C của (O).

(b) Chứng minh tứ giác $ABFE$ nội tiếp.

(c) Tìm vị trí điểm C để chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.

(d) Chứng minh khi C di động, tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle OCH$ di chuyển trên đường cố định.

Bài 1.17. Cho hình vuông $ABCD$ cố định, cạnh a. E là điểm di chuyển trên cạnh CD. Đường thẳng AE và BC cắt nhau tại F. Đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

(a) Chứng minh $AF(CK - CF) = BD \cdot FK$.

(b) Chứng minh rằng trung điểm I của KF di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD.

(c) Chỉ ra vị trí của E để độ dài EK ngắn nhất.

Bài 1.18. Cho tam giác ABC đều. Gọi D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi $(I_1; R_1)$; $(I_2; R_2)$; $(I_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD, ABC và $(I_3; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt $(I_3; R)$ tại E.

(a) Chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$.

(b) Tìm vị trí của E để $\dfrac{1}{ED} + \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$ nhỏ nhất. Chứng minh khi ấy S_{ABEC} lớn nhất.

(c) Tìm vị trí điểm D để $R_1 + R_2$ lớn nhất.

Bài 1.19. Cho $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M dựng hai tiếp tuyến MA, MB đối với $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của BM; H là giao điểm của OM với AB. Đoạn thẳng AE cắt $(O; R)$ tại C.

(a) Chứng minh tứ giác $HCEB$ nội tiếp.

(b) Chứng minh $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.

(c) MC cắt (O) tại D. Tính DB theo R biết $OM = 3R$.

(d) OB cắt (O) tại T và cắt AD tại S. MT giao SA tại N. Chứng minh N là trung điểm AS.

Bài 1.20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. E là điểm di động trên cạnh AD $(E \neq A)$. Tia phân giác của $\widehat{EBA}, \widehat{EBC}$ cắt DA, DC tại M, N.

(a) Chứng minh $BE \perp MN$.

(b) Tìm vị trí điểm E để S_{DMN} lớn nhất.

Bài 1.21. Cho $\triangle ABC$. Một đường tròn (O) qua A và B cắt AC và BC ở D và E. M là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEC. Chứng minh rằng $\widehat{OMC} = 90°$.

Bài 1.22. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60°$. Một đường thẳng qua D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Bài 1.23. Cho đường tròn (O) và dây AD. Gọi I là điểm đối xứng với A qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng BC song song với AI.

Bài 1.24. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N.

(a) Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

(b) Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DMN$, P là giao điểm của AD và EF . Chứng minh các điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 1.25. Cho $\triangle ABC$ cố định, M là điểm di động trên cạnh BC. Dựng đường kính BE của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ và đường kính CF của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Gọi N là trung điểm EF. Chứng minh rằng khi M di động trên BC thì N di động trên một đường thẳng cố định.

Bài 1.26. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135°, AB = a, AC = b$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 45°$. Tính độ dài AM theo a, b.

Bài 1.27. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$. Hỏi tam giác MCD là tam giác gì? Tại sao?

Bài 1.28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$ sao cho tia BA và tia CD cắt nhau tại I, các tia DA và CB cắt nhau ở K (I, K nằm ngoài (O)). Phân giác của góc $\widehat{BIC}$ cắt AD, BC lần lượt tại Q, N. Phân giác của góc $\widehat{AKB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, P.

(a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Chứng minh $IK^2 = ID \cdot IC + KB \cdot KC$.

(b) Gọi F là trung điểm của AB, J là hình chiếu của F trên OB, L là trung điểm của FJ. Chứng minh $AJ \perp OL$.

Bài 1.29. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại M. Đường vuông góc với OM tại M cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M_1, M_2, M_3, M_4. Chứng minh $M_1M_4 = M_2M_3$.

Bài 1.30. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E, F là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 4EF^2 + AC^2 + BD^2$$

Bài 1.31. Trên $(O; R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho $BC = \sqrt{3}R$. A là một điểm trên cung lớn BC $(A \neq B; C)$.

(a) Chứng minh khi A di động, phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua một điểm cố định I.

(b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $BE = CF$.

(c) Chứng minh khi A di động thì EF luôn đi qua một điểm cố định.

(d) Tìm vị trí diểm A để S_{AEIF} lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 1.32. Cho $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA > R$. Dựng cát tuyến AMN của (O) không qua tâm ($AM < AN$). Chứng minh rằng

(a) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ luôn đi qua một điểm cố định H (H không trùng O) khi cát tuyến di động.

(b) Tiếp tuyến tại M và N của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh T di động trên một đường thẳng cố định khi cát tuyến AMN di động.

Bài 1.33. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°, AC = b, AB = c$ ($b > c$). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống $AB; AC$; H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống $AB; AC$.

(a) Chứng minh $IJ \perp HK$.

(b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b và c.

(c) Tính $AH + AK$ theo b và c.

Bài 1.34. Cho tam giác ABC. Một điểm D di động trên cạnh BC. Gọi P, Q tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng khi D di động thì đường tròn đường kính PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.35. Cho tam giác ABC có phân giác AD và trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại E và AC tại F. Gọi L là trung điểm EF. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng ML và AD.

Bài 1.36. Cho BC là dây cung của $(O; R)$. Đặt $BC = aR$. Điểm A trên cung BC lớn, kẻ các đường kính CI, BK. Đặt $S = \dfrac{AB + AC}{AI + AK}$. Chứng minh rằng $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Bài 1.37. Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) có $\widehat{BAC} \geqslant 90°$. Các đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$, $(C; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.
Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot R_1^2 + AC \cdot R_2^2 + AB \cdot R_3^2 + 2R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{4R}$$

Bài 1.38. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là 1. Trên cạnh BC lấy M, CD lấy N sao cho chu vi $\triangle CMN$ bằng 2 và $2\widehat{NAM} = \widehat{DAB}$. Tính các góc của hình thoi.

Bài 1.39. Về phía ngoài của tam giác ABC dựng các hình vuông $BCMN, ACPQ$ có tâm O và O'.

(a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh $\triangle IOO'$ là tam giác vuông cân.

Bài 1.40. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ở ngoài nhau biết $OO' = d > R + R'$. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với (O') tại F. Đường thẳng OO' cắt (O) tại A, B và cắt (O') tại C, D (B, C nằm giữa A, D). AE cắt CF tại M, BE cắt DF tại N. Gọi giao điểm của MN với AD là I. Tính độ dài OI.

Bài 1.41. Cho tam giác ABC có diện tích S_0. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = k_1, \dfrac{NC}{NA} = k_2, \dfrac{PA}{PB} = k_3$ $(k_1, k_2, k_3 < 1)$.
Hãy tính diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP.

III. Lời giải chi tiết

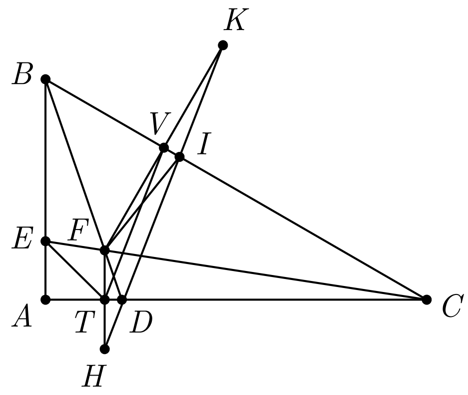
1. Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Bài 1.1 Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Lấy D, E nằm trên AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. F là giao điểm của BD, CE. H, K là điểm đối xứng của F qua AC, BC.

(a) Chứng minh H, D, K thẳng hàng.

(b) Chứng minh tam giác DEF cân.

Lời giải



(a) Gọi $T = FH \cap AC, V = FK \cap BC$. Từ giải thiết có thể suy ra tam giác ABC là nửa tam giác đều nên việc tính các góc là tầm thường. Ta có, $\widehat{FHD} = \widehat{HFD} = \widehat{ABD} = 20°$.
Mặc khác, $\widehat{FHK} = \widehat{FTV}$ (do $TV \parallel HK$) $= \widehat{ACE}$ (do $CTFV$ nội tiếp) $= 20° = \widehat{FHD}$
Suy ra H, F, K thẳng hàng.

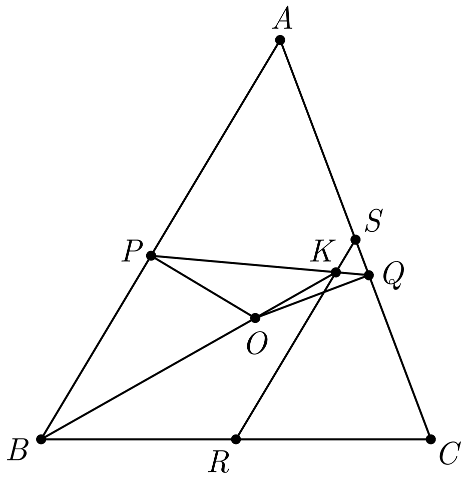
(b) HK cắt BC tại I. Ta lần lượt tính các góc :
$\widehat{DFI} = 180° - \widehat{DIF} - \widehat{IDF} = 180° - 20° - 40° = 120°$
$\widehat{BEC} = 90° + 10° = 100°$ và $\widehat{BIF} = 80^0$ nên $BEFI$ nội tiếp.

Suy ra $\begin{cases} \widehat{EFI} = 180° - \widehat{ABC} = 120° = \widehat{DFI} \\ \widehat{FIE} = 20° = \widehat{DIF} \end{cases}$

Do đó, $\triangle DFI = \triangle EFI \Rightarrow FD = FE$. Do đó, tam giác DEF cân tại F. ❒

Bài 1.2 Đường tròn (O) nội tiếp tam giác $ABC(AB > AC)$ tiếp xúc với AB, AC tại P, Q. Gọi R, S lần lượt là trung điểm BC, AC. Giao điểm của PQ, RS là K. Chứng minh rằng B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



Trước tiên, ta sẽ chứng minh rằng $RB = RK$. Gọi $a = BC, b = CA, c = AB$, chú ý rằng $SK = SQ$ do tam giác SQK có 2 góc đáy bằng nhau. Khi đó :

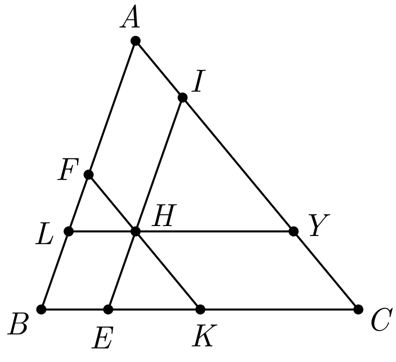
$$\begin{aligned} RK &= RS - SK \\ &= \frac{c}{2} - SQ = \frac{c}{2} - (CS - CQ) \\ &= \frac{c}{2} - \left(\frac{1}{2}b - \frac{a+b-c}{2}\right) \\ &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2}b + \frac{a+b-c}{2} \\ &= \frac{1}{2}a = BR \end{aligned}$$

Vì vậy, tam giác BRK cân tại R, suy ra $\widehat{RBK} = \widehat{RKB} = \widehat{KBA}$ ($RK \parallel AB$).
Do đó K thuộc đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ hay B, O, K thẳng hàng. ❐

Bài 1.3 Cho tam giác ABC nhọn nhận H làm trực tâm. Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

Lời giải



Qua H vẽ các đường thẳng song song với BC, CA, AB cắt các cạnh tam giác ABC tại E, K, Y, I, F, L sao cho $FK \parallel AC, IE \parallel AB, LY \parallel BC$ và $E, K \in BC; I, Y \in AC; F, L \in AB$.
Khi đó, hiển nhiên các đường thẳng LY, FK, IE lần lượt vuông góc với HA, HB, HC.
Tam giác AHL vuông tại H nên $HA < AL$. Tương tự, ta cũng có $HC < CE$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta thu được :

$$HB < HL + LB = LB + BE$$

Dấu đẳng thức ở trên do $HLBE$ là hình bình hành. Từ đó, ta thu được :

$$HA + HB + HC < AL + LB + BE + EC = AB + BC$$

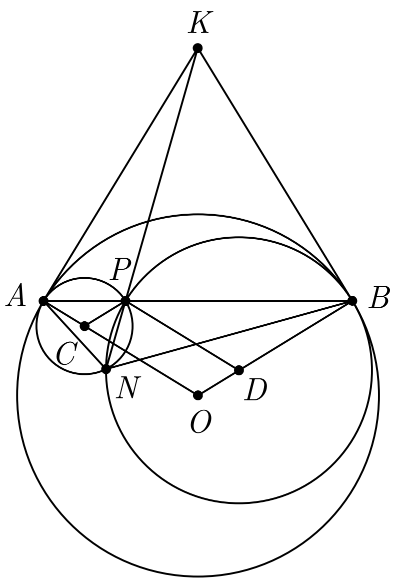
Xây dựng hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế, ta có ngay điều cần chứng minh. ❒

Bài 1.4 Gọi AB là một dây cung cố định của đường tròn (O). P là điểm di động trên dây cung AB nhưng không trùng với hai đầu mút. Vẽ đường tròn (C) đi qua A, P tiếp xúc trong với (O) và đường tròn (D) đi qua B, P tiếp xúc trong với (O). Lấy N là giao điểm thứ 2 của $(C), (D)$.

(a) Chứng minh rằng $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$. Từ đó hãy chỉ ra N di động trên đường nào.

(b) Chứng minh rằng NP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



(a) Nhận xét rằng $\begin{cases} \widehat{PAN} = \dfrac{1}{2}\widehat{PCN} = \widehat{PCD} \\ \widehat{PBN} = \dfrac{1}{2}\widehat{PDN} = \widehat{PDC} \end{cases}$.

Từ đây suy ra $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$
Do đó $\widehat{ANB} = \widehat{CPD}$. Mặc khác, do $OCPD$ là hình bình hành nên $\widehat{CPD} = \widehat{AOB} = \alpha$ nên $\widehat{ANB} = \alpha$ không đổi.
Vậy N di chuyển trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.

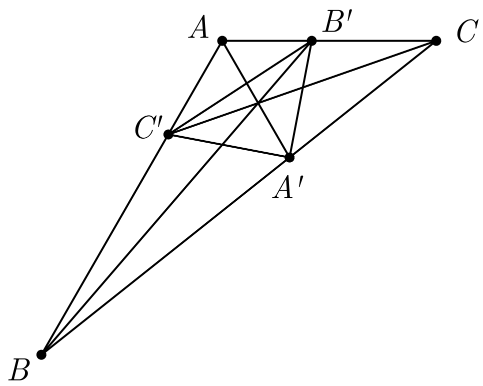
(b) Gọi K là giao điểm của tiếp tuyến tại A, B của (O). Khi đó K thuộc trục đẳng phương của $(C), (D)$ nên NP luôn qua K cố định. Ta có thể chứng minh kết quả này để phù hợp với kiến thức lớp 9 như sau :
Gọi P_1 là giao điểm của KN với (C) và P_2 là giao điểm của KN với (D). Khi đó :

$$KP_1 \cdot KN = KA^2 = KB^2 = KP_2 \cdot KN$$

Từ đây suy ra $P_1 \equiv P_2 \equiv P$. ❐

Bài 1.5 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120°$ và các đường phân giác AA', BB', CC'. Tính $\widehat{B'A'C'}$.

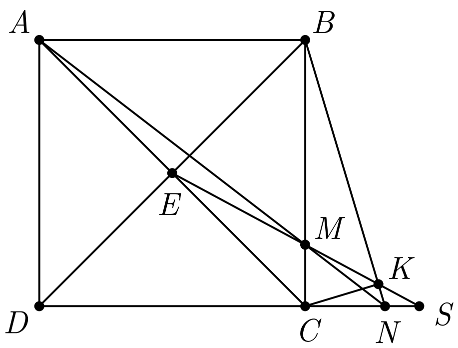
Lời giải



Gọi Ax là tia đối của tia AB. Khi đó, $\widehat{CAx} = 60°$ nên AC là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác $AA'B$. Mặc khác, BB' là phân giác trong của tam giác này nên B' chính là tâm bàng tiếp trong góc B của tam giác $AA'B$.
Suy ra $A'B'$ là phân giác $\widehat{AA'C}$.
Chứng minh tương tự, ta có $A'C'$ là phân giác $AA'B$. Vì vậy $\widehat{B'A'C'} = 90°$. ❐

Bài 1.6 Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng CD ở N. Gọi K là giao điểm của EM và BN. Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

Lời giải



Bỏ qua trường hợp đơn giản $EM \parallel CD$. Kéo dài EM cắt CD tại S. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACN với cát tuyến (EMS) và tam giác BCN với cát tuyến (MKS) :

$$\frac{MA}{MN}\cdot\frac{SN}{SC}\cdot\frac{EC}{EA}=1$$

$$\frac{MC}{MB}\cdot\frac{KB}{KN}\cdot\frac{SN}{SC}=1$$

Từ đây suy ra :

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MC}{MB}\cdot\frac{KB}{KN}$$

Áp dụng định lý Thales, ta thấy rằng :

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CN}=\frac{BC}{CN}$$

Do đó,

$$\frac{BC^2}{NC^2}=\frac{KB}{KN}$$

Gọi K' là cân đường cao kẻ từ C của tam giác BCN thì ta có kết quả quen thuộc :

$$\frac{BC^2}{NC^2}=\frac{K'B}{K'N}$$

K và K' chia trong đoạn BN theo cùng một tỷ số nên trùng nhau.
Điều này chứng tỏ $CK \perp BN$. ❐

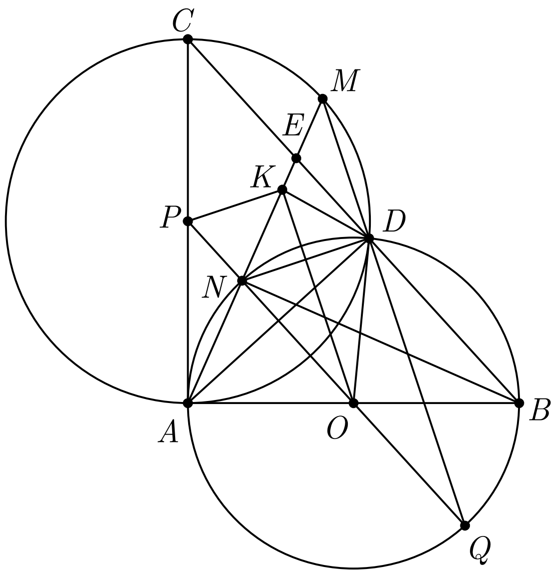
Bài 1.7 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC}=90^\circ$ $(AB<AC)$. Đường tròn $(O;r)$ đường kính AB và đường tròn $(P;R)$ đường kính AC cắt nhau ở D và A.

(a) Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh $\triangle ABE$ cân và các điểm O, N, P thẳng hàng.

(b) Dựng đường kính NQ của (O). Chứng minh Q, D, M thẳng hàng.

(c) Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh $PK \perp OK$.

Lời giải



(a) Với chú ý rằng AB là tiếp tuyến tại A của (P), ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BAE} &= \widehat{BAD} + \widehat{DEA} = \widehat{ACD} + \widehat{CAE}\\ &= \widehat{BEA}\end{aligned}$$

Suy ra tam giác ABE cân tại B.
Do đó N vừa là chân đường cao vừa là trung điểm AE.
Từ đây suy ra P, N, O thẳng hàng.
(b) Từ giả thiết suy ra $\widehat{NDQ} = 90°$
Mặt khác :

$$\widehat{DNM} + \widehat{DMN} = \widehat{DBA} + \widehat{DCA} = 90°$$

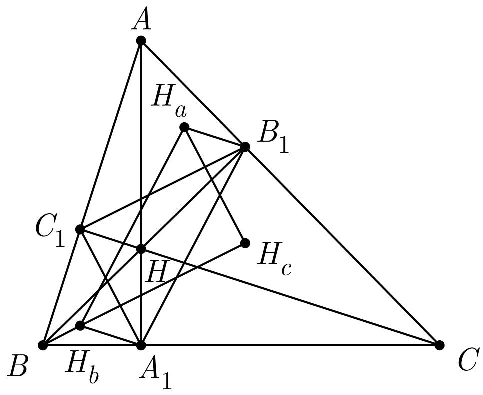
Suy ra $\widehat{MDN} = 90°$. Vì vậy Q, D, M thẳng hàng.
(c) Ta có K là trung điểm MN nên $KN = KD$. Lại có $ON = OD$ nên KO là đường trung trực của ND hay $KO \parallel MD$. Do đó

$$\widehat{OKA} = \widehat{DMA} = \widehat{DCA} = \widehat{OPA}$$

Vì vậy tứ giác $OKPA$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{OKP} = 90°$ hay $OK \perp PK$. ❐

Bài 1.8 Tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, hãy chứng minh rằng $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle H_aH_bH_c$.

Lời giải



Trước hết xin phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc : Với tam giác XYZ có trực tâm Q thì $QX = YZ \cot X$.
Áp dụng bổ đề trên, suy ra :

$$B_1H_a = AC_1 \cdot \cot \widehat{AB_1C_1} = AC_1 \cdot \cot \widehat{ABC}$$

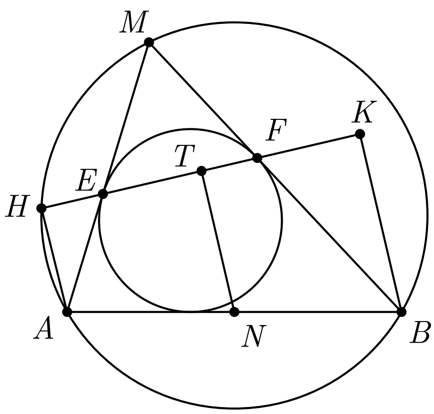
(do $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{ABC}$, B_1C_1BC nội tiếp)

$$A_1H_b = BC_1 \cdot \widehat{BA_1C_1} = BC_1 \cdot \cot \widehat{BAC}$$

(do $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BAC}$, ACA_1C_1 nội tiếp)
Mà $\dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{AC_1}{CC_1} \cdot \dfrac{CC_1}{BC_1} = \dfrac{\cot \widehat{BAC}}{\cot \widehat{ABC}}$ nên $B_1H_a = A_1H_b$. Hơn nữa, $B_1H_a \parallel A_1H_b$ (cùng vuông góc với AB). Suy ra $A_1B_1H_aH_b$ là hình bình hành.
Từ đó có được $H_aH_b = A_1B_1$. Làm tương tự với hai cạnh còn lại, ta có hai tam giác $H_aH_bH_c$ và $A_1B_1C_1$ bằng nhau theo trường hợp cạnh-cạnh-cạnh. ❐

Bài 1.9 Cho dây cung AB cố định trên (O) và $\widehat{AOB} = 120°$. M là một điểm di động trên cung lớn AB, đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB tại E, F. Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải



Gọi N là trung điểm BC và H, K, T lần lượt là hình chiếu của A, B, N lên EF. Theo định lý về đường trung bình hình thang thì :

$$NT = \frac{AH + BK}{2}$$

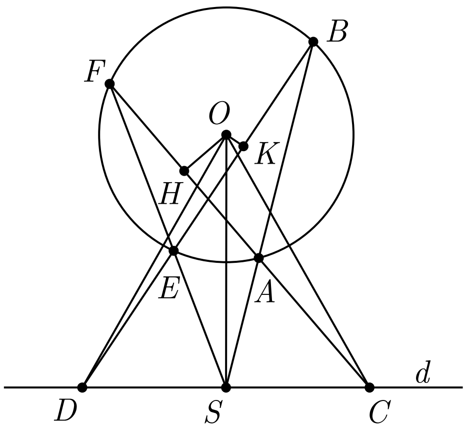
Từ giả thuyết đề bài suy ra $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên tam giác MEF đều. Từ đây ta có AFH, BFK đều là nửa tam giác đều. Do đó, $AH = \frac{1}{2}AE, BK = \frac{1}{2}BF$. Suy ra,

$$NT = \frac{AE + BF}{4}$$

Nhưng rõ ràng $AE + BF = AB$ nên $NT = \frac{AB}{4}$ không đổi và $NT \perp EF$.
Vậy EF luôn tiếp xúc với đường tròn $\left(N; \frac{AB}{4}\right)$ cố định. ❒

Bài 1.10 Cho đường tròn (O) và đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. Gọi S là hình chiếu vuông góc của O lên d. Vẽ các cát tuyến SAB, SEF. AF, BE lần lượt cắt d tại C, D. Chứng minh S là trung điểm của CD.

Lời giải



Từ O hạ các đường vuông góc xuống AF, BE với H, K là chân các đường vuông góc đó. Khi đó, H, K lần lượt là trung điểm AF, BE. Vì hai tam giác SAF, SEB đồng dạng và SH, SK là trung tuyến của các tam giác đó nên $\triangle SAH \backsim \triangle SEK$.
Suy ra $\widehat{SHA} = \widehat{SKE}$.
Mà $OHSC, OKSD$ nội tiếp nên $\widehat{SHA} = \widehat{SOC}, \widehat{SKE} = \widehat{SOD}$. Do đó, $\widehat{SOC} = \widehat{SOD}$. Tam giác COD có OS vừa là đường cao vừa là phân giác nên cân tại O. Vì thế, OS cũng chính là trung tuyến tức S là trung điểm CD. ❒

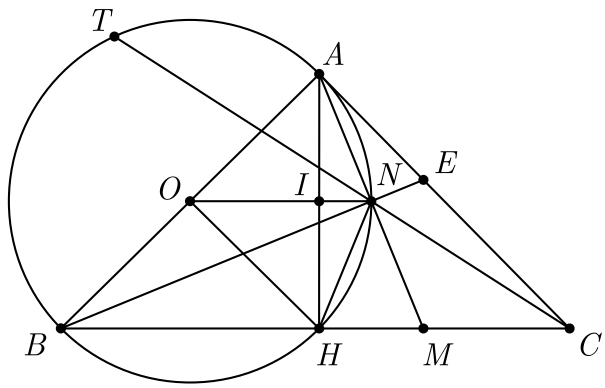
Bài 1.11 Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và đường phân giác BE của tam giác ABC ($H \in BC, E \in AC$). Đường thẳng qua A vuông góc với BE cắt BC, BE lần lượt tại M, N.

(a) Chứng minh tứ giác $ANHB$ nội tiếp một đường tròn. Gọi đường tròn đó là (O).

(b) Đường thẳng CN cắt (O) tại T ($T \neq N$). Chứng minh rằng : $CH \cdot BC = CN \cdot CT$.

(c) Gọi I là giao điểm của ON và AH. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{4HI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Lời giải



(a) Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ANHB$ nội tiếp đường tròn $\left(O; \dfrac{AB}{2}\right)$.

(b) $CH \cdot BC = CN \cdot CT = \mathcal{P}_{M/(O)}$.

(c) Xét tam giác ABM có BN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác trong. Do đó tam giác ABM cân tại B. Suy ra N là trung điểm AM.

Lại có AB là một đường kính của (O) nên O là trung điểm AB. Vì vậy I là trung điểm AH hay $AH = 2HI$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{4HI^2} = \frac{1}{AH^2}$$

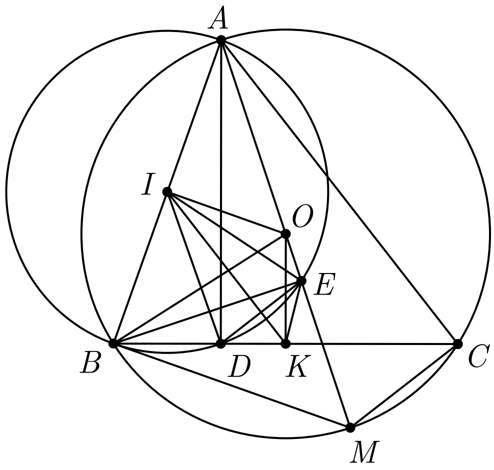
Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Mà đẳng thức này hiển nhiên đúng theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC. Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 1.12 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AO, K là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Chứng minh rằng IK là đường trung trực của DE.

Lời giải



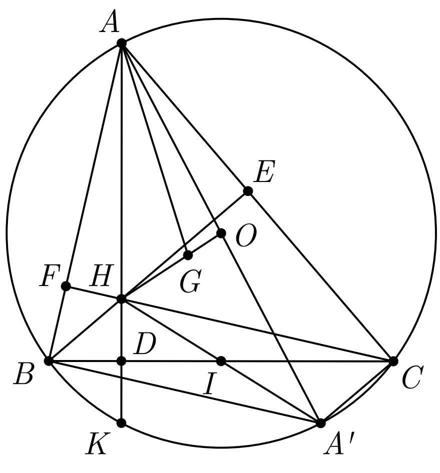
Tứ giác $BDEA$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này là trung điểm AB.
Ta có I và K là trung điểm AB, AC nên $OI \perp AB$ và $OK \perp BC$. Suy ra ngũ giác $BIOEK$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.
Vì vậy mà $\widehat{EIK} = \widehat{EBK} = \widehat{EBD} = \dfrac{1}{2}\widehat{EID}$ hay IK là phân giác của $\widehat{DIE}$.
Lại có $ID = IE$ nên tam giác IDE cân tại I. Do đó IK là trung trực của DE. ❐

Bài 1.13 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Kẻ đường kính AA' của (O), I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, A' thẳng hàng.

(b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{AHG} = 2S_{AOG}$.

Lời giải

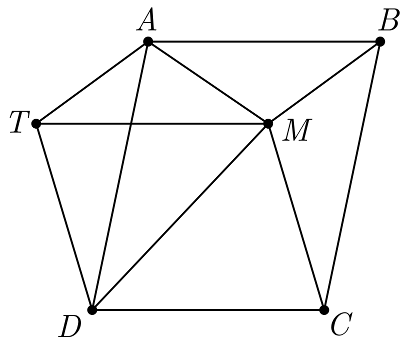


(a) Ta có $BA' \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB) và $CA' \parallel BH$(cùng vuông góc với AC) nên tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, do đó HA' và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường hay I

đồng thời là trung điểm $A'H$. Vậy H, I, A' thẳng hàng.
(b) Ta có H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$ (đường thẳng Euler trong tam giác ABC) nên $S_{AHG} = 2S_{AGO}$. ❐

Bài 1.14 Cho M là một điểm nằm bên trong hình bình hành $ABCD$. Khi đó, hãy chứng minh bất đẳng thức
$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \leqslant AC \cdot BC$$

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABMT$. Khi đó MT song song và bằng AB, suy ra MT cũng song song và bằng với CD nên $MCDT$ cũng là hình bình hành.
Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $AMDT$:

$$MT \cdot AD \leqslant MA \cdot DT + MD \cdot AT$$

Chỉ cần thay $MT = AB, AD = BC, DT = MC, AT = MD$, ta có ngay điều cần chứng minh. ❐

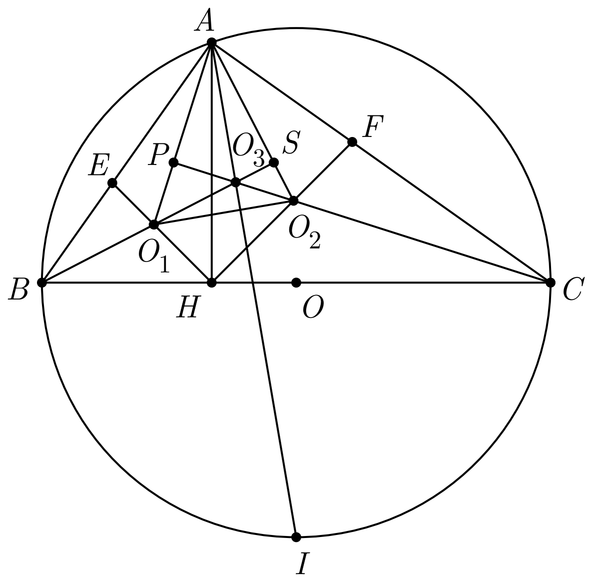
Bài 1.15 Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC. A là điểm di động trên nửa đường tròn $(A \neq B, C)$. Trên nửa đường tròn kia lấy I là điểm chính giữa cung BC. Dựng $AH \perp BC$ tại H. Gọi $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH, ABC.

(a) Chứng minh $AI \perp O_1O_2$.

(b) HO_1 cắt AB tại E, HO_2 cắt AC tại F. Chứng minh $\triangle O_1O_2H \backsim \triangle ABC$.

(c) Tìm vị trí điểm A để $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất.

Lời giải



(a) Gọi S, P lần lượt là giao điểm của O_1O_3 với AO_2 và O_2O_3 với AO_2.
Ta có B, O_1, O_3 thẳng hàng nên $\widehat{ABS} + \widehat{BAS} = \widehat{BAH} + 2\widehat{ABS} = 90°$. Suy ra $O_1S \perp AO_2$.
Tương tự, ta có $O_2P \perp AO_1$.
Do đó O_3 là trực tâm tam giác AO_1O_2 hay $AI \perp O_1O_2$.
(b) Ta có $\triangle BO_1H \backsim \triangle AO_2H$ nên

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC}$$

Suy ra $\triangle O_1HO_2 \backsim \triangle BAC$.
(c) Theo một kết quả quen thuộc ta có :

$$\begin{cases} R_3 = \dfrac{AB + AC - BC}{2} \\ R_2 = \dfrac{AH + CH - AC}{2} \\ R_1 = \dfrac{AH + BH - AB}{2} \end{cases}$$

Vì vậy $R_1 + R_2 + R_3 = AH \leqslant R$.
Do đó $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung BC. ❒

Bài 1.16 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. C là một điểm trên nửa đường tròn ($C \neq A, B$). Dựng $CH \perp AB$ tại H. E, F lần lượt là hình chiếu của H trên CA, CB.

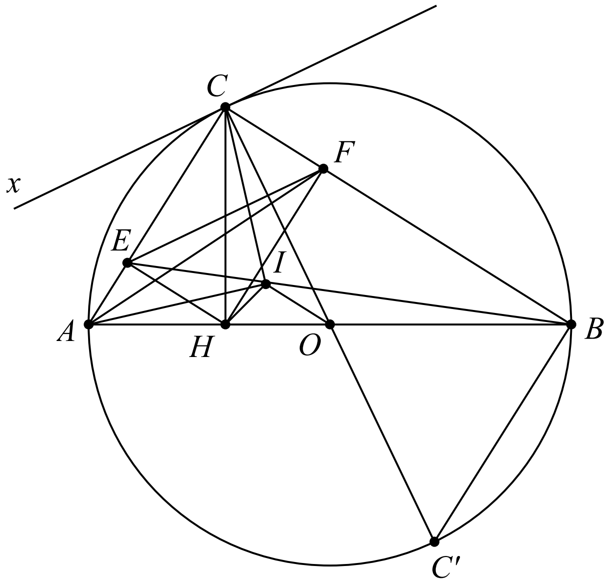
(a) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến tại C của (O).

(b) Chứng minh tứ giác $ABFE$ nội tiếp.

(c) Tìm vị trí điểm C để chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.

(d) Chứng minh khi C di động, tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle OCH$ di chuyển trên đường cố định.

Lời giải



(a) Gọi tiếp tuyến của (O) tại C là Cx.
Ta có $\widehat{xCA} = \widehat{CBA} = 90° - \widehat{HCB} = \widehat{CHF}$.
Mặt khác tứ giác $CEHF$ là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{CHF} = \widehat{CEF} \Rightarrow \widehat{xCA} = \widehat{CEF}$.
Suy ra $Cx \parallel EF$.
(b) Theo chứng minh câu **(a)** ta có $\widehat{CEF} = \widehat{CBA}$ nên tứ giác $AEFB$ nội tiếp.
(c) Ta có $(CA + CB)^2 \leqslant 2(CA^2 + CB^2) = 2AB^2 = 8R^2$. Suy ra $CA + CB \leqslant 2\sqrt{2}R$.
Vì vậy

$$CA + CB + AB \leqslant \left(2\sqrt{2} + 2\right) R$$

Lại có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA \cdot CB \leqslant \frac{1}{8}(CA + CB)^2 \leqslant \frac{1}{8} \cdot 8R^2 = R^2$$

Trong cả hai trường hợp, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB.
Vậy khi C nằm chính giữa cung AB thì chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.
(d) Không mất tính tổng quát, giả sử $CA \leqslant CB$.
Ta sẽ chứng minh $\widehat{AIO} = 135°$.
Thật vậy. Kẻ đường kính CC' của (O). Ta có $\widehat{ACH} = \widehat{C'CB}$ nên CI đồng thời là phân giác $\widehat{ACB}$.
Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{IHO} = 45°$ nên tứ giác $AHIC$ nội tiếp.
Vì vậy

$$\begin{aligned}\widehat{AIO} &= \widehat{AIH} + \widehat{HIO} \\ &= \widehat{ACH} + 90° + \widehat{HCI} \\ &= 90° + \widehat{ACI} = 135°\end{aligned}$$

Do đó I luôn nằm trên cung chứa góc $135°$ dựng trên đoạn OA và thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa C.
Tương tự với $CA \geqslant CB$ ta có I luôn thuộc cung chứa góc $135°$ dựng trên đoạn OB và nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C.
Tóm lại khi C di động trên cung AB thì I luôn di động trên cung chứa góc $135°$ dựng trên

đoạn OA hoặc OB nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C (trừ hai điểm A và B). ❐

Chú ý. Câu **(c)** của bài toán này có một cách giải khác có thể áp dụng cho trường hợp tam giác ABC không vuông :

Bài 1.toán. Cho đường tròn $(O; R)$ có dây BC cố định, tìm giá trị lớn nhất của $AB + AC$ với A là điểm di động trên một cung BC của (O).

Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AC = AM$. Suy ra $\triangle AMC$ cân tại A

Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ nên M di chuyển trên cung chứa góc $\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ dựng trên AB và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC với A.

Suy ra $AB + AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow BC \perp CM$.

Khi đó A là điểm chính giữa cung BC của (O).

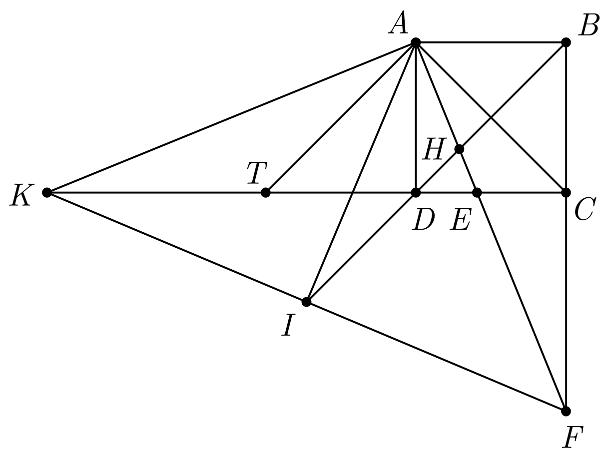
Bài 1.17 Cho hình vuông $ABCD$ cố định, cạnh a. E là điểm di chuyển trên cạnh CD. Đường thẳng AE và BC cắt nhau tại F. Đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

(a) Chứng minh $AF(CK - CF) = BD \cdot FK$.

(b) Chứng minh rằng trung điểm I của KF di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD.

(c) Chỉ ra vị trí của E để độ dài EK ngắn nhất.

Lời giải



(a) Ta có

$$\widehat{KAD} = 90^\circ - \widehat{DAF} = 90^\circ - \widehat{AFB} = \widehat{FAB}$$

Suy ra $\triangle ABF = \triangle ADK$. Do đó $AK = AF$ hay $\triangle FAK$ vuông cân tại A.

Trên tia CD lấy điểm T sao cho $AT = AC$ thì $\triangle ATK = \triangle ACF$.

Do đó $KT = CF \Rightarrow CK - CF = CT$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} AF(CK - CF) &= AF \cdot CT \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} KF \cdot \sqrt{2} AC \\ &= BD \cdot KF \end{aligned}$$

(b) Tam giác AKF vuông cân tại A có I là trung điểm KF nên $AI \perp KF$.
Suy ra tứ giác $ADIK$ nội tiếp. Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{IKD}, \widehat{AID} = \widehat{AKD}$.
Vì vậy $\widehat{IAD} + \widehat{AID} = \widehat{AKF} = 45^\circ = \widehat{ADB}$ nên I luôn nằm trên đường thẳng BD.
(c) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$DE \cdot EK = AE^2 \Rightarrow EK = \frac{AE^2}{DE} \leqslant \frac{AC^2}{CD} = \frac{2a^2}{a} = 2a$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi E trùng với C. ❐

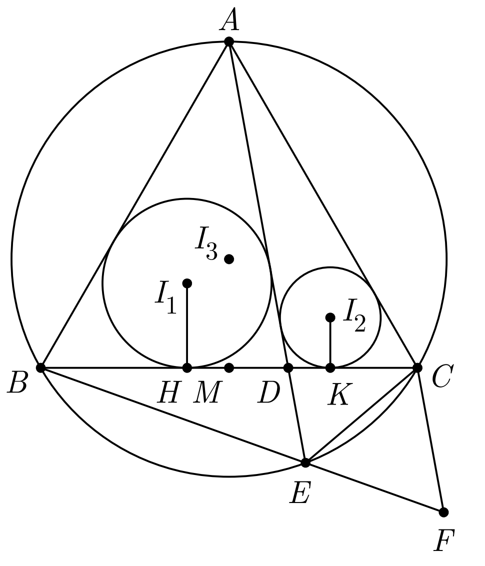
Bài 1.18 Cho tam giác ABC đều. Gọi D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi $(I_1; R_1); (I_2; R_2); (I_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD, ABC và $(I_3; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt $(I_3; R)$ tại E.

(a) Chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$.

(b) Tìm vị trí của E để $\dfrac{1}{ED} + \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$ nhỏ nhất. Chứng minh khi ấy S_{ABEC} lớn nhất.

(c) Tìm vị trí điểm D để $R_1 + R_2$ lớn nhất.

Lời giải



(a) Ta chứng minh $EA = EB + EC$
Thật vậy. Trên tia đối của tia EB lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Khi đó $\triangle ECF$ đều nên suy

ra $\triangle BCF = \triangle ACE$.
Vì vậy mà $EA = FB = EB + EF = EB + EC$.
Từ kết quả trên ta suy ra $\dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC} = \dfrac{EA}{EB \cdot EC}$
Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{EA}{EB.EC}$ hay $ED \cdot EA = EB \cdot EC$, điều này đúng do $\triangle EDC \backsim \triangle EBA$.
(b) Từ chứng minh câu **(a)** ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{EB} + \frac{1}{EC} + \frac{1}{ED} &= \frac{2EA}{EB \cdot AC}\\ &\geqslant \frac{8EA}{(EB+EC)^2} = \frac{8}{EA}\\ &\geqslant \frac{4}{R}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow EB = EC$ hay E là điểm chính giữa cung nhỏ BC.
Khi E là trung điểm cung nhỏ BC của (ABC) thì khoảng cách giữa E và BC lớn nhất, hay tam giác BEC có diện tích lớn nhất. Khi đó diện tích tứ giác $ABEC$ đạt giá trị lớn nhất.
(c) Gọi độ dài cạnh tam giác ABC là a.
Kẻ I_1H, I_2K vuông góc với BC $(H, K \in BC)$, gọi M là trung điểm BC.
Ta có

$$\begin{aligned}HK = DH + DK &= \frac{AD + BD - AB}{2} + \frac{AD + CD - AC}{2}\\ &= \frac{2AD - a}{2}\end{aligned}$$

Theo định lí Thales thì

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{BH}{BM} = \frac{2BH}{a} \text{ và } \frac{R_2}{R_3} = \frac{CK}{CM} = \frac{2CK}{a}$$

Từ đó ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\frac{R_1 + R_2}{R_3} &= \frac{2(a - HK)}{a} = \frac{3a - 2AD}{a}\\ R_1 + R_2 &= \frac{(3a - 2AD)R_3}{a}\end{aligned}$$

Từ đẳng thức cuối cùng suy ra $R_1 + R_2$ lớn nhất khi AD bé nhất. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi D là trung điểm BC. ❐

Bài 1.19 Cho $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M dựng hai tiếp tuyến MA, MB đối với $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của BM; H là giao điểm của OM với AB. Đoạn thẳng AE cắt $(O; R)$ tại C.

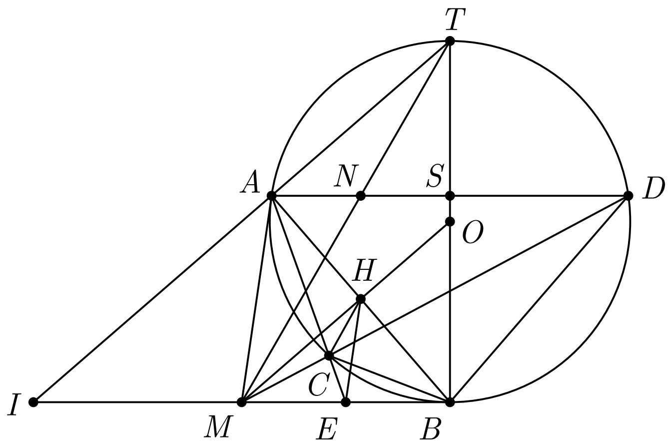
(a) Chứng minh tứ giác $HCEB$ nội tiếp.

(b) Chứng minh $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.

(c) MC cắt (O) tại D. Tính DB theo R biết $OM = 3R$.

(d) OB cắt (O) tại T và cắt AD tại S. MT giao SA tại N. Chứng minh N là trung điểm AS.

Lời giải



(a) Ta có $EH \parallel AM$ nên $\widehat{HEA} = \widehat{EAM} = \widehat{CBA}$. Suy ra tứ giác $HCEB$ nội tiếp.

(b) Ta có

$$EM^2 = EB^2 = EC \cdot EA$$

Suy ra

$$\frac{EM}{EC} = \frac{EA}{EM}$$

Mặt khác, hai tam giác EMC và EAM có góc E chung. Suy ra $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.

(c) Từ câu **(b)**, ta có

$$\widehat{ADM} = \widehat{MAC} = \widehat{EMD}$$

Do đó $AD \parallel MB$. Suy ra $OB \perp AD$ hay $BA = BD$.

Ta có $OB^2 = OH \cdot OM$, suy ra

$$OH = \frac{OB^2}{OM} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

Do đó

$$\begin{aligned} BD = AB = 2HB &= 2\sqrt{OB^2 - OH^2} \\ &= 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{4\sqrt{2}R}{3} \end{aligned}$$

(d) Gọi I là giao điểm của BM với AT.
Ta có $\triangle BAI$ vuông tại A mà $AM = MB$. Suy ra M là trung điểm của IB. Mà $MB \parallel AD$, suy ra

$$\frac{SN}{MB} = \frac{TN}{TM} = \frac{AN}{MI}$$

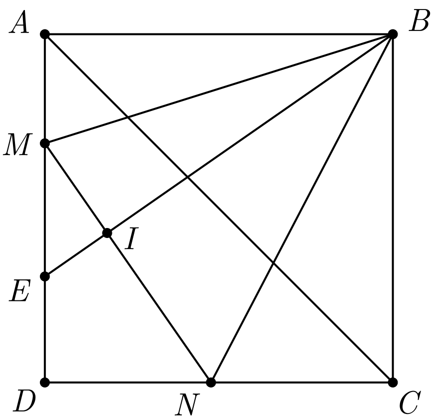
Vì vậy $AN = NS$. ❐

Bài 1.20 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. E là điểm di động trên cạnh AD $(E \neq A)$. Tia phân giác của $\widehat{EBA}, \widehat{EBC}$ cắt DA, DC tại M, N.

(a) Chứng minh $BE \perp MN$.

(b) Tìm vị trí điểm E để S_{DMN} lớn nhất.

Lời giải



(a) Gọi I là điểm đối xứng với A qua BM. Khi đó $I \in BE$ và $BI = a$.
Tương tự, nếu gọi I' là điểm đối xứng với C qua BN thì $I' \in BE$ và $BI' = a$. Suy ra $I \equiv I'$.
Vì vậy mà $I \equiv I'$ và $\widehat{BIM} = \widehat{BIN} = 90°$. Do đó $I \in MN$ và MN vuông góc với BE tại I.
(b) Từ câu **(a)**, ta suy ra $AM + CN = MN$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2\sqrt{DM \cdot DN} &\leqslant DM + DN \\ &= 2a - (AM + CN) \\ &= 2a - MN \\ &= 2a - \sqrt{DM^2 + DN^2} \\ &\leqslant 2a - \sqrt{2DM \cdot DN} \end{aligned}$$

Do đó

$$2\sqrt{2S_{DMN}} \leqslant 2a - \sqrt{4S_{DMN}}$$

Vì vậy

$$S_{DMN} \leqslant \left(\frac{a}{3 + 2\sqrt{2}}\right)^2$$

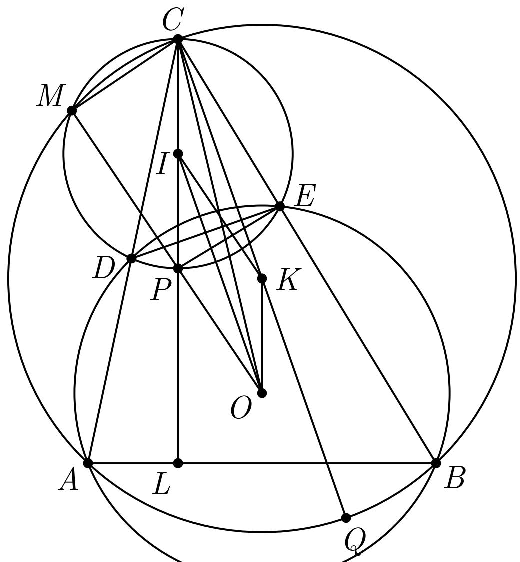
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DM = DN \Leftrightarrow E \equiv D$.

Vậy diện tích tam giác DMN có giá trị lớn nhất bằng $\left(\dfrac{a}{3+2\sqrt{2}}\right)^2$ khi $E \equiv D$. ❒

$\boxed{\textbf{Bài 1.21}}$ Cho $\triangle ABC$. Một đường tròn (O) qua A và B cắt AC và BC ở D và E. M là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEC. Chứng minh rằng $\widehat{OMC} = 90°$.

Lời giải

(i) *Cách 1.*

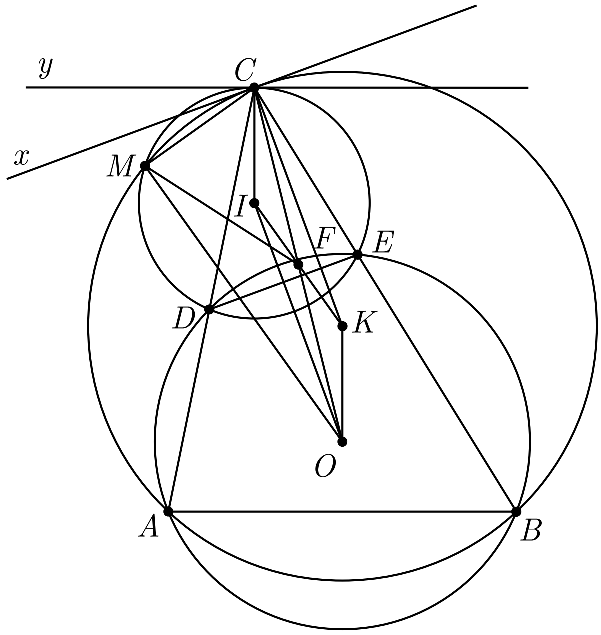


Gọi I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác CDE và ABC.
Kẻ đường kính CP của (I) cắt AB tại L. Suy ra $PM \perp CM$. (1)
Ta có

$$\widehat{ACL} + \widehat{CAB} = \widehat{DEP} + \widehat{DEC} = 90°$$

Do đó $CL \perp AB$ hay $PC \parallel OK$.
Ta có $OI \perp DE$ (tính chất đường nối tâm của 2 đường tròn cắt nhau) và $CK \perp DE$ (kẻ đường kính CQ của (K), chứng minh tương tự $CL \perp AB$)
Suy ra $CIOK$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm CP nên $PIKO$ cũng là hình bình hành. Do đó $PO \parallel IK$.
Mà $IK \perp CM$ (tính chất đường nối tâm của 2 đường tròn cắt nhau) nên $OP \perp CM$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra O, M, P thẳng hàng, do đó $\widehat{COM} = 90°$. ❒

(ii) *Cách 2.*



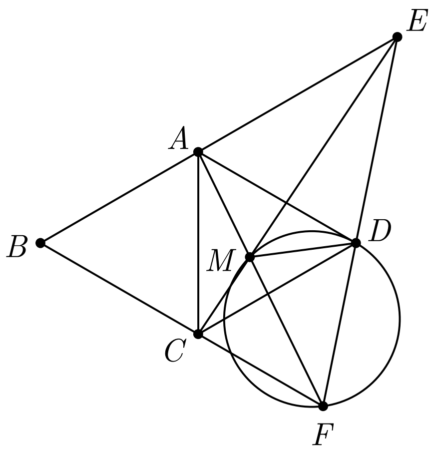
Gọi I, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE, ABC. Dựng tiếp tuyến Cx, Cy của các đường tròn (ABC) và (CDE).
Ta có :

$$\widehat{xCA} = \widehat{CBA} = \widehat{CDE}$$

Suy ra $Cx \parallel DE$. Do đó $DE \perp CK$ hay $CK \parallel OI$.
Tương tự, ta có $CI \parallel OK$ nên $CIOK$ là hình bình hành.
Gọi F là trung điểm OC thì F cũng là trung điểm IK. Mà IK là đường trung trực của CM nên $FM = FC = \dfrac{OC}{2}$
Suy ra tam giác COM vuông tại M. ❒

Bài 1.22 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60°$. Một đường thẳng qua D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $AC = AD = CD$. Hai tam giác FCD và DAE đồng dạng, suy ra

$$\frac{CF}{AD} = \frac{CD}{AE}$$

Do đó

$$CF \cdot AE = AD \cdot CD = AC^2$$

Tương đương với

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AE}{AC}$$

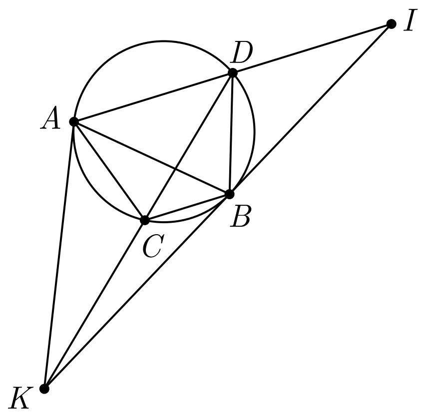
Lại có $\widehat{ACF} = \widehat{EAC}$, suy ra $\triangle ACF \backsim \triangle EAC$.
Từ đó ta có $\widehat{ACM} = \widehat{CFM}$.
Vì vậy $\triangle ACM \backsim \triangle AFC$. Suy ra

$$AD^2 = AC^2 = AM \cdot AF$$

Vậy AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF. ❐

Bài 1.23 Cho đường tròn (O) và dây AD. Gọi I là điểm đối xứng với A qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng BC song song với AI.

Lời giải



Ta thấy rằng $ADBC$ là tứ giác điều hòa.
Từ đó, theo một bổ đề quen thuộc, ta có $AD \cdot BC = AC \cdot BD$.
Lại có $AD = DI$, suy ra

$$\frac{DB}{DI} = \frac{CB}{CA}$$

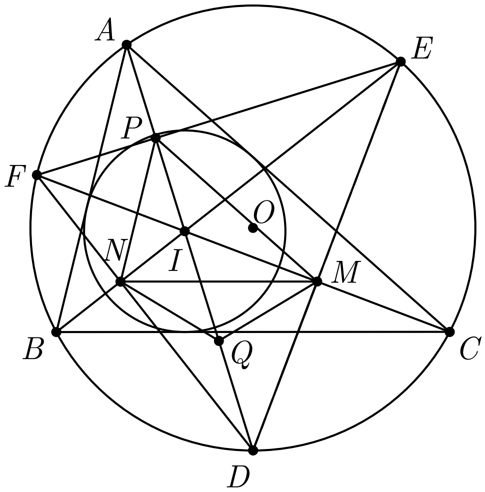
Chú ý rằng $\widehat{BDI} = \widehat{BCA}$, ta suy ra $\triangle BDI \backsim \triangle BCA$.
Vì vậy $\widehat{KBC} = \widehat{BAC} = \widehat{BID}$ hay $BC \parallel AI$. ❐

Bài 1.24 Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N.

(a) Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

(b) Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DMN$, P là giao điểm của AD và EF . Chứng minh các điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



(a) Ta có

$$\widehat{NIM} + \widehat{NDM} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{ACI} + \widehat{ABI}$$
$$= 90^\circ + \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $INDM$ nội tiếp.
Do đó

$$\widehat{INM} = \widehat{IDM} = \widehat{ABE} = \widehat{CBE}$$

Vì vậy $MN \parallel BC$.
(b) Tương tự câu **(a)**, ta có $PN \parallel AB, PM \parallel AC$. Suy ra $\widehat{NPM} = \widehat{BAC}$.
Lại có

$$\widehat{NQM} = 2\widehat{NDM} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$$

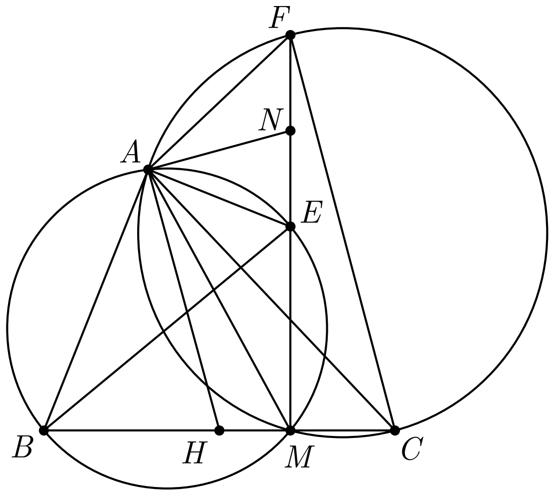
Do đó

$$\widehat{NPM} + \widehat{NQM} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $MPNQ$ nội tiếp. ❒

Bài 1.25 Cho $\triangle ABC$ cố định, M là điểm di động trên cạnh BC. Dựng đường kính BE của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ và đường kính CF của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Gọi N là trung điểm EF. Chứng minh rằng khi M di động trên BC thì N di động trên một đường thẳng cố định.

Lời giải



Giả sử $AB < AC$, gọi H là trung điểm BC, M nằm giữa H và C
Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{AMB} = \widehat{AFC}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$ nên suy ra

$$\widehat{AME} = \widehat{ABE} = \widehat{AMF}$$

Do đó M, E, F thẳng hàng. Từ đó ta có

$$\widehat{ABC} = \widehat{AEF}, \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$$

Suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$. Mà H, N lần lượt là trung điểm BC, EF nên $\triangle AHC \backsim \triangle ANF$. Do đó

$$\begin{aligned}\widehat{HAN} &= \widehat{HAC} + \widehat{CAN} + \widehat{NAF} \\ &= \widehat{CAF} = 90^\circ\end{aligned}$$

Vậy N luôn nằm trên đường thẳng đi qua A vuông góc với AH. ❒

Bài 1.26 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ, AB = a, AC = b$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Tính độ dài AM theo a, b.

Lời giải
Lấy N trên BC sao cho $\widehat{BAM} = 90^\circ$. Áp dụng công thức độ dài đường phân giác, ta có

$$AN = \frac{\sqrt{2} \cdot AM \cdot b}{AM + b}, AM = \frac{\sqrt{2} \cdot AN \cdot a}{AN + a}$$

Suy ra

$$AN \cdot AM + b \cdot AN = \sqrt{2} \cdot AM \cdot b, AM \cdot AN + a \cdot AM = \sqrt{2} \cdot AN \cdot a$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, ta có

$$b \cdot AN - a \cdot AM = \sqrt{2}\left(b \cdot AM - a \cdot AN\right)$$

Tương đương với

$$AN = \frac{AM\left(a + b\sqrt{2}\right)}{a\sqrt{2} + b}$$

Do đó

$$\frac{b\sqrt{2}}{AM+b} = \frac{a+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b}$$

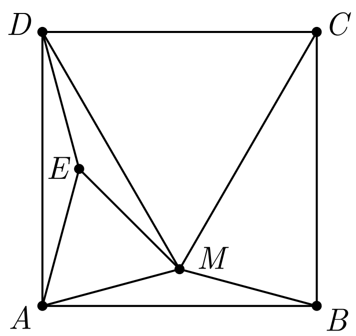
Vậy

$$AM = \frac{ab}{a+b\sqrt{2}}$$

❒

Bài 1.27 Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$. Hỏi tam giác MCD là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải



Dựng tam giác đều AME (E nằm trong tam giác ADM). Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{MAB} = 15°$.
Do đó $\triangle DEA = \triangle AMB$. Vì vậy $\widehat{DEA} = \widehat{AMB} = 150°$. Suy ra

$$\widehat{DEM} = 360° - \widehat{DEA} - \widehat{AEM} = 150°$$

Từ đó suy ra $\triangle DEM = \triangle DEA$ hay $DM = DA = DC$.
Tương tự ta có $CM = CD$.
Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều. ❒

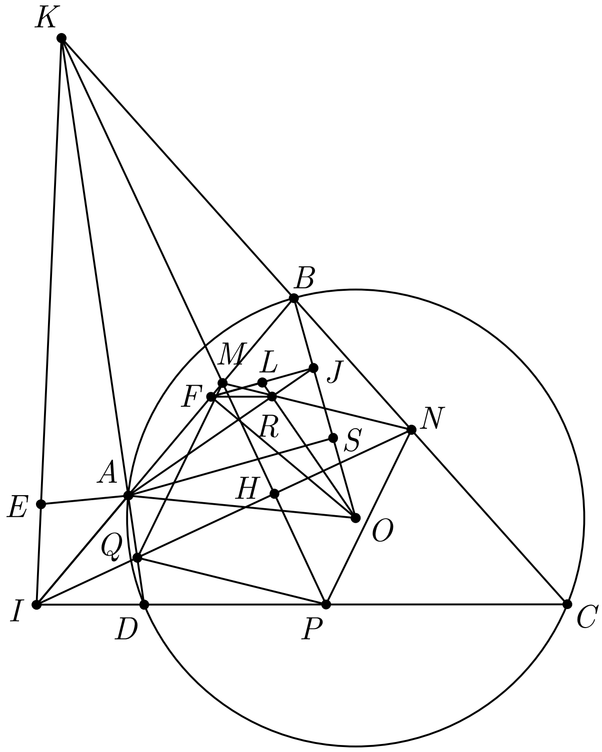
Bài 1.28 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$ sao cho tia BA và tia CD cắt nhau tại I, các tia DA và CB cắt nhau ở K (I, K nằm ngoài (O)). Phân giác của góc $\widehat{BIC}$ cắt AD, BC lần lượt tại Q, N. Phân giác của góc $\widehat{AKB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, P.

(a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Chứng minh $IK^2 = ID \cdot IC + KB \cdot KC$.

(b) Gọi F là trung điểm của AB, J là hình chiếu của F trên OB, L là trung điểm của FJ. Chứng minh $AJ \perp OL$.

Lời giải



(a) Gọi H là giao điểm của KP và IN.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{IKH}+\widehat{KIH}&=\widehat{AKI}+\widehat{AIK}+\frac{1}{2}\widehat{DKC}+\frac{1}{2}\widehat{BIC}\\&=180^\circ-\widehat{BAD}+\frac{1}{2}\widehat{DKC}+\frac{1}{2}\widehat{BIC}\end{aligned}$$

Lại có

$$\widehat{DKC}=\widehat{BAD}-\widehat{ABK}=\widehat{BAD}-\widehat{ADC}$$
$$\widehat{BIC}=\widehat{BAD}-\widehat{ADI}=\widehat{BAD}-\widehat{ABC}$$

Suy ra

$$\widehat{IKH}+\widehat{KIH}=180^\circ-\frac{1}{2}(\widehat{ADC}+\widehat{ABC})=90^\circ$$

Do đó $\widehat{KHI}=90^\circ$.

Vì vậy các tam giác MIP và QKN cân do có đường cao đồng thời là đường phân giác.

Suy ra tứ giác $MNPQ$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm H của mỗi đường chéo nên tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK với IK.

Bằng một số biến đổi góc đơn giản, ta suy ra được tứ giác $IEAD$ nội tiếp.

Suy ra

$$ID\cdot IC=IA\cdot IB=IE\cdot IK$$
$$\text{và } KB\cdot KC=KA\cdot KD=KE\cdot IK$$

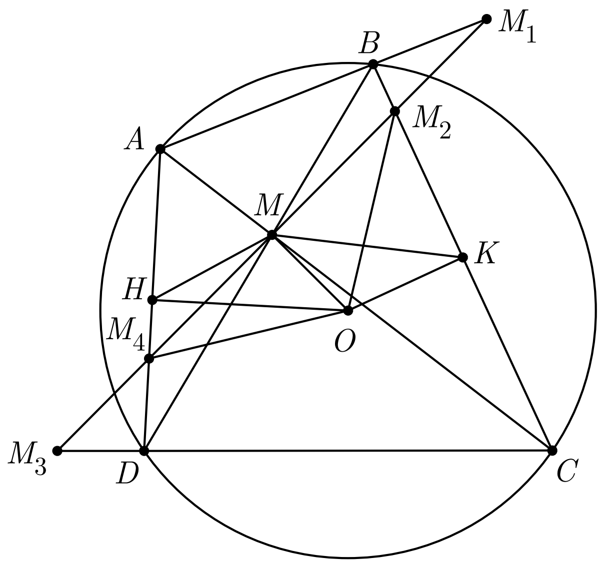
Cộng theo vế hai đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}ID\cdot IC+KB\cdot KC&=IK(IE+KE)\\&=IK^2\end{aligned}$$

(c) Gọi R là giao điểm của AJ và OL. Kẻ $AS \perp BO\,(S \in BO)$ thì J là trung điểm BS
Ta có tứ giác $AFSO$ nội tiếp nên $\widehat{BAS} = \widehat{FOJ}$. Do đó $\triangle FJO \backsim \triangle BSA$.
Suy ra $\widehat{BAJ} = \widehat{FOL}$ hay tứ giác $AFRO$ nội tiếp.
Vì vậy $\widehat{ARO} = \widehat{AFO} = 90°$. ❒

Bài 1.29 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại M. Đường vuông góc với OM tại M cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M_1, M_2, M_3, M_4. Chứng minh $M_1M_4 = M_2M_3$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát, giả sử các điểm có vị trí tương đối như hình vẽ trên. Các trường hợp khác chứng minh hoàn toàn tương tự.
Kẻ OH và OK lần lượt vuông góc với AD, BC.
Tứ giác $OMHM_4$ nội tiếp nên $\widehat{M_4OM} = \widehat{AHM}$. Tương tự, ta có $\widehat{M_2OM} = \widehat{M_2KM}$.
Mặt khác $\triangle AMD \backsim \triangle BMC$ nên $\triangle AHM \backsim \triangle BKM$.
Suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{M_2KM}$ hay $\widehat{M_4OM} = \widehat{M_2OM}$.
Vì vậy $\triangle M_2OM_4$ cân tại O. Do đó M là trung điểm M_2M_4.
Chứng minh tương tự, ta suy ra M là trung điểm M_1M_3.
Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ❒

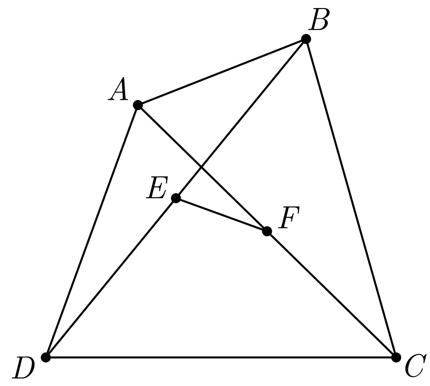
Nhận xét. Bài toán trên là một hệ quả trực tiếp của định lí con bướm. Định lí con bướm tổng quát được phát biểu như sau :
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Một đường thẳng qua P cắt (O) tại E, F; cắt AB, CD theo thứ tự tại G, H; cắt BC, AD theo thứ tự tại I, J. Khi đó :

$$\frac{1}{PE} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PG} - \frac{1}{PH} = \frac{1}{PI} - \frac{1}{PJ}$$

Bài 1.30 Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E, F là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 4EF^2 + AC^2 + BD^2$$

Lời giải



Áp dụng công thức đường trung tuyến, ta có :

$$\begin{aligned} 4EF^2 &= 2AE^2 + 2CE^2 - AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 - \frac{BD^2}{2} + BC^2 + CD^2 - \frac{BD^2}{2} - AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$4EF^2 + BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2$$

Ta có đẳng thức cần chứng minh. ❒

Bài 1.31 Trên $(O;R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho $BC = \sqrt{3}R$. A là một điểm trên cung lớn BC $(A \neq B; C)$.

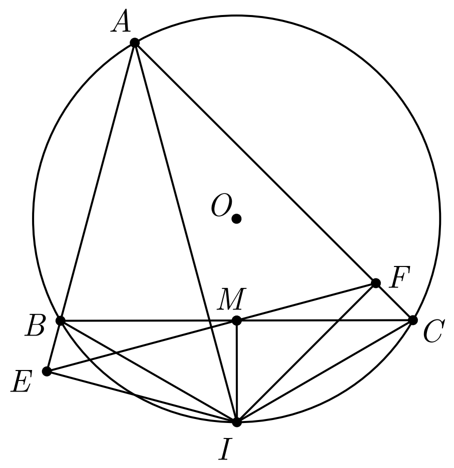
(a) Chứng minh khi A di động, phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua một điểm cố định I.

(b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $BE = CF$.

(c) Chứng minh khi A di động thì EF luôn đi qua một điểm cố định.

(d) Tìm vị trí điểm A để S_{AEIF} lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Lời giải



(a) Phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua điểm I là điểm chính giữa cung BC nhỏ cố định.
(b) Vì I là trung điểm cung nhỏ BC nên $IB = IC$.
Lại có $\widehat{IEB} = \widehat{IFC} = 90^\circ$ và $\widehat{IBE} = \widehat{ICF}$ nên $\triangle EIB = \triangle FIC$.
Suy ra $BE = CF$.
(c) Gọi M là trung điểm BC thì $IM \perp BC$. Suy ra E, F, M thẳng hàng (đường thẳng Simson) nên EF luôn đi qua M cố định.
(d) Từ $\triangle EIB = \triangle FIC$, ta suy ra

$$S_{AEIF} = S_{ABIC} = S_{ABC} + S_{BIC}$$

Vì I cố định nên S_{AEIF} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất. Điều đó chỉ xảy ra khi A là trung điểm cung lớn BC của (O).
Khi đó thì

$$\begin{aligned} S_{AEIF} = \frac{4}{3} S_{ABC} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ &= R^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

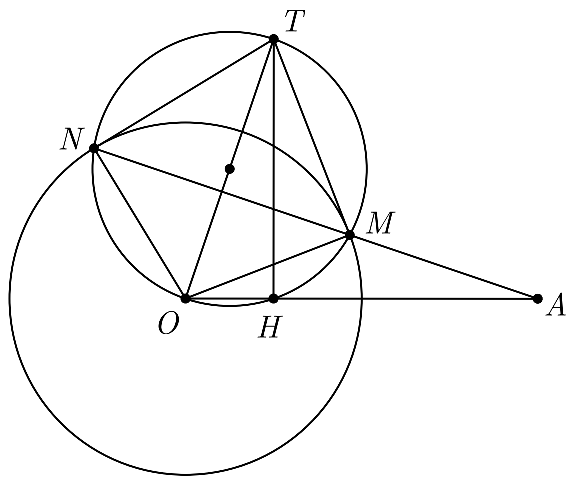
Vậy diện tích tứ giác $AEIF$ lớn nhất bằng $R^2\sqrt{3}$ khi A là trung điểm cung lớn BC của (O). ❐

$\boxed{\textbf{Bài 1.32}}$ Cho $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA > R$. Dựng cát tuyến AMN của (O) không qua tâm ($AM < AN$). Chứng minh rằng

(a) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ luôn đi qua một điểm cố định H (H không trùng O) khi cát tuyến di động.

(b) Tiếp tuyến tại M và N của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh T di động trên một đường thẳng cố định khi cát tuyến AMN di động.

Lời giải



(a) Gọi H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN với $AO; AB$ là một tiếp tuyến của (O) đi qua A (B là tiếp điểm).
Khi đó ta có $AH \cdot AO = AB^2 = AM \cdot AN = AO^2 - R^2$ không đổi.
Mà AO và A cố định nên H cố định.
Vậy (OMN) luôn đi qua H cố định.
(b) Dễ thấy OT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ngũ giác $OHMTN$ nên $\widehat{OHT} = 90°$, tức là T đi động trên đường thẳng vuông góc với OA tại H là đường cố định. ❐

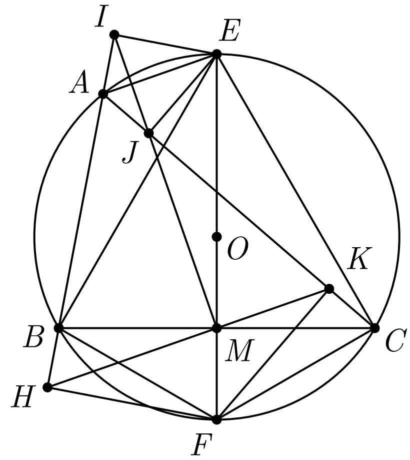
Bài 1.33 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°, AC = b, AB = c$ $(b > c)$. Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống $AB; AC$; H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống $AB; AC$.

(a) Chứng minh $IJ \perp HK$.

(b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b và c.

(c) Tính $AH + AK$ theo b và c.

Lời giải



(a) Ta thấy HK đi qua M (đường thẳng Simson)
Gọi L là giao điểm của AE và IJ, ta có

$$\widehat{IAE} = \widehat{ECB} = \widehat{EBC} = \widehat{JAE}$$

Do đó $\triangle AIE = \triangle AJE$. Suy ra $AE \perp IJ$.
Mặt khác, ta có

$$\widehat{EAC} = \widehat{EFC} = \widehat{AKH}$$

Suy ra $AE \parallel HK$. Vì vậy $IJ \perp HK$.
(b) Do $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BC^2 = b^2 + c^2 - bc$.
Mặt khác, ta có $BC = R\sqrt{3}$. Từ đó suy ra

$$R = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}$$

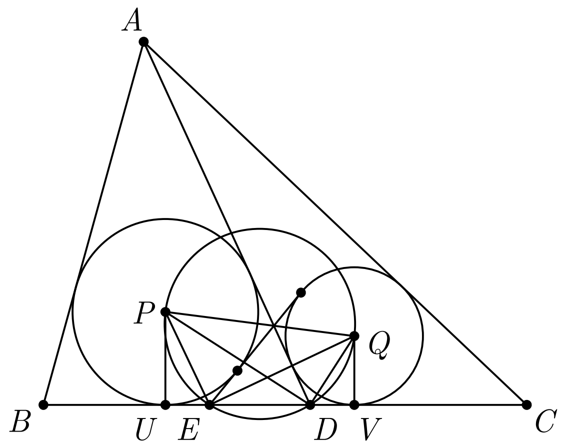
(c) Ta có $\triangle BHF = \triangle CKF$, suy ra $BH = CK$. Do đó

$$AH + AK = b + BH + c - CK = b + c$$

Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh. ❒

Bài 1.34 Cho tam giác ABC. Một điểm D di động trên cạnh BC. Gọi P, Q tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng khi D di động thì đường tròn đường kính PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Ta có bổ đề sau (phần chứng minh xin dành cho bạn đọc) :
Bổ đề : Hai đường tròn (O_1) và (O_2) không cắt nhau, hai tiếp tuyến chung trong d_1, d_2 cắt một tiếp tuyến chung ngoài d tại A và B.Gọi C, D lần lượt là tiếp điểm của d trên (O_1) và (O_2) thì $AC = BD$.
Trở lại bài toán : Ta sẽ chứng minh điểm cố định là tiếp điểm F của đường tròn nội tiếp ABC với BC.

Kẻ tiếp tuyến chung trong của (P) và (Q) khác AD cắt BC tại E. Gọi U, V là tiếp điểm của (P) và (Q) với BC.
Áp dụng bổ đề ta có :

$$BE = BU + UE = BU + DV$$

Lại có $BU = \dfrac{BD + BA - AC}{2}$ và $DV = \dfrac{DA + DC - AC}{2}$.
Suy ra $BE = \dfrac{BC + BA - AC}{2}$ hay $E \equiv F$.
Từ bổ đề ta cũng có $EV = UD$, do đó $FV = UD$ và $FU = DV$.
Ta có $\triangle PDU \backsim \triangle DQV$, suy ra

$$DU \cdot DV = PU \cdot QV$$

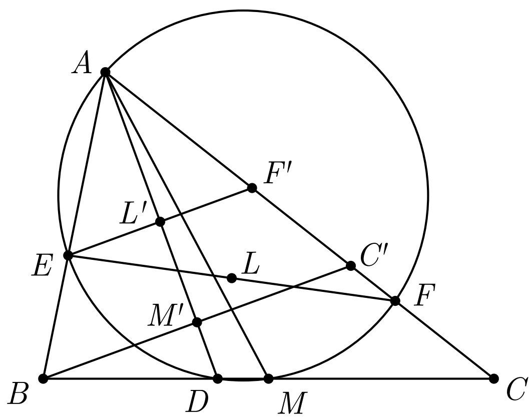
Tương đương với

$$FU \cdot FV = PU \cdot QV$$

Vì vậy $\triangle PUF \backsim \triangle FVQ$. Từ đó suy ra $\widehat{PFQ} = 90°$. Mà $\widehat{PDQ} = 90°$ nên F thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PDQ. ❐

Bài 1.35 Cho tam giác ABC có phân giác AD và trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại E và AC tại F. Gọi L là trung điểm EF. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng ML và AD.

Lời giải



Xét trường hợp tam giác ABC cân tại A thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM trở thành đường tròn đường kính AM và tiếp xúc với BC tại M.
Suy ra hai đường thẳng ML và AD trùng nhau.
Xét trường hợp tam giác ABC không cân tại A
Gọi giao điểm của đường thẳng ML với AB, AC lần lượt là P, Q.
Ta có

$$\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CM}$$

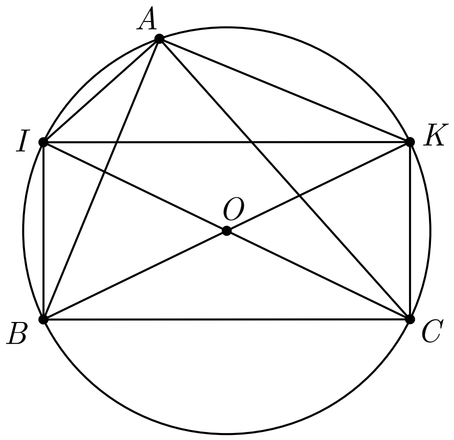
Suy ra

$$BE = CF$$

Gọi C', F' là các điểm đối xứng với B, E qua AD; M', L' là trung điểm BC', EF'.
Dễ thấy rằng M', L' nằm trên AD và $CC' = FF'$. Mặt khác, MM' và LL' là các đường trung bình trong các tam giác BCC' và EFF' nên ta có MM' và LL' cùng song song với AC và có độ dài bằng nhau. Suy ra $MM'L'L$ là hình bình hành.
Do đó $ML \parallel M'L'$ hay $ML \parallel AD$.
Tóm lại nếu tam giác ABC cân tại A thì ML trùng với AD, còn nếu tam giác ABC không cân tại A thì ML song song với AD. ❒

Bài 1.36 Cho BC là dây cung của $(O; R)$. Đặt $BC = aR$. Điểm A trên cung BC lớn, kẻ các đường kính CI, BK. Đặt $S = \dfrac{AB + AC}{AI + AK}$. Chứng minh rằng $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Lời giải



Từ giả thiết ta suy ra $BCKI$ là hình chữ nhật.
Suy ra $IK = BC = aR$ và $BI = CK = R\sqrt{4 - a^2}$
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $AIBK$ ta có

$$AI \cdot BK + BI \cdot AK = IK \cdot AB$$

Tương đương với

$$AI \cdot 2R + AK \cdot R\sqrt{4 - a^2} = AB \cdot aR$$

Suy ra

$$2AI + AK \cdot \sqrt{4 - a^2} = AB \cdot a$$

Tương tự, ta có

$$2AK + AI \cdot \sqrt{4 - a^2} = AC \cdot a$$

Do đó

$$\frac{AB + AC}{AI + AK} = \frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$$

Vì $a \leqslant 2$ nên $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a} \geqslant 1$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi và chỉ khi BC là đường kính đường tròn (O). ❒

Bài 1.37 Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R) có $\widehat{BAC} \geqslant 90°$. Các đường tròn $(A;R_1)$, $(B;R_2)$, $(C;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.
Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot R_1^2 + AC \cdot R_2^2 + AB \cdot R_3^2 + 2R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{4R}$$

Lời giải

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Dễ thấy rằng $R_1 = p - a, R_2 = p - b, R_3 = p - c$.
Ta cần chứng minh

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c) = abc$$

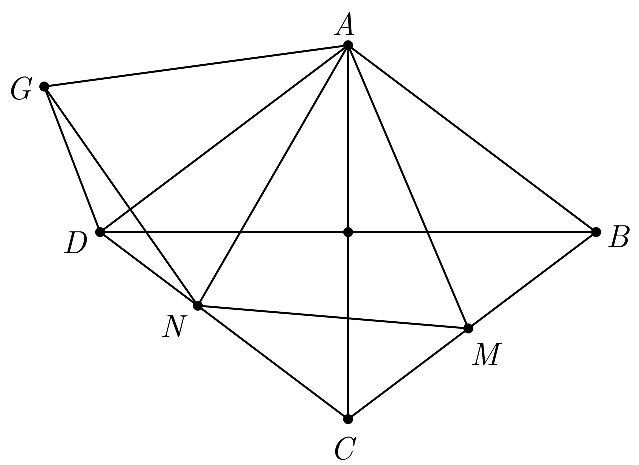
Đặt $E(a,b,c) = a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c)$.
Ta có

$$\begin{aligned}E(0,b,c) &= b\left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + c\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \cdot \frac{b-c}{2} \\ &= \left(\frac{b-c}{2}\right)\left(b + c - 2 \cdot \frac{b+c}{2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Tương tự, ta có $E(0,b,c) = E(a,0,c) = E(a,b,0) = 0$.
Suy ra $E = kabc$, trong đó k là hằng số thực.
Cho $a = b = c$, ta thấy rằng $k = 1$.
Vì vậy $E(a,b,c) = abc$. ❒

Bài 1.38 Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là 1. Trên cạnh BC lấy M, CD lấy N sao cho chu vi $\triangle CMN$ bằng 2 và $2\widehat{NAM} = \widehat{DAB}$. Tính các góc của hình thoi.

Lời giải



Dựng về phía nửa mặt phẳng bờ AD không chứa C tam giác ADG sao cho $\triangle ADG = \triangle ABM$.
Suy ra $\widehat{ADG} = \widehat{ABM}$ và $BM = DG$.
Vì $MC + NC + MN = 2$ nên

$$\begin{aligned} MN &= 2 - NC - MC \\ &= DN + MB \\ &= DN + DG \end{aligned}$$

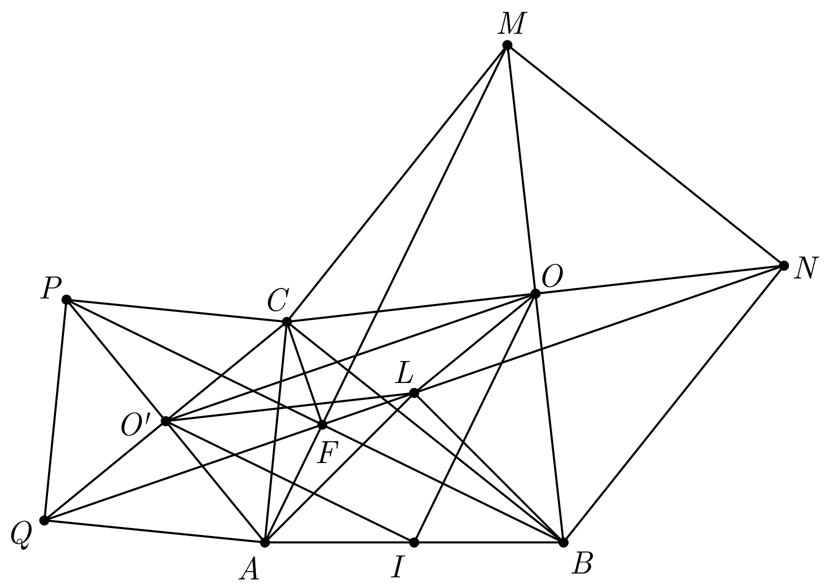
Mặt khác, do $2\widehat{MAN} = \widehat{DAB}$ nên $\triangle AGN = \triangle AMN$.
Do đó $MN = NG$ hay $NG = ND + DG$. Suy ra N, D, G thẳng hàng.
Vì vậy $ABCD$ là hình thoi tổng hai góc đối diện bằng 180° nên $ABCD$ là hình vuông. ❐

Bài 1.39 Về phía ngoài của tam giác ABC dựng các hình vuông $BCMN, ACPQ$ có tâm O và O'.

(a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh $\triangle IOO'$ là tam giác vuông cân.

Lời giải



(a) Gọi L là trung điểm NQ, ta sẽ chứng minh L là điểm cố định.
Thật vậy.
Ta có $O'L = CO = OB, OL = CO' = O'A$ và

$$\widehat{LO'A} = 90^\circ - \widehat{CO'L} = 90^\circ - \widehat{COL} = \widehat{LOB}$$

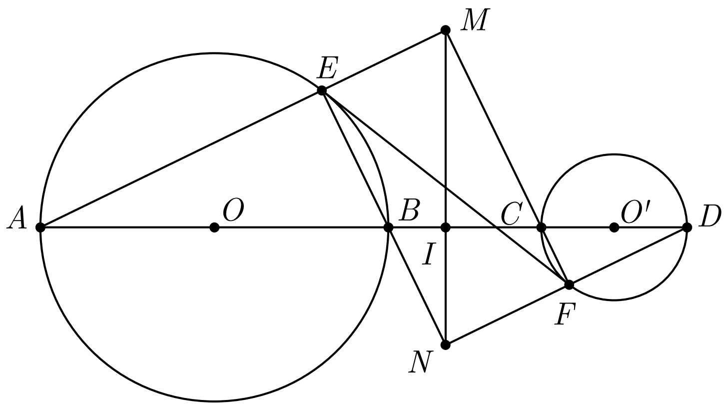
Suy ra $\triangle LO'A = \triangle BOL$. Do đó $LA = LB$ và $\widehat{O'LA} = \widehat{LBO}$. Vì vậy mà

$$\begin{aligned}\widehat{ALB} &= 360^\circ - \widehat{O'LA} - \widehat{OLB} - \widehat{OLO'}\\ &= 360^\circ - \widehat{LBO} - \widehat{OLB} - \widehat{OCO'}\\ &= 360^\circ - 180^\circ + \left(90^\circ - \widehat{COL}\right) - \widehat{OCO'}\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\triangle AIB$ vuông cân tại L.
Mặt khác, dễ thấy rằng L và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB. Suy ra L cố định.
(b) Ta có $\triangle PCB = \triangle ACM$. Suy ra $PB = AM$ và tứ giác $AFCP$ nội tiếp với F là giao điểm của AM và PB
Do đó $\widehat{PFA} = \widehat{PCA} = 90^\circ$.
Vì vậy $AM \perp BP$.
Lại có $PB = 2O'I, PB \parallel O'I$ và $AM = 2OI.AM \parallel OI$. Suy ra OI và $O'I$ vuông góc và bằng nhau.
Vậy $\triangle OIO'$ vuông cân tại I. ❒

$\boxed{\textbf{Bài 1.40}}$ Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ở ngoài nhau biết $OO' = d > R + R'$. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với (O') tại F. Đường thẳng OO' cắt (O) tại A, B và cắt (O') tại C, D (B, C nằm giữa A, D). AE cắt CF tại M, BE cắt DF tại N. Gọi giao điểm của MN với AD là I. Tính độ dài OI.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $BC = d - R - R'$. Do đó

$$IB + IC = d - R - R' \tag{1}$$

Ta thấy tứ giác $EMFN$ là hình chữ nhật, do đó :

$$\widehat{IMF} = \widehat{FEN} = \widehat{EAB} = \widehat{IDF}$$

Suy ra tứ giác $MIFD$ nội tiếp. Do đó $\widehat{MID} = \widehat{MFD} = 90^\circ$ hay $MN \perp AD$.
Vì vậy $\triangle BIN \backsim \triangle CIM$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

$$\frac{IB^2}{IC^2} = \frac{BN^2}{CM^2} = \frac{IB \cdot DB}{IC \cdot AC}$$

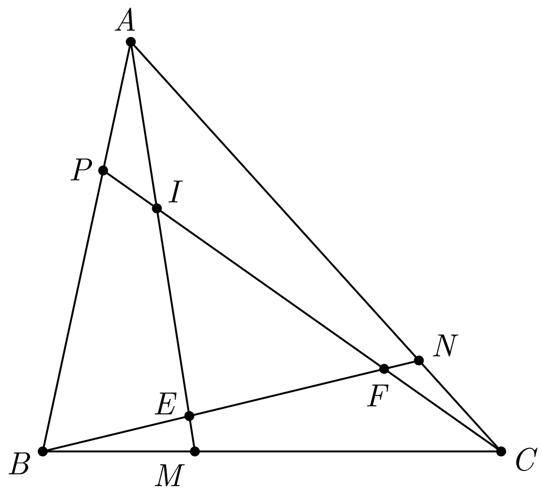
Suy ra

$$\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC} = \frac{d - R + R'}{d + R - R'} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $IB = \dfrac{(d-R)^2 - R'^2}{2d} \Rightarrow OI = OB + BI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$.
Vậy $OI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$. ❒

Bài 1.41 Cho tam giác ABC có diện tích S_0. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = k_1, \dfrac{NC}{NA} = k_2, \dfrac{PA}{PB} = k_3$ $(k_1, k_2, k_3 < 1)$.
Hãy tính diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP.

Lời giải



Gọi EIF là tam giác tạo bởi 3 đoạn thẳng AM, BN, CP. Ta có :

$$\frac{S_{BCN}}{S_0} = \frac{CN}{CA} = \frac{k_2}{k_2 + 1} \text{ và } \frac{S_{BCF}}{S_{BCN}} = \frac{BF}{BN}$$

Suy ra

$$S_{BCF} = S_0 \cdot \frac{BF}{BN} \cdot \frac{k_2}{k_2 + 1} \tag{1}$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABN và cát tuyến PCF, ta có

$$\frac{FB}{FN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

Suy ra

$$\frac{BF}{FN} = \frac{1 + k_2}{k_2 k_3}$$

Tương đương với

$$\frac{BF}{BN} = \frac{1+k_2}{1+k_2+k_2k_3} \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra

$$S_{BFC} = \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} \cdot S_0$$

Chứng minh tương tự :

$$S_{ACI} = \frac{k_3}{1+k_3+k_1k_3} \cdot S_0, S_{AEB} = \frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} \cdot S_0$$

Từ đó ta có diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP là :

$$\begin{aligned} S &= S_0 \left[1 - \left(\frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} + \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} + \frac{k_3}{1+k_3+k_1k_3}\right)\right] \\ &= S_0 \cdot \frac{(k_1k_2k_3-1)^2}{(k_1k_2+k_1+1)(k_2k_3+k_2+1)(k_3k_1+k_3+1)} \end{aligned}$$

❐