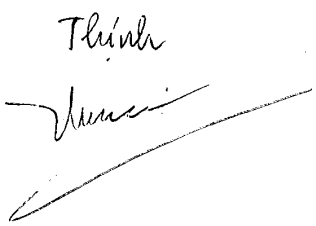
NGUYỄN BÁ ĐANG



NHỮNG ĐỊNH LÍ CHỌN LỌC TRONG HÌNH HỌC PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm gần đây, kì thi Olympic Toán quốc tế (International Mathematical Olympiad - IMO), cũng như kì thi toán vô địch của các nước, hình học phẳng được đánh giá cao, trong mỗi đề thi đều xuất hiện bài hình học phẳng. Trang web của kì thi Olympic Toán (IMO-official.org) còn công khai ghi rõ bốn chủ đề sẽ ra trong kì thi: Đại số, Hình học phẳng, Số học và Tổ hợp. Đặc điểm chung các đề Hình học phẳng không quá khó, đòi hỏi tư duy cao, tính sáng tạo, biết phân tích tổng hợp, kĩ năng vẽ hình. Trong mỗi bài hình phẳng hạn chế tính toán phức tạp, bài ra dù khó đến đâu (chẳng hạn kì thi IMO-52 năm 2011) song vẫn tìm được lời giải hoàn toàn sử dụng những kiến thức cơ bản trong chương trình phổ thông. Ngoài ra, các ví dụ trong sách còn sử dụng một số định lí, tính chất mà sách giáo khoa không đề cập.

Từ những suy nghĩ đó, tác giả biên soạn và giới thiệu cuốn *Những định lí chọn lọc trong hình học phẳng và các bài toán áp dụng*. Phần lớn các định lí có trong sách giáo khoa, cũng như một số định lí nhiều người đã biết nhưng được viết dưới dạng mở rộng hoặc dạng bài tập. Trong cuốn sách này, tác giả không thể đưa tất cả các định lí trong hình học phẳng mà chỉ chọn lọc những định lí thường xuyên vận dụng trong các kì thi để giới thiệu với bạn đọc. Sau mỗi định lí, ngoài nội dung, cách chứng minh và có các ví dụ minh hoạ, cuối mỗi phần còn có các bài tập để bạn đọc tự giải.

Ngoài giới thiệu các định lí, các đường thẳng, các điểm mang tên các nhà khoa học, tác giả còn bổ sung các khái niệm mới và những tính chất quen thuộc mà chúng ta thường áp dụng như: Đường đối trung, tứ giác điều hoà, tính chất của tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp trong tam giác...

Khi viết cuốn sách này, tác giả tôn trọng nội dung các định lí bạn đọc đã biết, nay được bổ sung thêm các cách chứng minh khác đơn giản và có tính ý tưởng cao, đồng thời nêu xuất xứ, người chứng minh định lí. Chẳng hạn như định lí Pythagoras, từ cổ xưa đến nay có đến trên 100 cách chứng minh, tác giả chọn lọc giới thiệu cách chứng minh "đặc biệt" như của danh hoạ Leonardo da Vinci nổi tiếng với cách tô màu và cắt ghép, hay Tổng thống thứ 20 của Mĩ A. Garfield (1831-1881) có lời giải ngắn gọn, dễ hiểu.

Có định lí trong dách giáo khoa từ trước thừa nhận không chứng minh như định lí Thales, nay tác giả lấy ý tưởng của thời Euclid và tham khảo một số thầy đã nhiều năm giảng dạy để chứng minh. Làm rõ một số định lí mà từ xưa chúng ta nhầm lẫn ghép sai tên nhà toán học hoặc năm ra đời của định lí.

Cuốn sách này tác giả không đưa vào độ dài đại số, góc có hướng... để chúng ta nhìn bài toán đúng nghĩa hình học "nguyên sơ", vì thế bài toán phụ thuộc vào cách vẽ hình, lời giải có dài hơn.

Đặc biệt các hình vẽ chuẩn, chính xác không cảm tính, hình vẽ trong cuốn sách đúng nghĩa tinh thần "dựng hình bằng thước và compa".

Quan trọng hơn, tác giả đã tuyển chọn gần 300 bài toán hình học phẳng trong các kì thi toán quốc tế và các kì thi vô địch toán của nhiều nước, đây chính là nội dung chính của cuốn sách muốn giới thiệu với bạn đọc. Các ví dụ minh hoạ vận dụng các định lí vào giải toán hình học, đây là phần khó nhất, các ví dụ được chọn ngoài gắn với nội dung định lí, còn có thêm lời bình. Những ví dụ minh hoạ trong cuốn sách không thể nói là dễ, đòi hỏi bạn đọc phải nắm chắc nội dung tính chất mỗi định lí để vận dụng, thấy rõ "sức mạnh", "vẻ đẹp" và sự kết hợp linh hoạt nhiều định lí trong một bài toán.

Cuốn sách này như một tài liệu giúp cho giáo viên trong quá trình dạy học, nâng cao trình độ chuyên môn, bồi dưỡng học sinh giỏi, ngoại khóa cho học sinh, bổ sung cho học sinh, sinh viên thêm nhiều kiến thức về hình học phẳng để vận dụng vào giải toán hình.

Cuốn sách còn giúp bạn đọc phát triển tư duy, tính sáng tạo, hướng giải mỗi khi gặp bài toán hình học phẳng.

Tuy nhiên, quá trình biên soạn cũng khó tránh khỏi còn hạn chế, rất mong bạn đọc góp ý chân thành cho tác giả và ban biên tập để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong những lần xuất bản sau.

Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS.TS Nguyễn Đăng Phất, Nhà giáo Nhân dân Vũ Hữu Bình, TS. Nguyễn Minh Hà, đặc biệt một số bạn trẻ "ngoại đạo" nhưng rất yêu thích hình học đã cung cấp nhiều tư liệu quý như Cử nhân NguyễnVăn Linh (ĐH Ngoại thương), Kĩ sư Đào Thanh Oai, Kĩ sư Nguyễn Lê Phước (ĐH Bách khoa).

TÁC GIẢ

Chương 1

ĐỊNH LÍ THALES

Thales là nhà toán học đầu tiên của Hi Lạp, ông sinh vào khoảng năm 624 - 547 trước Công nguyên tại thành phố Miletus trên bờ biển Địa Trung Hải. Ông còn là nhà triết học, thiên văn học, ông hướng dẫn các xác định hướng đi biển theo chùm sao Tiểu Hùng Tinh trong một cuốn sách về hàng hải. Ông là một trong bảy nhà hiền triết nổi danh của Hi Lạp cổ đại, chính ông là người giải bài toán đo chiều cao Kim Tự tháp bằng phương pháp đồng dạng. Các tác phẩm của ông phần lớn đều bị thất lạc. Thales là người đưa ra năm định lí cơ bản của hình học.

1. Góc chắn nửa đường tròn thì bằng một vuông.
2. Đường kính chia đường tròn thành hai phần bằng nhau.
3. Hai góc đáy của tam giác cân thì bằng nhau.
4. Hai tam giác nếu có hai cặp góc và một cặp cạnh bằng nhau thì bằng nhau.
5. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

Định lí Thales như một nền tảng cho sự ra đời của đồng dạng, từ đó người ta nhìn thấy bản chất của hình học vật thể, sự bất biến của phép chiếu song song.

Thales qua đời một cách đột ngột khi đang xem một thế vận hội. Trên mộ ông có khắc dòng chữ: "Nấm mồ này nhỏ bé làm sao! Nhưng quang vinh của con người này - ông vua của các nhà thiên văn mới vĩ đại làm sao!".

I. ĐỊNH LÍ THALES

1. Định lí Thales thuận

Định lí. Nhiều đường thẳng song song cắt hai cát tuyến (đường thẳng) d, d' thì tạo ra trên d, d' các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nghĩa là

$$\begin{cases} d \cap a = A, d \cap b = B, d \cap c = C \\ d' \cap a = A', d' \cap b = B', d' \cap c = C' \\ a // b // c \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Từ hệ thức trên ta còn viết dưới dạng các hệ thức:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} ; \frac{AB}{CA} = \frac{A'B'}{C'A'} ; \frac{BC}{CA} = \frac{B'C'}{C'A'}$$

Chứng minh:

(Cách chứng minh này ra đời thời Euclid)

Từ A kẻ đường thẳng song song với d' cắt b và c tại B'' và $C'' \Rightarrow$ các tứ giác $AA'B'B''$, $AA'C'C''$ là hình bình hành

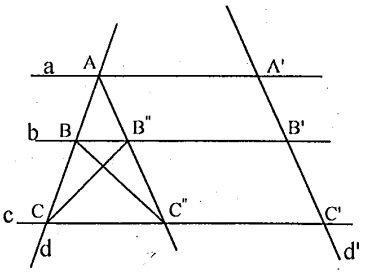
$\Rightarrow AB'' = A'B', AC'' = A'C'$.

Theo tính chất tỉ số diện tích hai tam giác ta có:

$$\frac{S_{ABB'}}{S_{ACB'}} = \frac{AB}{AC}, \frac{S_{ABB'}}{S_{ABC'}} = \frac{AB''}{AC''}$$

Mặt khác $BB' // CC' \Rightarrow S_{BCB'} = S_{BC'B'}$

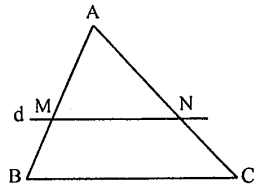
$$\Rightarrow S_{ACB'} = S_{ABC'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB''}{AC''} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$



Euclid sinh ra ở thành Athena (khoảng năm 330-275 trước Công nguyên), vua Ai Cập mời ông về làm việc ở chốn kinh kì Alexandria. Ông được mệnh danh là "cha đẻ của Hình học", bộ sách "Cơ sở" của ông đã đặt nền móng cho môn hình học cũng như toàn bộ toán học cổ đại. Bộ sách gồm 13 cuốn: sáu cuốn đầu gồm các kiến thức về hình học phẳng, ba cuốn tiếp theo có nội dung số học

được trình bày dưới dạng hình học, cuốn thứ mười gồm các phép dựng hình có liên quan đến đại số, 3 cuốn cuối cùng nói về hình học không gian. Euclid đã đưa ra 5 tiên đề làm cơ sở phát triển hình học ngày nay.

Hệ quả. Nếu đường thẳng d song song với cạnh BC của tam giác ABC (không qua đỉnh A) cắt các đường thẳng AB, AC tại M, N thì $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.



2. Định lí Thales đảo

Định lí. Ba đường thẳng a, b, c trong đó $a//b$, cắt hai đường thẳng d, d', định ra trên d, d' những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì $a//c$.

Tức là $\left\{a,b,c;\ a//b;\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}\Rightarrow a//c\right\}$.

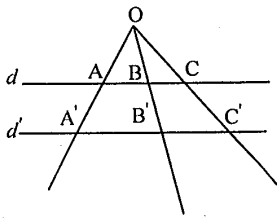
Chứng minh:

Giả sử a không song song với c, từ C dựng đường thẳng c' song song với a cắt d' tại C'', theo định lí Thales thuận $\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C''}$.

Kết hợp giả thiết suy ra $\frac{BC}{B'C'}=\frac{BC}{B'C''}\Rightarrow B'C'=B'C''\Rightarrow C'\equiv C''\Rightarrow a//c$.

3. Các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song

Định lí. Nếu ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại O cắt hai đường thẳng song song d, d' không đi qua O thì chúng định ra trên d, d' hai bộ ba đoạn thẳng tỉ lệ.



Nếu a, b, c đồng quy tại O và $d//d'$

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$ hoặc $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}$

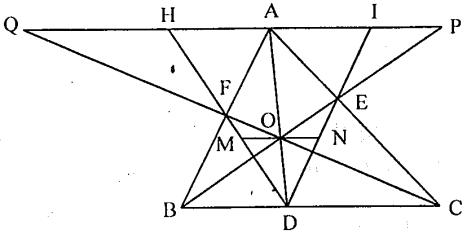
Chú ý: Sách giáo khoa lớp 8 đã đưa đầy đủ định lí Thales trong tam giác, tính chất đường phân giác của tam giác và các trường hợp đồng dạng của hai tam giác, chúng ta áp dụng để giải quyết các ví dụ và bài tập trong cuốn sách này.

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, O là điểm trong tam giác. AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF tại N và M. Chứng minh rằng $OM = ON$.

Giải:

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BO, CO, DE, DF lần lượt tại P, Q, I, H.



Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{AQ}{BC}=\frac{AH}{BD},\ \frac{BC}{AP}=\frac{DC}{AI}$$

Nhân hai đẳng thức $\Rightarrow \frac{AQ}{AP}=\frac{AH}{BD}.\frac{DC}{AI}$

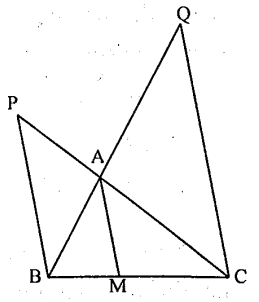
Mặt khác $\frac{AQ}{AP}=\frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AQ}{AP}=\frac{DC}{DB}=\frac{AH}{BD}.\frac{DC}{AI}$

$\Rightarrow \frac{AH}{AI}=1 \Rightarrow AH = AI$, ΔDHI có DA là trung tuyến $\Rightarrow OM = ON$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh BC. Qua B, C dựng các đường thẳng song song với AM cắt AC, AB lần lượt tại P, Q.

Chứng minh rằng $\frac{1}{AM}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{QC}$.

Giải:



Theo giả thiết $AM//PB//QC$, theo định lí Thales

$\Rightarrow \frac{AM}{PB}=\frac{CM}{CB}$ và $\frac{AM}{QC}=\frac{BM}{BC}$, cộng hai vế ta có:

$$\frac{AM}{PB}+\frac{AM}{QC}=\frac{CM}{CB}+\frac{BM}{BC}=\frac{BM+MC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$$

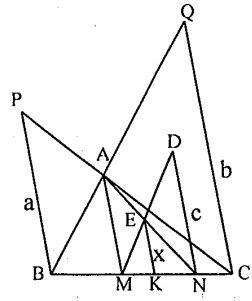
$$\Rightarrow \frac{1}{AM}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{QC}.$$

Ví dụ 3. Cho ba đoạn thẳng có độ dài là *a, b, c*. Dựng đoạn thẳng *x* thoả mãn $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Giải:

Áp dụng *Ví dụ 2* ta dựng đoạn thẳng y thoả mãn $\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

Với đoạn thẳng *BC* tuỳ ý, từ *B* và *C* dựng hai đoạn thẳng song song thoả mãn *BP = a* và *CQ = b*;



- *PC* và *QB* cắt nhau tại *A*, từ *A* kẻ *AM//PB*

$\Rightarrow \frac{1}{AM}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

- *N* là điểm tuỳ ý trên *BC*, qua *N* dựng đường thẳng *ND//PB* và *ND = c*;

- *AN* cắt *DM* tại *E*, từ *E* kẻ *EK//PB*

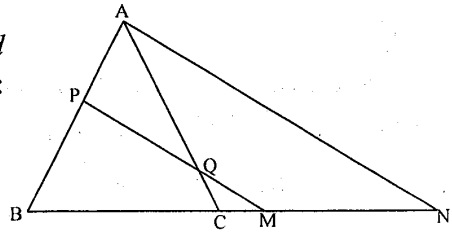
Theo *Ví dụ 2* $\Rightarrow EK = x$.

(Bạn đọc tự chứng minh)

Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC* (*AB = AC*), kéo dài *BC* về phía *C* lấy điểm *M*. Đường thẳng *d* qua *M* cắt cạnh *AB, AC* lần lượt tại *P* và *Q*. Chứng minh rằng $\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CQ}$ không phụ thuộc vào vị trí của *M* và đường thẳng *d*.

Giải:

Qua *A* dựng đường thẳng song song với *d* cắt *BC* tại *N*, theo định lí Thales ta có: $\frac{BM}{BP}=\frac{BN}{BA}$ và $\frac{CM}{CQ}=\frac{CN}{CA}$, trừ hai vế ta có:



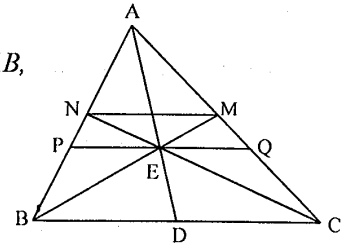
$\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}=\frac{BN}{BA}-\frac{CN}{CA}=\frac{BC}{AB}$.

$\frac{BC}{AB}$ không phụ thuộc vị trí *M* và đường thẳng *d* $\Rightarrow \frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CQ}$ không phụ thuộc vị trí *M* và đường thẳng *d*.

Ví dụ 5. Trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC, lấy điểm E bất kì, đường thẳng BE cắt AC tại M và đường thẳng CE cắt AB tại N.

Chứng minh rằng $MN//BC$.

Giải:



Từ E dựng đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Theo định lí Thales suy ra:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{PE}{BD} \text{ và } \frac{AE}{AD}=\frac{AQ}{AC}=\frac{EQ}{DC}.$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{BD}=\frac{EQ}{DC},\ BD=DC \Rightarrow PE=EQ$$

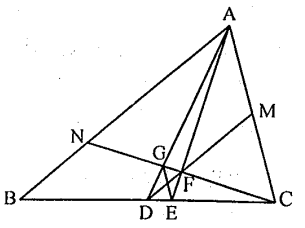
$$\Rightarrow \frac{NP}{NB}=\frac{NE}{NC}=\frac{PE}{BC} \text{ và } \frac{ME}{MB}=\frac{MQ}{MC}=\frac{EQ}{BC} \Rightarrow \frac{NE}{NC}=\frac{ME}{MB} \Rightarrow MN//BC.$$

Từ kết quả này ta suy ra bài toán: Chứng minh rằng trong một hình thang, trung điểm hai cạnh đáy, giao điểm hai đường chéo, giao điểm hai đường thẳng chứa hai cạnh bên nằm trên một đường thẳng.

Kết quả này như một hệ quả được sử dụng chứng minh cho nhiều bài toán khác.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC ($AB>AC$), D là trung điểm BC, phân giác góc A cắt cạnh BC tại E. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt AE, AD lần lượt tại F và G. Chứng minh rằng DF song song với AB, GE song song với AC. Từ đó suy ra DF đi qua trung điểm của GE. (Toán vô địch Nga 1980).

Giải:



Kéo dài DF cắt AC tại M, CF cắt AB tại N, AE là phân giác góc $\widehat{A}$, $CN \perp AE \Rightarrow ACN$ là tam giác cân

$\Rightarrow AN=AC \Rightarrow FC=FN.$

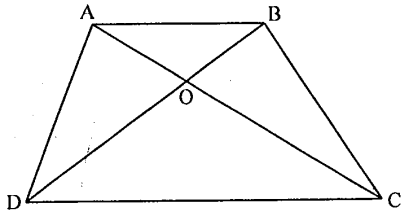
Theo giả thiết $DB=DC \Rightarrow \dfrac{CF}{FN}=\dfrac{CD}{DB}$

$\Rightarrow DM//AB \Rightarrow MA=MC$, $DF//AB \Rightarrow DM$ là trung tuyến của ΔADC.

Theo *Ví dụ 5* $\Rightarrow GE//AC \Rightarrow DF$ đi qua trung điểm EG.

Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$, đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang khi và chỉ khi $OA.OD = OB.OC$.

Giải:



$ABCD$ là thang, giả sử $AB//CD$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA.OD = OB.OC$$

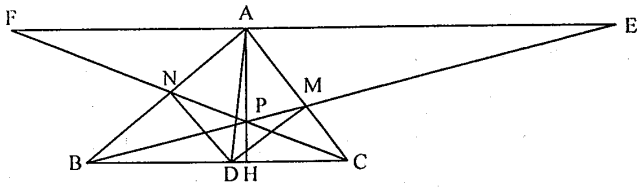
Ngược lại: Giả sử ta có $OA.OD = OB.OC$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD},\ \widehat{AOB} = \widehat{DOC} \Rightarrow \Delta AOB \text{ và } \Delta COD \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{DCO} \Rightarrow AB//CD \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang.}$$

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC, đường phân giác AD, gọi M và N là hình chiếu của D trên AC và AB. Giao điểm của BM và CN là P. Chứng minh rằng AP vuông góc với BC.

Giải:



Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC, đường thẳng BM, CN cắt d tại E và F, gọi H là giao điểm của AP và BC. Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{HC}{HB} = \frac{AF}{AE},\ \frac{AM}{CM} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow AM = \frac{AE.CM}{BC},\ \frac{AN}{BN} = \frac{AF}{BC} \Rightarrow AN = \frac{AF.BN}{BC};$$

$$DM \perp AC, DN \perp AB,\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \Delta AMD = \Delta AND \Rightarrow AN = AM$$

$$\Rightarrow AE.CM = AF.BN \Rightarrow \frac{CM}{BN} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{HC}{HB} = \frac{CM}{BN} \quad (*)$$

Kẻ $AK \perp BC \Rightarrow \Delta DMC$ và ΔAKC là hai tam giác vuông có góc $\widehat{C}$ chung.

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{CM}{CK}$, tương tự $\frac{BD}{AB}=\frac{BN}{BK}$.

AD là phân giác $\Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow \frac{CM}{CK}=\frac{BN}{BK}\Rightarrow \frac{CM}{BN}=\frac{CK}{BK}$, kết hợp (*)

$\Rightarrow K$ trùng với $H\Rightarrow AP\perp BC$.

Ví dụ 9. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo AC, BD. Gọi M, N là trung điểm của BD và AC, H là điểm đối xứng của O qua MN, đường thẳng qua H và song song với MN cắt AD, BC, BD, AC lần lượt tại P, Q, E, F.

Chứng minh rằng $PE = QF$.

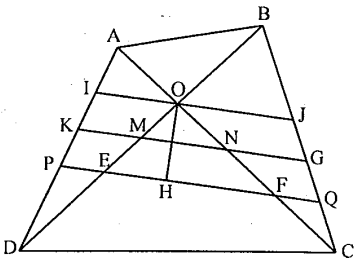
Giải:

Theo giả thiết H đối xứng với O qua $MN\Rightarrow OM = ME$ và $MB = MD$

$\Rightarrow OB = ED$, tương tự $FC = OA$;

Qua O kẻ $IJ//MN$, theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{PE}{OI}=\frac{DE}{DO}=\frac{OB}{DO}\Rightarrow PE=\frac{OB.OI}{DO}$.

Tương tự $QF=\frac{OA.OJ}{CO}$;



MN cắt AD và BC tại K và G

$\Rightarrow \frac{KM}{IO}=\frac{DM}{DO}=\frac{BD}{2DO}$, $\frac{KN}{IO}=\frac{AN}{AO}=\frac{AC}{2AO}$.

Trừ hai đẳng thức $\Rightarrow \frac{MN}{IO}=\frac{1}{2}(\frac{AC}{AO}-\frac{BD}{DO})$.

Tương tự $\frac{MN}{JO}=\frac{1}{2}(\frac{BD}{BO}-\frac{AC}{CO})$.

Để chứng minh $PE = QF\Leftrightarrow \frac{OB.OI}{DO}=\frac{OA.OJ}{CO}\Leftrightarrow \frac{OB.MN}{DO.OJ}=\frac{OA.MN}{CO.OI}$

$\Leftrightarrow \frac{OB}{DO}(\frac{BD}{BO}-\frac{AC}{CO})=\frac{OA}{CO}(\frac{AC}{AO}-\frac{BD}{DO})\Leftrightarrow \frac{BD}{DO}-\frac{OB.AC}{DO.CO}=\frac{AC}{CO}-\frac{OA.BD}{CO.DO}$

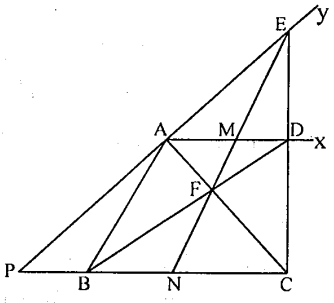
$\Leftrightarrow \frac{BD}{DO}+\frac{OA.BD}{CO.DO}=\frac{AC}{CO}+\frac{OB.AC}{DO.CO}$, hai vế cho kết quả $\frac{AC.BD}{DO.CO}$.

Ví dụ này ngoài vận dụng định lí Thales còn đòi hỏi biến đổi và kẻ thêm hình.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC. Qua đỉnh A bờ AB kẻ tia Ax và tia Ay thoả mãn $Ax//BC$ và tia Ax nằm trong góc $\angle CAy$, từ C kẻ đường thẳng d cắt Ax tại D và Ay tại E, đường thẳng BD cắt AC tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua điểm cố định không phụ thuộc đường thẳng d.

Giải:

Kéo dài tia Ay cắt BC tại P, EF cắt AD tại M và BC tại N.



Theo giả thiết $Ax//BC$, theo định lí Thales ta có:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{NP}{NC} \text{ và } \frac{MA}{MD}=\frac{NC}{NB}$$

$$\Rightarrow \frac{NP}{NC}=\frac{NC}{NB}\Rightarrow \frac{NP}{NP+NC}=\frac{NC}{NC+NB}$$

$$\Rightarrow \frac{NP}{CP}=\frac{NC}{BC}\Rightarrow \frac{CP-CN}{CP}=\frac{NC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{NC}{BC}+\frac{NC}{CP}=1\Rightarrow NC\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CP}\right)=1$$

$\Rightarrow CN=\dfrac{BC.CP}{BC+CP}$, tia Ay cố định $\Rightarrow P$ cố định $\Rightarrow CP$ không đổi

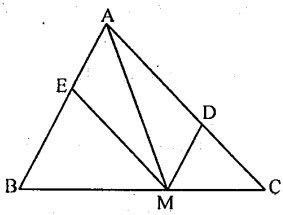
$\Rightarrow$ biểu thức $\dfrac{BC.CP}{BC+CP}$ có giá trị không đổi $\Rightarrow CN$ không đổi

$\Rightarrow$ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định N, không phụ thuộc đường thẳng d.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh BC.

Chứng minh rằng $MA.BC < MB.CA + MC.AB$.

Giải:



Từ M kẻ các đường thẳng song song với AB, AC cắt cạnh AC, AB lần lượt tại D và $E \Rightarrow$ tứ giác $AEMD$ là hình bình hành $\Rightarrow MD = AE$.

Theo định lí Thales $\dfrac{MB}{BC}=\dfrac{ME}{CA}\Rightarrow MB=\dfrac{BC.ME}{CA}$, tương tự $MC=\dfrac{BC.MD}{AB}$.

Thay MB và MC vào biểu thức $MB.CA + MC.AB$ ta có:

$$MB.CA + MC.AB = \frac{BC.ME}{CA}.CA + \frac{BC.MD}{AB}.AB$$

$$= BC(ME + MD) = BC(ME + AE)$$

$$ME + AE > MA \Rightarrow MB.CA + MC.AB > BC.MA.$$

Ví dụ 12. Cho bộ ba điểm thẳng hàng theo thứ tự (A_1, A_2, A_3) và (B_1, B_2, B_3) thoả mãn $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} = k$. Trên A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 lần lượt lấy các điểm C_1, C_2, C_3 thoả mãn $\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2} = \frac{C_3A_3}{C_3B_3}$.

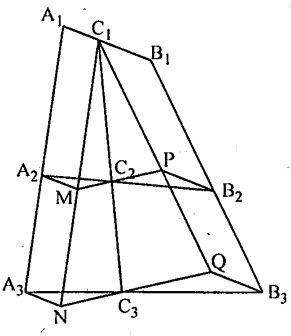
Chứng minh rằng C_1, C_2, C_3 thẳng hàng và $\frac{C_1C_2}{C_1C_3} = k$.

Giải:

Từ C_1 kẻ đường thẳng song song với A_1A_3 trên đó lấy các điểm M, N sao cho A_2M và A_3N song song với A_1C_1, tương tự $B_1B_3 // C_1Q$ và $PB_2 // C_1B_1$, $QB_3 // C_1B_1$

$\Rightarrow A_1C_1MA_2$ là hình bình hành $\Rightarrow A_1A_2 = C_1M$ và $A_1A_3 = C_1N$

$$\Rightarrow \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{C_1M}{C_1N} = k;$$



Hoàn toàn tương tự $\frac{C_1P}{C_1Q} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} = k$

$$\Rightarrow \frac{C_1M}{C_1N} = \frac{C_1P}{C_1Q} \Rightarrow MP // NQ;$$

Với cách dựng trên $\Rightarrow A_1C_1 = A_2M = A_3N$ và $B_1C_1 = B_2P = B_3Q$, $A_2M // B_2P$.

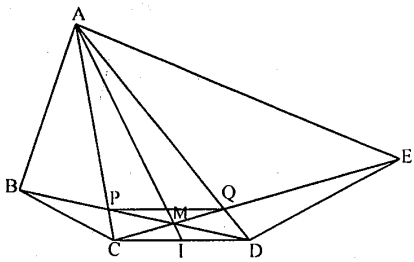
Kết hợp giả thiết $\Rightarrow \frac{A_2M}{B_2P} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2}$, $\angle C_2A_2M = \angle C_2B_2P \Rightarrow \Delta MA_2C_2$ và ΔPB_2C_2 đồng dạng $\Rightarrow \angle A_2C_2M = \angle B_2C_2P \Rightarrow M, C_2, P$ thẳng hàng.

Hoàn toàn tương tự $\Rightarrow \frac{A_3N}{B_3Q} = \frac{A_3C_3}{B_3C_3} \Rightarrow N, C_3, Q$ thẳng hàng và $\frac{C_2M}{C_2P} = \frac{C_3N}{C_3Q}$

$\Rightarrow C_1, C_2, C_3$ thẳng hàng và $\frac{C_1C_2}{C_1C_3} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = k$.

Ví dụ 13. Cho đa giác $ABCDE$, thoả mãn $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ và $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Đường thẳng BD cắt CE tại M. Chứng minh rằng AM đi qua trung điểm CD. (IMO Shortlist).

Giải:



Theo giả thiết $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ và $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$

$\Rightarrow \Delta ABC$, ΔACD, ΔADE đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AD}{AE}$ (1)

Giả sử BD cắt AC tại P, CE cắt AD tại Q.

Từ giả thiết $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAE$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAE \Rightarrow \Delta ABD$ và ΔACE đồng dạng (c.g.c).

AP là phân giác của $\angle BAD$, AQ là phân giác $\angle CAE \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AP}{AQ}$.

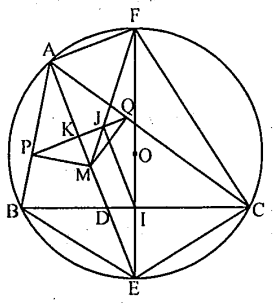
Kết hợp (1) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AQ}{AD}$, theo định Thales đảo $\Rightarrow PQ // CD$.

$\Rightarrow PQDC$ là hình thang $\Rightarrow$ theo tính chất hình thang AM đi qua trung điểm CD

$\Rightarrow IC = ID$.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AD là phân giác của tam giác, M là điểm thay đổi trên AD, P và Q là hình chiếu của M trên AB và AC, I là trung điểm BC, H là hình chiếu của I trên PQ. Chứng minh rằng MH luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi trên AD.

Giải:



AD cắt đường tròn (O) tại $E \Rightarrow EC = EB$

$\Rightarrow EI$ là đường thẳng chứa một đường kính của đường tròn (O) cố định, đường kính này cắt (O) tại F

$\Rightarrow F$ là điểm cố định.

Giả sử MF cắt PQ tại J. Theo giả thiết ta có $\angle PAM = \angle QAM$, $MP \perp AB$, $MQ \perp AC \Rightarrow AM \perp PQ$.

Gọi K là giao điểm AM và PQ, EF là đường kính

$\Rightarrow \angle ECF = 90^0$, $\angle EFC = \angle EAC$ (chắn cung CE)

$\Rightarrow \Delta AQM$ và ΔFCE đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FI}{IE} = \dfrac{AK}{KM}$ (1)

Mặt khác EF là đường kính nên $AE \perp AF \Rightarrow AF // PQ \Rightarrow \dfrac{AK}{KM} = \dfrac{FJ}{JM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{FI}{IE} = \dfrac{FJ}{JM}$, theo định lí Thales đảo $\Rightarrow IJ // AD$

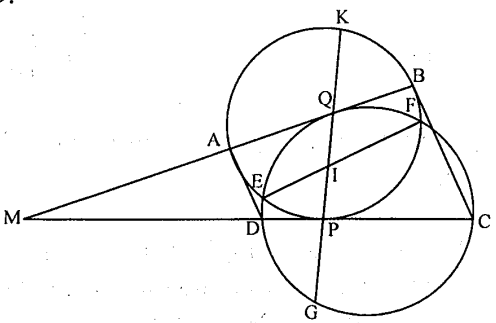
$\Rightarrow IJ \perp PQ \Rightarrow J \equiv H \Rightarrow MH$ luôn đi qua F là điểm cố định.

Ví dụ 15. Cho tứ giác $ABCD$, AB không song song với CD. Đường tròn (C_1) qua A, B và tiếp xúc với CD tại P, đường tròn (C_2) qua C, D và tiếp xúc với AB tại Q, (C_1) và (C_2) cắt nhau tại E và F. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ khi và chỉ khi BC song song với AD.

Giải:

Gọi I là giao điểm EF và PQ, đường thẳng PQ cắt đường tròn (C_1) và đường tròn (C_2) thứ tự tại K và G.

Theo giả thiết AB không song song với CD nên AB và CD giao nhau, gọi giao điểm là M.



Theo hệ thức đường tròn $\Rightarrow MP^2 = MA.MB$ và $MQ^2 = MC.MD$ (1)

Mặt khác ta có $IE.IF = IP.IK = IQ.IG \Rightarrow IP(IQ + QK) = IQ(IP + PG)$

$\Rightarrow IP.QK = IQ.PG$, suy ra $IP = IQ \Leftrightarrow QK = PG \Leftrightarrow PQ.QK = PQ.PG$

$\Leftrightarrow QA.QB = PD.PC$ (2)

Ta có $AQ = MQ - MA$, $QB = MB - MQ$, $DP = MP - MD$ và $PC = MC - MP$.

Từ (2) và kết hợp (1) suy ra: $(MB-MQ)(MQ-MA)=(MP-MD)(MC-MP)$

$\Leftrightarrow MB.MQ-MA.MB-MQ^2+MQ.MA=MP.MC-MP^2-MD.MC+MD.MP$

$\Leftrightarrow MB.MQ+MQ.MA=MP.MC+MD.MP$

$\Leftrightarrow MQ(MB+MA)=MP(MC+MD) \Leftrightarrow MQ^2(MB+MA)^2=MP^2(MC+MD)^2$

$\Leftrightarrow MD.MC(MB+MA)^2=MA.MB(MC+MD)^2$

$\Leftrightarrow (MA.MC-MD.MB)^2=0 \Leftrightarrow MA.MC=MD.MB \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MD}{MC} \Leftrightarrow BC \,//\, AD.$

Ví dụ 16. Cho tam giác nhọn ABC, gọi (O_1), (O_2) là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ứng với góc B và C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với cạnh BC, AB, CA tại M, N, E đường tròn (O_2) tiếp xúc với cạnh BC, AC, AB tại P, Q, F; đường thẳng MN và PQ cắt nhau tại D. Chứng minh rằng AD vuông góc với BC.

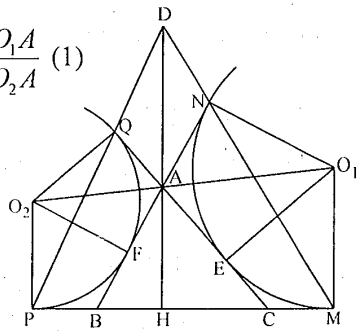
Giải:

Theo giả thiết đường tròn (O_1) tiếp xúc AC tại E, AB tại N suy ra $O_1N \perp AB$, $O_1E \perp AC \Rightarrow \angle O_1AN=\angle O_1AE$;

Đường tròn (O_2) tiếp xúc AB tại F và AC tại Q suy ra $O_2Q \perp AC$, $O_2F \perp AB$

$\Rightarrow \angle O_2AQ=\angle O_2AF \Rightarrow \angle O_1AN=\angle O_2AF \Rightarrow O_1$, A, O_2 thẳng hàng

$\Rightarrow \Delta O_2QA$ và ΔO_1NA đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AQ}=\dfrac{O_1A}{O_2A}$ (1)



Theo giả thiết $O_1M \perp BC$, $O_2P \perp BC$

$\Rightarrow \dfrac{PH}{MH}=\dfrac{d(DPH)}{d(DMH)}=\dfrac{DP\sin\angle PDH}{DM\sin\angle MDH}$.

Mặt khác, áp dụng định lí sin cho ΔABC:

$\dfrac{DP}{DM}=\dfrac{\sin\angle DMP}{\sin\angle DPM}=\dfrac{\cos\angle O_1MN}{\cos\angle O_2PQ}=\dfrac{\sin\angle MNA}{\sin\angle PQA}=\dfrac{\sin\angle DNA}{\sin\angle DQA}$

Áp dụng tiếp định lí sin cho ΔDNA và ΔDQA

$$\frac{PH}{MH}=\frac{\sin\angle DNA\sin\angle PDH}{\sin\angle DQA\sin\angle MDH}=\frac{\sin\angle DNA}{\sin\angle MDH}\frac{\sin\angle PDH}{\sin\angle DQA}$$

$$=\frac{\sin\angle DNA}{\sin\angle NDA}\frac{\sin\angle QDA}{\sin\angle DQA}=\frac{DA}{AN}\frac{AQ}{DA}=\frac{AQ}{AN}.$$

Kết hợp (1) $\Rightarrow \frac{PH}{MH}=\frac{O_2A}{O_1A}\Rightarrow O_2P//DH//O_1M\Rightarrow DH\perp BC.$

II. ĐỊNH LÍ MENELAUS

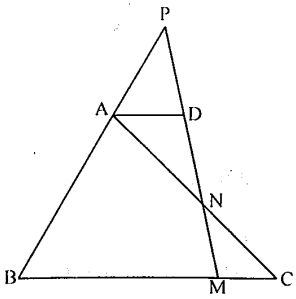
Menelaus là nhà toán học cổ đại ở thế kỉ I sau Công nguyên. Tương truyền ông được sinh vào khoảng năm 70 thời đại Alexandria và mất vào khoảng năm 130. Các quyển sách của Menelaus chỉ còn lại quyển *Sphaerica*. Ông nhắc đến tam giác cầu và các định lí Menelaus. Cuốn "*Hình học cơ bản*" được Thabit Ibn Qurra dịch sang tiếng Ả Rập "*Sách viết về các tam giác*", trong đó có định lí Menelaus ngày nay.

1. Định lí Menelaus

Định lí. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1.$

Chứng minh:

Giả sử M, N, P thẳng hàng. Từ A kẻ đường thẳng song với BC cắt MN tại D.



Theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{NA}{NC}=\frac{AD}{MC}, \frac{PB}{PA}=\frac{BM}{AD}.$

Nhân hai đẳng thức với nhau ta được:

$$\frac{NA}{NC}.\frac{PB}{PA}=\frac{AD}{MC}.\frac{BM}{AD}\Rightarrow\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1.$$

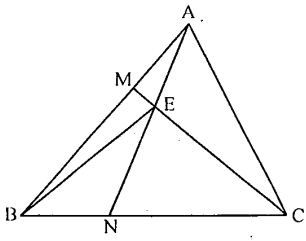
Ngược lại từ $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1$, lấy điểm E trên AB sao cho M, N, E thẳng hàng $\Rightarrow \frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{EA}{EB}=1\Rightarrow \frac{PA}{PB}=\frac{EA}{EB}\Rightarrow P\equiv E.$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, M trên cạnh AB thoả mãn $AM=\frac{1}{2}MB$, N trên cạnh BC thoả mãn $CN = 2NB$, gọi E là giao điểm AN và CM. Tính diện tích của tam giác BEC biết diện tích ABC bằng 1.

Giải:

Áp dụng định lí Menelaus với ΔABN và cát tuyến CME.



$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}.\frac{CB}{CN}.\frac{EN}{EA}=1\Rightarrow \frac{MA}{MB}.\frac{CB}{CN}.\frac{EN}{EA}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{EN}{EA}=1$$

$$\Rightarrow \frac{EN}{EA}=\frac{4}{3}\Rightarrow S_{BEN}=\frac{4}{3}S_{ABE},\ S_{CNE}=\frac{4}{3}S_{AEC}$$

$$\Rightarrow S_{BEC}=\frac{4}{3}(S_{ABE}+S_{ACE})=\frac{4}{3}(S_{ABC}-S_{BEC})$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}S_{BCE}=\frac{4}{3}S_{ABC}\Rightarrow S_{BCE}=\frac{4}{7}.$$

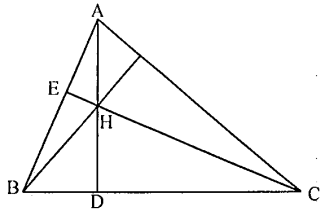
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, trực tâm H đi qua trung điểm của đường cao kẻ từ đỉnh A. Chứng minh rằng $\cos A = \cos B.\cos C$.

Giải:

Theo giả thiết H đi qua trung điểm của đường cao kẻ từ đỉnh A

$\Rightarrow H$ nằm trong ΔABC

$\Rightarrow \Delta ABC$ nhọn, do tính chất ba đường cao đồng quy tại H.



Áp dụng định lí Menelaus đối với ΔABD, cát tuyến CHE:

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID}\frac{CD}{CB}\frac{EB}{EA}=1 \Rightarrow \frac{CD}{CB}\frac{EB}{EA}=1$$

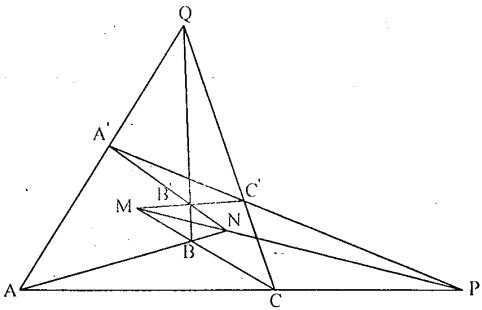
$$\Rightarrow \frac{EA}{AC}=\frac{CD}{AC}\frac{EB}{BC},\ CE\perp AB,\ AD\perp BC \Rightarrow \cos A=\cos C.\cos B.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm của BC và $B'C'$, CA và $C'A'$, AB và $A'B'$ thẳng hàng. (*Định lí Desargues*)

Girard Desargues (1591-1661) là nhà toán học người Pháp được tôn vinh là "ông tổ của hình học xạ ảnh" nhưng ông lại theo học kĩ sư quân giới.

Giải:

Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của BC và $B'C'$, CA và $C'A'$, AB và $A'B'$.



Phần thuận: Giả sử AA', BB' và CC' cắt nhau tại Q, theo định lí Menelaus với ΔQAB cát tuyến $NB'A' \Rightarrow \frac{NA}{NB}.\frac{B'B}{B'Q}.\frac{A'Q}{A'A}=1.$

Tương tự với ΔQBC và ΔQAC, ta có: $\frac{MB}{MC}.\frac{C'C}{C'Q}.\frac{B'Q}{B'B}=1,\ \frac{PC}{PA}.\frac{A'A}{A'Q}.\frac{C'Q}{C'C}=1.$

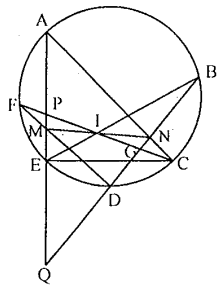
Nhân ba đẳng thức với nhau $\Rightarrow \frac{NA}{NB}.\frac{MB}{MC}.\frac{PC}{PA}=1 \Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng.

Phần đảo: Giả sử AA' và CC' cắt nhau tại Q, áp dụng định lí Menelaus đối với các $\Delta CC'P$, ΔCPM, $\Delta MPC'$ ta có:

$$\frac{QC'}{QC}.\frac{AC}{AP}.\frac{A'P}{A'C'}=1,\ \frac{BC}{BM}.\frac{NM}{NP}.\frac{AP}{AC}=1,\ \frac{B'M}{B'C'}.\frac{A'C'}{A'P}.\frac{NP}{NM}=1.$$

Nhân ba đẳng thức với nhau $\Rightarrow \frac{QC'}{QC}.\frac{BC}{BM}.\frac{B'M}{B'C'}=1$, với $\Delta MCC' \Rightarrow Q, B, B'$ thẳng hàng $\Rightarrow AA'$, CC' và BB' đồng quy.

Ví dụ 4. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F nằm trên đường tròn. AE cắt DF tại M, BE cắt CF tại I và AC cắt BD tại N. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.



Giải:

Giả sử đường thẳng AE cắt đường thẳng CF và BD lần lượt tại P, Q. Đường thẳng BD cắt CF tại G.

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔPQG với các cát tuyến MFD, IEB, NAC ta có:

$$\frac{FP}{FG}.\frac{DG}{DQ}.\frac{MQ}{MP}=1 \Rightarrow \frac{MQ}{MP}=\frac{FG}{FP}.\frac{DQ}{DG}$$

$$\frac{BG}{BQ}.\frac{EQ}{EP}.\frac{IP}{IG}=1 \Rightarrow \frac{IP}{IG}=\frac{BQ}{BG}.\frac{EP}{EQ} \text{ và } \frac{NG}{NQ}.\frac{AQ}{AP}.\frac{CP}{CG}=1 \Rightarrow \frac{NG}{NQ}=\frac{AP}{AQ}.\frac{CG}{CP}.$$

Nhân ba đẳng thức với nhau ta có:

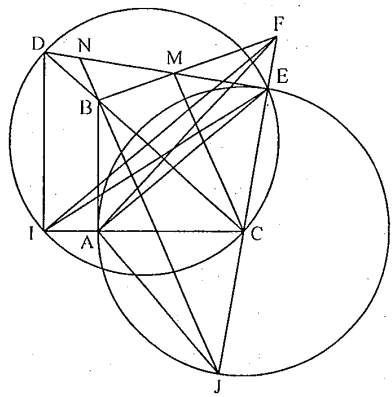
$$\frac{MQ}{MP}.\frac{IP}{IG}.\frac{NG}{NQ}=\frac{FG}{FP}.\frac{DQ}{DG}.\frac{BQ}{BG}.\frac{EP}{EQ}.\frac{AP}{AQ}.\frac{CG}{CP} \quad (*)$$

Mặt khác cát tuyến AE, CF cắt nhau tại $P \Rightarrow PA.PE = PC.PF$;

Tương tự $QD.QB = QE.QA$ và $GF.GC = GD.GB$, thay vào đẳng thức (*)

$\Rightarrow \frac{MQ}{MP}.\frac{IP}{IG}.\frac{NG}{NQ}=1 \Rightarrow M, I, N$ thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^0$), D là điểm trên cạnh BC kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn tâm C, bán kính CA. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường thẳng CE tại F, đường thẳng BF cắt DE tại M, qua B kẻ đường thẳng song song với CM cắt DE tại N. Chứng minh rằng M là trung điểm NE.



Giải:

EC cắt đường tròn tâm C, bán kính CA tại J, dựng đường tròn đường kính DC cắt AC tại I.

Theo giả thiết $DE \perp CE \Rightarrow \angle DIC = 90^0$

$\Rightarrow \angle EIC = \angle EDC$, $AF \perp CD$

$\Rightarrow \angle AFC = \angle EDC \Rightarrow \angle EIC = \angle AFC$

$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

Mặt khác $CA = CE \Rightarrow \angle CEA = \angle CAE = \angle CIF$

$\Rightarrow IF // AE \Rightarrow \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{AI}{AC}$, $\angle A = 90^0 \Rightarrow AB // DI \Rightarrow \dfrac{IC}{IA} = \dfrac{DC}{DB}$, $CF = CI$.

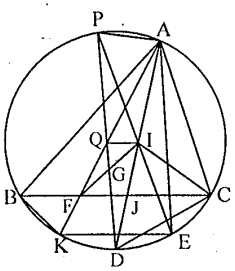
Áp dụng định lí Menelaus trong ΔBFC, cát tuyến DME:

$$\frac{MB}{MF}.\frac{EF}{EC}.\frac{DC}{DB} = 1.$$

$$\frac{MB}{MF}.\frac{AI}{AC}.\frac{IC}{IA} = 1 \Rightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AC}{IC} = \frac{CJ}{CF} \Rightarrow BJ // CM \Rightarrow ME = MN.$$

Ví dụ 6. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, E là điểm trên cung BDC, F trên cạnh BC thoả mãn $\angle BAF = \angle CAE < \dfrac{1}{2}\angle BAC$, gọi G là trung điểm IF. Chứng minh rằng giao điểm của DG và EI nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải:



Gọi P là giao điểm của EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường thẳng AI cắt BC tại J;

AF cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại K, cắt DP tại Q. Theo giả thiết $\angle BAF = \angle CAE < \dfrac{1}{2}\angle BAC$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BK} \Rightarrow CE = BK \Rightarrow BC // KE$;

AD là phân giác góc $A \Rightarrow \angle KAD = \angle DPE$

$\Rightarrow APQI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AQI = \angle API = \angle AKE \Rightarrow QI // KE \Rightarrow QI // KE // BC$

$\Rightarrow \dfrac{QF}{QA} = \dfrac{JI}{IA}$, AI cắt BC tại J, I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow \dfrac{JI}{IA} = \dfrac{CJ}{CA}$;

$\angle BCD = \angle BAD = \angle CAD \Rightarrow \Delta DCJ$ và ΔDAC đồng dạng (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{CJ}{AC} = \dfrac{DC}{DA}$, kết hợp $DI = DC \Rightarrow \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{ID}{AD}$

$$\frac{FQ}{QA} = \frac{JI}{AI} = \frac{CJ}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD} \quad (*)$$

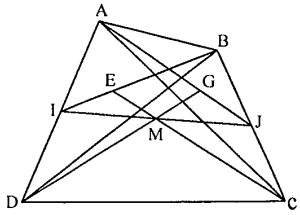
Theo Menelaus với ΔAIF cát tuyến PQD, giả sử PQD cắt FI tại G' ta có:

$\frac{QA}{QF}.\frac{G'F}{G'I}.\frac{DI}{DA}=1$, kết hợp (*) $\Rightarrow \frac{G'F}{G'I}=1 \Rightarrow G'F=G'I \Rightarrow G\equiv G'$

$\Rightarrow DG$ và EI cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$ và I, J trung điểm của AD và BC. Gọi G, E là trọng tâm tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng DG, CE, IJ đồng quy, từ đó suy ra GE song song với CD.

Giải:



G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow AG=2GJ$

Áp dụng định lí Menelaus với ΔAIJ, đường thẳng DG cắt IJ tại $M \Rightarrow \frac{DA}{DI}.\frac{MI}{MJ}.\frac{GJ}{GA}=1.$

$IA=ID \Rightarrow DA=2DI \Rightarrow 2\frac{MI}{MJ}\frac{1}{2}=1.$

$\Rightarrow MI=MJ$, E là trọng tâm ΔABD, hoàn toàn tương tự

$\Rightarrow CE$ đi qua trung điểm của $IJ \Rightarrow$ ba đường thẳng DG, CE, IJ đồng quy.

Áp dụng định lí Menelaus với ΔADG, ứng với ba điểm M, I, J thẳng hàng

$\Rightarrow \frac{IA}{ID}.\frac{MD}{MG}.\frac{JG}{JA}=1 \Rightarrow \frac{MD}{MG}.\frac{1}{3}=1 \Rightarrow \frac{MD}{MG}=3$, tương tự $\frac{MC}{ME}=3$

$\Rightarrow \frac{MD}{MG}=\frac{MC}{ME}$, theo định lí Thales thì EG song song với CD.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC, gọi I là trung điểm của BC. Qua I kẻ đường thẳng d_1 cắt CA, AB tại M, N, và đường thẳng d_2 cắt cạnh CA, AB tại P, Q. Đường thẳng PN cắt cạnh BC tại E và đường thẳng QM cắt cạnh BC tại F.

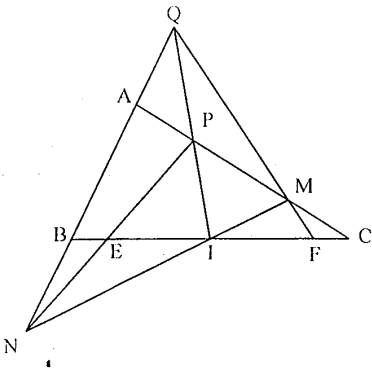
Chứng minh $IE=IF$.

Giải:

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔABC với cát tuyến MNI ta có:

$\frac{IB}{IC}.\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1 \Rightarrow \frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1.$

Với cát tuyến PQI ta có:



$$\Rightarrow \frac{IC}{IB}.\frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC}=1 \Rightarrow \frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}\ (*)$$

Tương tự đối với cát tuyến NEP và QMF:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=1 \text{ và } \frac{FC}{FB}.\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{FC}{FB}.\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}$$ kết hợp với (*) ta có:

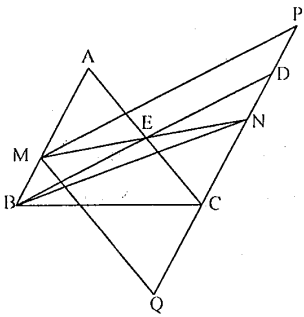
$$\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FB} \Rightarrow \frac{EB}{EB+EC}=\frac{FC}{FB+FC} \Rightarrow \frac{EB}{BC}=\frac{FC}{BC} \Rightarrow EB=FC \Rightarrow IE=IF.$$

Ví dụ 9. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại E. M trên đoạn AB và N trên đoạn CD sao cho M, E, N thẳng hàng. Chứng minh $MN \le \max\{AC, BD\}$.

Giải:

Trường hợp AB//CD.

Từ M kẻ đường thẳng song song với BD cắt CD tại P và đường thẳng song song với AC cắt CD tại Q.



$\Rightarrow$ tứ giác $MPDB$ và $MACQ$ là hình bình hành

$\Rightarrow BD = MP$ và $AC = MQ$.

Ta chứng minh: $MN \le \max\{MP, MQ\}$.

$N \in CD \Rightarrow MN \le \max\{MP, MQ\}$

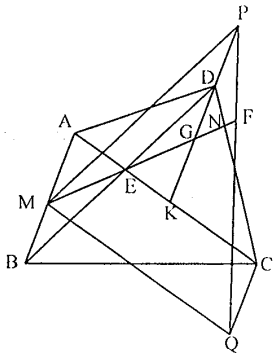
$\Rightarrow MN \le \max\{AC, BD\}$.

Trường hợp AB không song song với CD.

Giả sử $\widehat{A}+\widehat{D}>180^0 \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}<180^0$

Từ D kẻ đường thẳng song song với AB cắt MN, AC tại G và K.

Áp dụng định lí Menelaus đối với ΔDKC với ba điểm $E, G, N \Rightarrow \frac{GK}{GD}\frac{ND}{NC}\frac{EC}{EK}=1.$



$\Rightarrow \frac{GK}{GD}\frac{ND}{NC}=\frac{EK}{EC}<1 \Rightarrow \frac{GK}{GD}<\frac{NC}{ND}$ (1)

$AB//DK \Rightarrow \frac{GK}{GD}=\frac{MA}{MB}$ (2)

Kẻ $CQ//AB$ và $MQ//AC$, $DP//AB$ và $MP//BD$.

$\Rightarrow$ tứ giác $AMQC$ và $BMPD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC=MQ$, $AM=CQ$, và $BD=MP$, $BM=DP \Rightarrow CQ//AB//DP$, gọi I là giao điểm của PQ với CD

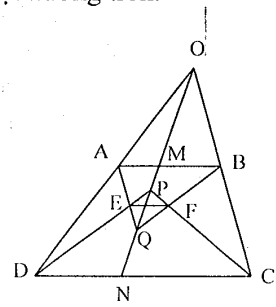
$\Rightarrow \frac{CI}{ID}=\frac{CQ}{DP}=\frac{MA}{MB}$, từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{NC}{ND}>\frac{IC}{ID}=\frac{MA}{MB}$

$\Rightarrow DI \geq DN$, giao điểm MN cắt PQ tại $F \Rightarrow MN \leq MF$

$\Rightarrow MN < \max\{MP, MQ\} = \max\{BD, AC\}$.

Ví dụ 10. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD, AB<CD$). M, N trên AB và CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}$, P và Q trên MN sao cho $\angle DPC=\angle ABC$ và $\angle AQB=\angle BCD$. Chứng minh rằng P, Q, B, C nằm trên một đường tròn.

Giải:



Gọi E là giao điểm AQ và DP, và F là giao điểm BQ và $CP \Rightarrow \angle EPF=\angle ABC$ và $\angle FQE=\angle BCD$.

Ta có $\angle ABC+\angle BCD=180^0 \Rightarrow PFQE$ là tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lí Menelaus đối với ΔDOP với đường thẳng AQ và ΔCOP với đường thẳng BQ:

$\frac{AD}{AO}\cdot\frac{QO}{QP}\cdot\frac{EP}{ED}=1$ và $\frac{BC}{BO}\cdot\frac{QO}{QP}\cdot\frac{FP}{FC}=1 \Rightarrow \frac{AD}{AO}\cdot\frac{QO}{QP}\cdot\frac{EP}{ED}=\frac{BC}{BO}\cdot\frac{QO}{QP}\cdot\frac{FP}{FC}$.

Do $\frac{AD}{AO}=\frac{BC}{BO} \Rightarrow \frac{EP}{ED}=\frac{FP}{FC} \Rightarrow EF // CD // AB.$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ABQ + \angle QBC = \angle EFQ + \angle QBC = \angle EPQ + \angle QBC$

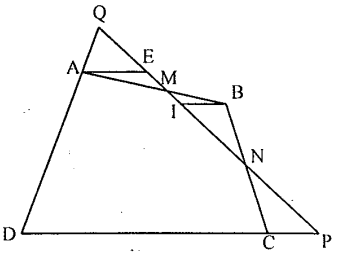
$\angle ABC = \angle DPC = \angle EPQ + \angle QPC \Rightarrow \angle QBC = \angle QPC$

$\Rightarrow P, Q, C, B$ nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 11. Cho tứ giác $ABCD$, đường thẳng d cắt AB, BC, CA, AD lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$.

Giải:

Từ A, B kẻ các đường thẳng song song với CD cắt MN tại E và F, theo định lí Thales ta có:



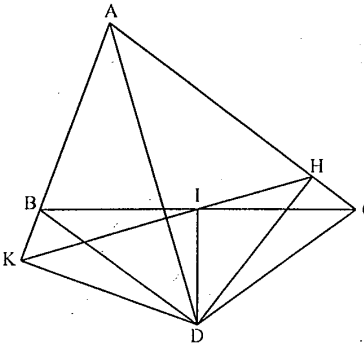
$$\frac{MA}{MB}=\frac{AE}{IB}, \frac{NB}{NC}=\frac{BI}{CP}, \frac{QD}{QA}=\frac{PD}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}\frac{NB}{NC}\frac{QD}{QA}=\frac{AE}{IB}\frac{BI}{CP}\frac{PD}{AE}=\frac{PD}{CP}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}\frac{NB}{NC}\frac{PC}{PD}\frac{QD}{QA}=1.$$

Chú ý, áp dụng cho tứ giác chỉ có chiều thuận.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC ($AC > AB$), đường phân giác góc A và đường trung trực BC cắt nhau tại D, gọi H, K là hình chiếu của D trên AC và AB. Chứng minh rằng cạnh BC, đường trung trực BC và HK đồng quy.



Giải:

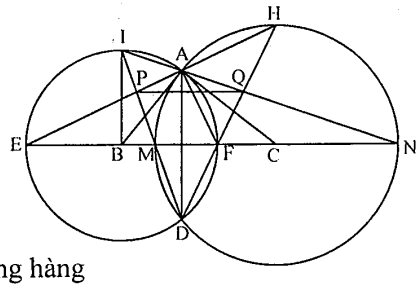
AD là phân giác góc $\angle A \Rightarrow DK = DH$, D nằm trên trung trực $BC \Rightarrow DB = DC$

$\Rightarrow \Delta DHC = \Delta DKB$ bằng nhau $\Rightarrow CH = BK$ và $AH = AK$.

Gọi giao điểm của HK và BC là I áp dụng định lí Menelaus

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC}.\frac{HC}{HA}.\frac{KA}{KB}=1 \Rightarrow IB = IC \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 13. Cho tam giác vuông ABC (vuông tại A), đường tròn tâm B bán kính BA và đường tròn tâm C bán kính CA cắt nhau tại D (D khác A), BC cắt đường tròn tâm (B) tại E, F và cắt đường tròn tâm (C) tại M, N. Đường thẳng DM cắt AE tại P, DQ cắt AN tại Q. Kéo dài DM cắt đường tròn (B) tại I, DF cắt đường tròn (C) tại H. Chứng minh $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ}=\frac{AB}{AC}$.



Giải:

$\angle AEN+\angle ANE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=45^0$

$\angle AEF=\angle ADF,\ \angle ANM=\angle ADM$

$\Rightarrow \angle IDF=\angle IDA+\angle ADF=45^0$

$\Rightarrow \angle IBF=90^0\Rightarrow IB\perp EF\Rightarrow \angle IAE=45^0$

$\Rightarrow I, A, N$ thẳng hàng, tương tự E, A, H thẳng hàng

$\Rightarrow \angle EAN=135^0\Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle APQ=\angle ADQ=\angle AEC\Rightarrow PQ//EN\Rightarrow \frac{AP}{AQ}=\frac{AE}{AN}$.

Áp dụng định lí Menelaus với ΔPEM cát tuyến IAN: $\frac{IP}{IM}\frac{NM}{NE}\frac{AE}{AP}=1$.

Tương tự với $\Delta QFN\Rightarrow \frac{HF}{HQ}\frac{AQ}{AN}\frac{EN}{EF}=1$. Nhân hai đẳng thức trên ta được:

$\frac{IP}{IM}\frac{HF}{IIQ}\frac{NM.AE.AQ}{AP.EF.AN}=1\Rightarrow \frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ}=\frac{EF}{NM}=\frac{AB}{AC}$.

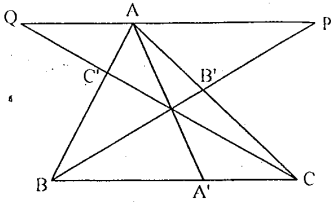
III. ĐỊNH LÍ CEVA

Giovanni Ceva sinh ngày 7/12/1647 tại Milan, mất ngày 15/6/1734 tại Mantua nước Ý. Năm 1686, ông được bổ nhiệm làm giáo sư toán tại trường Đại học Mantua. Phần lớn cuộc đời, Giovanni Ceva giành cho việc nghiên cứu hình học. Định lí mang tên ông được in trong cuốn "*De lineis rectis*" năm 1678 - một trong những kết quả quan trọng về tam giác bằng phương pháp hình học tổng hợp. Ông cũng phát hiện ra định lí Menelaus và được viết lại, ngoài ra ông còn nghiên cứu ứng dụng hình học, cơ học và tĩnh học.

1. Định lí Ceva

Định lí. Ba đường thẳng đi qua đỉnh A, B, C của tam giác ABC đồng quy hoặc cùng song song với nhau và cắt các cạnh BC, CA, AB hay đường kéo dài lần lượt tại A', B', C' thì ta luôn có: $\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1$.

Chứng minh:

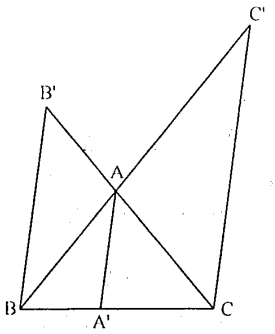


Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BB', CC' lần lượt tại P và Q.

Theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{AB'}{B'C}=\frac{AP}{BC}$, $\frac{BC'}{C'A}=\frac{BC}{QA}$

và $\frac{CA'}{A'B}=\frac{AQ}{AP}$, nhân ba đẳng thức

$\Rightarrow \frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}=1$



Trường hợp $AA'//BB'//CC'$ ta có:

$\frac{AB'}{B'C}=\frac{A'B}{BC'}$, $\frac{BC'}{C'A}=\frac{BC}{CA'}$, $\frac{CA'}{A'B}=\frac{CA'}{A'B}$

Nhân ba đẳng thức $\Rightarrow \frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}=1$.

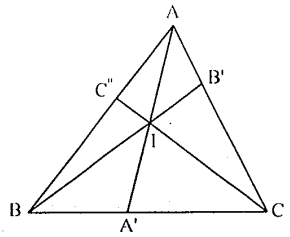
2. Định lí Ceva đảo

Định lí. Nếu các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB hay đường kéo dài của chúng thoả mãn $\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}=1$ thì các đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm hay song song với nhau.

Chứng minh:

Giả sử đường thẳng AA', BB' cắt nhau tại I, đường thẳng CC' không đi qua I; CI cắt AB tại C''.

Theo định lí thuận: $\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC''}{C''A}=1$.



Kết hợp giả thiết ta có: $\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}=1$

$\Rightarrow \frac{BC'}{C'A}=\frac{BC''}{C''A}\Rightarrow C'\equiv C''$

Dễ dàng suy ra nếu $AA'//BB'\Rightarrow AA'//BB'//CC'$.

Năm 1678, người ta đã công bố định lí Ceva dưới dạng:

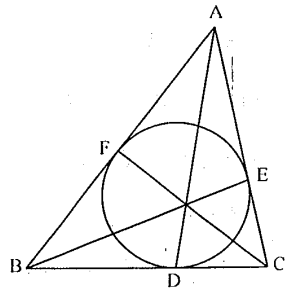
"Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, điều kiện cần và đủ để các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hay song song với nhau là $\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}=1$".

Chú ý: Từ định lí Ceva ta suy ra các tính chất của tam giác là ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường cao đồng quy.

3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng ba đường thẳng nối các đỉnh với tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác đồng quy (điểm này có tên là *điểm Gergaune*).

Giải:



Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh

$\Rightarrow AE=AF$, $BF=BD$ và $CD=CE$

$\Rightarrow \frac{AE}{EC}\frac{CD}{DB}\frac{BF}{FA}=1$.

Theo định lí Ceva thì AD, BE, CF đồng quy.

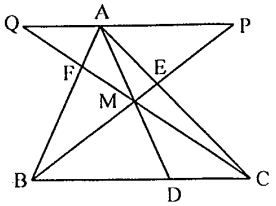
Gergaune là nhà toán học người Pháp, năm 1818 ông đã đưa ra hai bài toán mà ngày nay quá quen thuộc với chúng ta.

Nếu các đường thẳng AD, BE, CF xuất phát từ các đỉnh tam giác ABC cắt nhau tại O nằm trong tam giác thì

$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$ và $\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2$.

Ví dụ 2. Gọi M là điểm trong tam giác ABC, đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tại D, E, F. Chứng minh $\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$ (*Định lí Van Aubel*).

Giải:



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BM và CM tại P và Q

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AQ}{DC}=\frac{AP}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AQ+AP}{DC+BD}=\frac{AQ+AP}{BC};\ \frac{AQ+AP}{BC}=\frac{AQ}{BC}+\frac{AP}{BC}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}.$$

Chú ý:

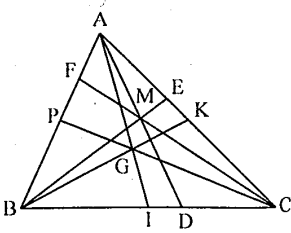
+ Trong trường hợp đặc biệt M là trọng tâm $\Rightarrow \frac{AM}{MD}=2$;

+ M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\frac{AM}{MD}=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=\frac{c+b}{a}$, ta có thể suy ra được nhiều giá trị khác tuỳ theo vị trí của M.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác, AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tại D, E, F. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{AM}{MD}, \frac{BM}{ME}, \frac{CM}{MF}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.

Giải:

Ba trung tuyến AI, BK, CP của tam giác ABC chia tam giác ABC thành 6 tam giác $BGI, CGI, CGK, AGK, AGP, BGP \Rightarrow$ điểm M sẽ nằm ở một trong 6 tam giác đó kể cả trên cạnh, giả sử M thuộc ΔAGK, theo định lí Van Aubel ta có:



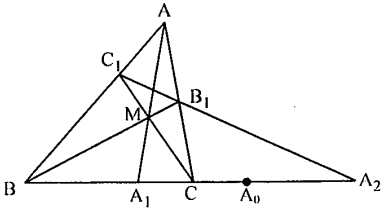
$$\frac{AM}{MD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}\le\frac{AF}{PB}+\frac{AE}{KC}\le 2.$$

Mặt khác $\frac{BM}{ME}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}\geq\frac{BF}{PA}+\frac{BD}{ID}\geq 2.$

Vậy với điểm P ta đã chỉ ra có $\frac{AM}{MD}\leq 2$ và $\frac{BM}{MD}\geq 2$, dấu bằng khi M trùng với G.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tại A_1, B_1, C_1, đường thẳng BC cắt B_1C_1 tại A_2. Gọi A_0 là trung điểm A_1A_2, tương tự ta có B_0, C_0. Chứng minh rằng A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

Giải:



Theo định lí Ceva ta có: $\frac{AC_1}{C_1B}\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

Áp dụng Menelaus với ΔABC và cát tuyến $A_2B_1C_1$: $\frac{A_2C}{A_2B}.\frac{C_1B}{C_1A}.\frac{B_1A}{B_1C}=1$

Nhân hai đẳng thức $\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C}.\frac{A_2C}{A_2B}=1\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{A_2B}{A_2C}$

$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_2B+A_1B}{A_2C+A_1C}=\frac{2(A_0A_1+A_1B)}{2A_0A_1}=\frac{A_0B}{A_0A_1}$ và $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_2B-A_1B}{A_2C-A_1C}=\frac{A_0A_1}{A_0C}$

$\Rightarrow \frac{A_0B}{A_0C}=\frac{A_1B^2}{A_1C^2}$, hoàn toàn tương tự $\frac{B_0C}{B_0A}=\frac{B_1C^2}{B_1A^2}$, $\frac{C_0A}{C_0B}=\frac{C_1A^2}{C_1B^2}$

$\Rightarrow \frac{A_0B}{A_0C}.\frac{B_0C}{B_0A}.\frac{C_0A}{C_0B}=(\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{A_1B}{A_1C})^2=1$ (do $\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{A_1B}{A_1C}=1$)

$\Rightarrow A_0$, B_0, C_0 thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng các đường thẳng AN, BP, CQ, DM đồng quy.

Giải:

Gọi I, J là trung điểm của AC và BD, G là giao điểm của AN và BP;

Áp dụng định lí Ceva đảo đối với ΔACJ ta có: $\frac{AI}{IC}\frac{NC}{NJ}\frac{QJ}{QA}=1.\frac{2}{1}\frac{1}{2}=1.$

$\Rightarrow IJ, AN, CQ$ đồng quy tại G

Áp dụng định lí Menelaus với ΔCIJ cát tuyến AGN:

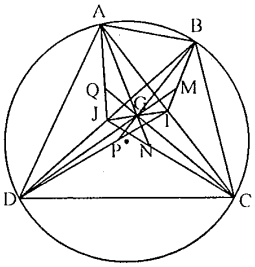
$$\frac{GI}{GJ}\frac{NJ}{NC}\frac{AC}{AI}=\frac{GI}{GJ}\frac{1}{2}\frac{2}{1}=1\Rightarrow GI=GJ$$

Áp dụng định lí Menelaus với ΔBIJ:

$$\frac{MB}{MI}\frac{GI}{GJ}\frac{DJ}{DB}=\frac{2}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{2}=1\Rightarrow D, G, M \text{ thẳng hàng.}$$

Tương tự cho $\Delta DIJ \Rightarrow P, G, B$ thẳng hàng

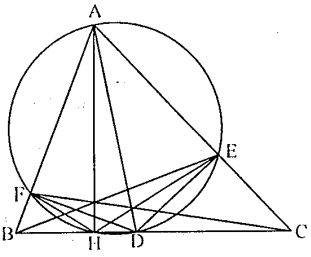
$\Rightarrow AN, BP, CQ, DM$ đồng quy.



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Gọi D, H là chân đường phân giác, đường cao kẻ từ A đến cạnh BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH cắt cạnh AC, AB tại E và F. Chứng minh rằng AH, BE, CF đồng quy.

Giải:

Theo giả thiết A, F, H, D, E nằm trên một đường tròn, $AH \perp BC \Rightarrow AD$ là đường kính của đường tròn $(AHD) \Rightarrow DE \perp AC, DF \perp AB$.



$\angle BAD = \angle DAC \Rightarrow \angle ADE = \angle ADF \Rightarrow AE = AF$

Ta có ΔBFD, ΔBHA đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BH}{BF}$.

ΔCHA, ΔCED đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{CH}{CE}$.

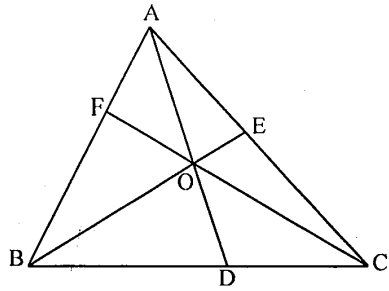
AD là phân giác $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}\Rightarrow \dfrac{BH}{BF}=\dfrac{CH}{CE}$.

$$\frac{BH}{HC}\frac{EC}{EA}\frac{FA}{FB}=\frac{BH.EC}{HC.FB}=1\Rightarrow AH, BE, CF \text{ đồng quy.}$$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F trên các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}=1 \text{ (}\textit{Định lí Ceva dưới dạng sin}\text{).}$$

Giải:



$$\frac{AE}{CE}=\frac{S_{ABE}}{S_{CBE}}=\frac{AB\sin\angle ABE}{BC\sin\angle CBE}.$$

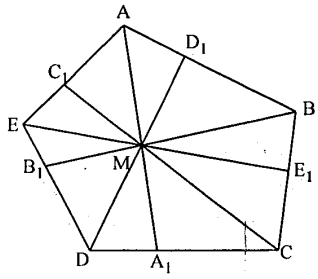
Tương tự $\frac{CD}{BD}=\frac{AC\sin\angle CAD}{AB\sin\angle BAD}$,

$$\frac{BF}{AF}=\frac{BC\sin\angle BCF}{AC\sin\angle ACF}.$$

Nhân ba đẳng thức ta được: $\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}=1.$

Ví dụ 8. Cho đa giác $ABCDE$, M là điểm bất kì trong đa giác, các đường thẳng AM, BM, CM, DM, EM cắt các cạnh CD, DE, EA, AB, BC lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Chứng minh $\frac{AD_1}{D_1B}\frac{BE_1}{E_1C}\frac{CA_1}{A_1D}\frac{DB_1}{B_1E}\frac{EC_1}{C_1A}=1.$

Giải:



Xét ΔAMB ta có $\frac{AD_1}{D_1B}=\frac{MA\sin\angle AMD_1}{MB\sin\angle BMD_1}$. $\left(=\frac{S_{AMH}}{S_{MHB}}\right)$

Tương tự $\frac{BE_1}{E_1C}=\frac{MB\sin\angle BME_1}{MC\sin\angle CME_1}$.

$$\frac{CA_1}{A_1D}=\frac{MC\sin\angle CMA_1}{MD\sin\angle DMA_1},\ \frac{DB_1}{B_1E}=\frac{MD\sin\angle DMB_1}{ME\sin\angle EMB_1},$$

$\frac{EC_1}{C_1A}=\frac{ME\sin\angle EMC_1}{MA\sin\angle AMC_1}$, nhân các đẳng thức với nhau và sử dụng $\angle AMD_1=\angle DMA_1$; … ; $\angle AMC_1=\angle CMA_1$

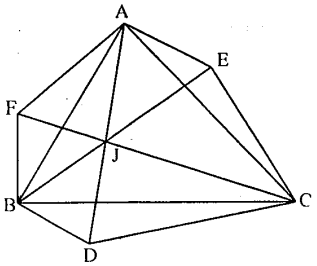
$$\Rightarrow \frac{AD_1}{D_1B}\frac{BE_1}{E_1C}\frac{CA_1}{A_1D}\frac{DB_1}{B_1E}\frac{EC_1}{C_1A}=1.$$

*Định lí này còn có tên là **định lí Ceva mở rộng**, nó đúng cho đa giác có lẻ cạnh. Định lí này có công của nhà toán học người Pháp Poncelet (1788-1867) - người sáng lập ra hình học xạ ảnh.*

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F ở phía ngoài tam giác thoả mãn $\angle BAF = \angle CAE = \alpha$, $\angle ABF = \angle CBD = \beta$, $\angle BCD = \angle ACE = \gamma$.

Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy (Điểm J có tên là *điểm Jacobi*).

Giải:



Ta có AD, BD, CD đồng quy tại D.

Áp dụng định lí Ceva dưới dạng sin:

$$\frac{\sin\angle CBD.\sin\angle BAD.\sin\angle ACD}{\sin\angle ABD.\sin\angle CAD.\sin\angle BCD}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta.\sin\angle BAD.\sin(C+\gamma)}{\sin(B+\beta).\sin\angle CAD.\sin\gamma}=1$$

Tương tự ta có $\frac{\sin\gamma.\sin\angle CBE.\sin(\mathrm{A}+\alpha)}{\sin(\mathrm{C}+\gamma).\sin\angle ABE.\sin\alpha}=1,$

$$\frac{\sin\alpha.\sin\angle ACF.\sin(\mathrm{B}+\beta)}{\sin(A+\alpha).\sin\angle BCF.\sin\beta}=1.$$

Nhân các đẳng thức với nhau $\Rightarrow \frac{\sin\angle BAD.\sin\angle ACF.\sin\angle CBE}{\sin\angle CAD.\sin\angle BCF.\sin\angle ABE}=1$

$\Rightarrow AD$, BE, CF đồng quy.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851), nhà toán học người Đức, ông đã có những phát minh trong lí thuyết số, đại số, phép tính vi phân và lí thuyết phương trình vi phân.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường thẳng qua O cắt cạnh AB, AC tại M và N. Gọi I, P, Q lần lượt là trung điểm MN, BN, CM. Chứng minh rằng bốn điểm O, I, P, Q nằm trên một đường tròn.

2. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tâm I. Gọi D và E là hai tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A và góc B trên hai cạnh tương ứng BC, CA. Đường thẳng BD và CE cắt nhau tại P, và G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng P, G, I thẳng hàng.

3. Cho tam giác nhọn ABC, D là chân đường cao kẻ từ A và H là trực tâm. Gọi I, J thứ tự là trung điểm BH và CH, đường thẳng DI và DJ cắt cạnh AB, AC tại P và Q, đường thẳng PQ cắt BH và CH tại M và N. Chứng minh rằng H, M, N, D nằm trên một đường tròn. (Mỹ 2014).

4. Cho tam giác ABC, AD là phân giác góc A, M trên cạnh AB thoả mãn $\widehat{MDA} = \widehat{ABC}$, N trên cạnh AC thoả mãn $\widehat{NDA} = \widehat{ACB}$. AD và MN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng $AD^3 = AB.AC.AP$. (Indonesia 2014).

5. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, điểm P trong tam giác thoả mãn $\widehat{BPC} = \widehat{BHC}$. Đường thẳng qua B và vuông góc với AB cắt PC tại M, đường thẳng qua C và vuông góc với AC cắt PB tại N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

6. Cho tam giác ABC. M, N trên AB, AC, và P trên cạnh BC sao cho tứ giác $AMPN$ là hình bình hành (MN không song với BC). Đường thẳng MN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D và E. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác DPE.

7. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$), đường tròn đường kính BC cắt AB, AC tại M và N, gọi O là trung điểm cạnh BC. Đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ và góc $\widehat{MON}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác PMB và PNC giao nhau trên cạnh BC. (IMO 2004).

8. Các điểm P và Q được lấy trên BC của tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, $\widehat{QAC} = \widehat{ABC}$. Các điểm M, N lấy trên AP và AQ sao cho P là trung điểm AM, và Q là trung điểm AN. Chứng minh rằng giao điểm của BM và AN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (IMO 2014).

9. Cho nửa đường tròn đường kính AB và O là trung điểm AB, C và D là hai điểm trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Gọi P và Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACO và BDO. Chứng minh rằng $CP.CQ = DP.DQ$.

10. Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M ta kí hiệu $d_a(M)$, $d_b(M)$, $d_c(M)$ lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB. Tìm tập hợp các điểm M bên trong tam giác ABC hoặc trên cạnh tam giác thoả mãn $d_a(M) = d_b(M) + d_c(M)$.

11. Cho tứ giác $ABCD$, I, J trung điểm AD và BC. Gọi G, E là trọng tâm tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng DG, CE, IJ đồng quy; từ đó suy ra GE song song với CD.

Chương 2

ĐỊNH LÍ PYTHAGORAS

Pythagoras sinh trưởng trong một gia đình quý tộc ở đảo Samos ven biển Địa Trung Hải (580 - 500 TrCN). Năm 16 tuổi, Pythagoras nổi tiếng thông minh, đã từng theo học nhà toán học Thales, chính Thales phải kinh ngạc về tài năng của Pythagoras.

Pythagoras đã nhiều năm sống ở Ấn Độ, Babylon, Ai Cập nhờ đó trở nên uyên bác, Pythagoras trở về nước khi đã sang tuổi 50, ông mở trường học dạy 4 bộ môn: Hình học, Số học, Thiên văn, Âm nhạc. Trường phái Pythagoras đã ra đời, mọi người tham gia tổ chức của Pythagoras tự gọi mình là Mathematikoi (nhà toán học). Họ sống không có sở hữu cá nhân và buộc phải ăn chay. Các môn đồ Pythagoras tiến hành các nghi lễ nhằm tự làm trong sạch, tuân theo nhiều quy định khắt khe khiến cho tâm hồn họ tiến lên mức cao gần với thượng đế. Một trong các giáo lí của thuyết này là nghiêm cấm đụng chạm hay ăn hạt đậu dưới mọi hình thức. Truyện kể lại rằng hạt đậu là nguyên nhân dẫn đến cái chết của Pythagoras: bị một băng nhóm tấn công rượt đuổi, Pythagoras vô tình chạy đến một cánh đồng trồng toàn đậu, nhưng ông đã quyết định thà chết còn hơn bước chân vào cánh đồng này. Chính vì vậy, bọn người tấn công đã cắt cổ ông ngay tức khắc.

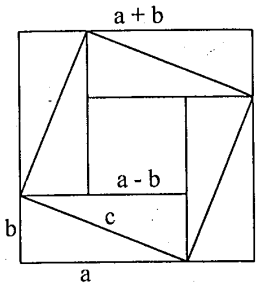
Pythagoras đã chứng minh tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° và nổi tiếng nhất nhờ định lí toán học mang tên ông. Định lí Pythagoras một trong những định lí lâu đời nhất trong lịch sử toán học, là định lí cơ bản và quan trọng của hình học Euclid.

Thời Ai Cập cổ đại người nông dân cần tính toán diện tích các thửa ruộng mỗi khi có trận hồng thuỷ, đây là cơ sở để định lí Pythagoras ra đời, định lí đã có nhiều cách chứng minh khác nhau, trong đó có cách chứng minh khá đẹp của Pythagoras. Mọi người cho rằng nhà toán học Ấn Độ Baudhayana đã tìm ra định lí Pythagoras vào khoảng năm 800 TrCN.

1. Định lí Pythagoras

Định lí. Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông.

(Từ khi định lí ra đời có nhiều cách chứng minh, nhất là phương pháp cắt ghép, sau này bằng phương pháp đồng dạng, toạ độ, vectơ, vi phân... Xin giới thiệu một vài cách chứng minh giúp chúng ta có thêm tư liệu, trong đó có hai cách cổ nhất nằm trong quyển "Chu bễ toán kinh" và của Euclid khoảng 300 năm TrCN).



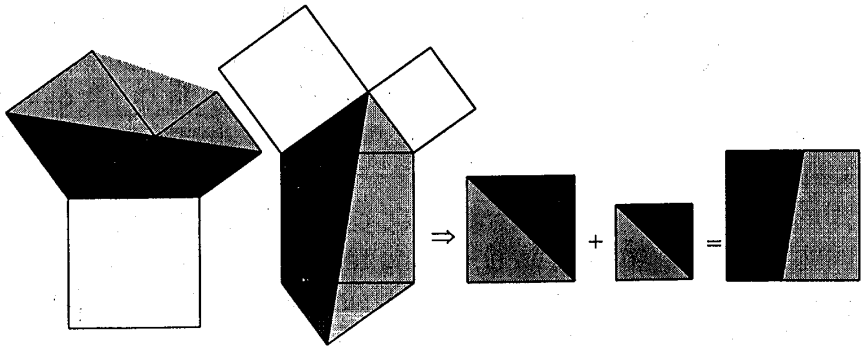
1. Hình vuông lớn có cạnh là $a + b$, bốn góc là bốn tam giác vuông cạnh a, b, ở giữa là hình vuông cạnh c

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 4.\frac{1}{2}a.b + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

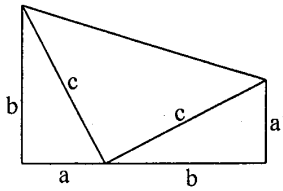
2. Hình vuông nằm trong có cạnh $a - b$

$$\Rightarrow 4.\frac{1}{2}a.b + (a-b)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

3. Cách chứng minh của nhà danh hoạ Leonardo da Vinci.



4. Cách chứng minh của Tổng thống thứ 20 của Mỹ, James A. Garfield (1831-1881). Năm 1876, Garfield đã tìm ra cách chứng minh định lí Pythagoras đẹp và đơn giản.

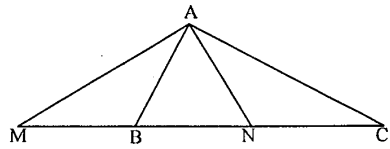


Dùng công thức tính diện tích hình thang:

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\frac{1}{2}a.b+\frac{1}{2}c^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2.$$

5. Cách chứng minh dùng tam giác đồng dạng.

Trên BC lấy hai điểm M, N thoả mãn $BM = BN = AB$



$$\Rightarrow \angle BNA=\angle BAN=90^0-\frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle NAC=90^0-\angle BAN=\frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle AMB=\frac{1}{2}\angle ABC.$$

$$\Rightarrow \Delta MCA,\ \Delta ACN \text{ đồng dạng (g.g)} \Rightarrow \frac{MC}{AC}=\frac{CA}{CN}\Rightarrow \frac{AB+BC}{AC}=\frac{AC}{BC-AB}$$

$$\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2.$$

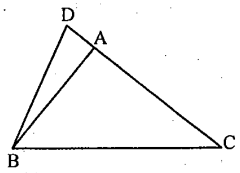
2. Định lí Pythagoras đảo

Định lí. Tam giác ABC thoả mãn $BC^2=AB^2+AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

(*Trong một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông*).

Chứng minh:

Giả sử ΔABC không phải là tam giác vuông, từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt AC tại D,



Theo định lí Pythagoras ta có:

$BC^2=DB^2+DC^2$.

Theo giả thiết $BC^2=AB^2+AC^2$

$$\Rightarrow AB^2-DB^2=DC^2-AC^2\Rightarrow AD^2=AD(DC+AC)$$

$\Rightarrow AD=DC+AC\Rightarrow$ mâu thuẫn

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Sau này, nhiều tài liệu viết định lí Pythagoras dưới dạng:

Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Giải: (dùng vectơ) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

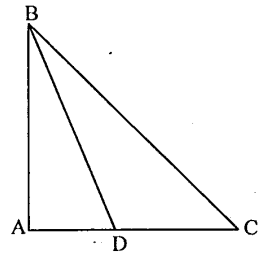
Suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB \perp AC$.

3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $\sin 22^0 30'$, $\cos 22^0 30'$, $\tan 22^0 30'$.

Giải:

Dựng tam giác vuông cân ABC, không ảnh hưởng tới kết quả ta đặt: $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 90^0 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$.



Gọi AD là phân giác góc $\widehat{B}$, theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{BC + AB}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

Áp dụng định lí Pythagoras $\Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$

$$\Rightarrow BD^2 = 1 + (\sqrt{2}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = \sqrt{2(2-\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow \sin 22^0 30' = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos 22^0 30' = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22^0 30' = \frac{\sin 22^0 30'}{\cos 22^0 30'} = \sqrt{2} - 1.$$

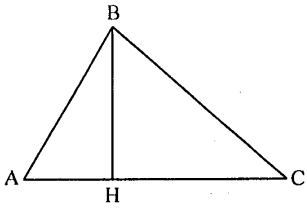
(Từ ví dụ này ta sẽ ra được nhiều bài toán về tính giá trị lượng giác khác).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$\widehat{A} = 60^0$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

$\widehat{A} = 120^0$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

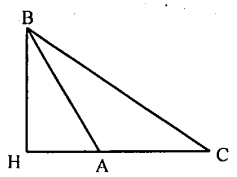
Giải:



Hạ BH vuông góc với AC, $\widehat{A}=60^0 \Leftrightarrow \angle ABH=30^0$

$\Leftrightarrow AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c,\ BH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}.$

Xét ΔBHC, áp dụng định lí Pythagoras:

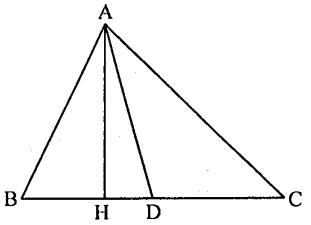


$$a^2=BC^2=BH^2+HC^2=\frac{3c^2}{4}+(b-\frac{c}{2})^2=b^2+c^2-bc.$$

Trường hợp góc $\widehat{A}=120^0$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 3. Tính độ dài các đường trung tuyến tam giác, biểu thị qua ba cạnh tam giác ấy.

Giải:



Gọi AD là trung tuyến tương ứng với cạnh BC

$\Rightarrow DB=DC$

Kẻ $AH\perp BC$, áp dụng định lí Pythagoras

$\Rightarrow AD^2=AH^2+HD^2$

$\Rightarrow AD^2=AB^2-BH^2+HD^2$ (1)

Tương tự $AD^2=AC^2-CH^2+HD^2$ (2)

Cộng (1) và (2) $\Rightarrow 2AD^2=AB^2+AC^2-BH^2-CH^2+2HD^2$

$2AD^2=AB^2+AC^2-(BH+CH)^2+2BH.HC+2HD^2$

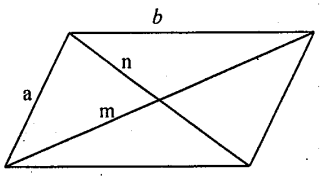
$2AD^2=AB^2+AC^2-BC^2+2(BD-HD)(DC+HD)+2HD^2$

$2AD^2=AB^2+AC^2-BC^2+2(BD^2-HD^2)+2HD^2$

$$2AD^2=AB^2+AC^2-BC^2+\frac{1}{2}BC^2=AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2$$

$\Rightarrow m_a^2=\frac{1}{2}(c^2+b^2)-\frac{1}{4}a^2$; hoàn toàn tương tự ta có:

$$m_b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2)-\frac{1}{4}b^2;\ \ m_c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{4}c^2.$$

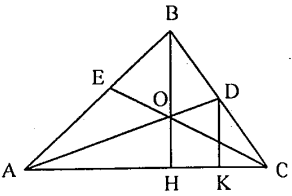


Từ đó ta suy ra: Trong một hình bình hành, độ dài các cạnh là a, b và hai đường chéo m, n.

Ta luôn có $m^2+n^2=2(a^2+b^2)$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC ($BC=a, CA=b, AB=c$). Trung tuyến AD, đường cao BH và phân giác CE đồng quy.

Chứng minh đẳng thức: $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2ab^2$.



Giải:

Xét tam giác vuông BHC:

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = BC^2 - (AB^2 - AH^2)$

$= BC^2 - AB^2 + AH^2 = BC^2 - AB^2 + (CA-CH)^2$

$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.CH \Rightarrow CH = \dfrac{BC^2+CA^2-AB^2}{2CA}$

Tương tự $AH = \dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA} \Rightarrow \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{BC^2+CA^2-AB^2}{CA^2+AB^2-BC^2}$ (1)

CE là phân giác của tam giác ABC, AD, BH, CE đồng quy $\Rightarrow CO$ là đường phân giác của $\Delta ADC \Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BC}{2CA}$ (2)

Từ D kẻ đường thẳng $DK \perp AC \Rightarrow BH // DK \Rightarrow HK = \dfrac{HC}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{HK}{HA} = \dfrac{CH}{2HA}$ (3)

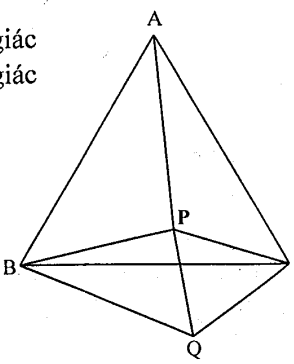
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{BC^2+CA^2-AB^2}{CA^2+AB^2-BC^2} = \dfrac{BC}{CA}$

$\Rightarrow BC^2CA + CA^3 - AB^2CA = CA^2BC + AB^2BC - BC^3$

$\Rightarrow (BC^3+CA^3) + BC^2CA + CA^2BC - AB^2CA - AB^2BC = 2BC.CA^2$

$\Rightarrow (BC+CA)(BC^2+CA^2-AB^2) = 2BC.CA^2 \Rightarrow (a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC, P là điểm trong tam giác đều thoả mãn $PA=5, PB=4, PC=3$. Tính cạnh tam giác đều ABC.



Giải:

Dựng tam giác đều PCQ có cạnh PC;

$\Rightarrow PC = PQ = QC, \widehat{PCQ} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ACP} = \widehat{BCQ}$

$\Rightarrow$ tam giác ACP và tam giác BCQ bằng nhau (c.g.c) $\Rightarrow PA = QB = 5$.

ΔBPQ có $BQ^2 = PB^2 + PQ^2$.

Theo định lí Pythagoras đảo $\Rightarrow \angle BPQ = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{BPQ} + \widehat{QPC} = 90^0 + 60^0 = 150^0$

$\Rightarrow BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2PB.PC\cos 150^0$

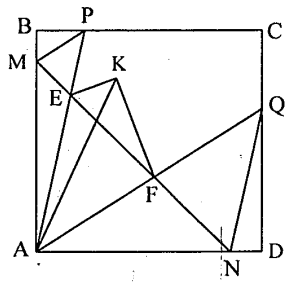
$\Rightarrow BC^2 = 16 + 9 + 12\sqrt{3} = 25 + 12\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ví dụ 6. Cho hình vuông $ABCD$. Góc $\widehat{xAy} = 45^0$ quay quanh đỉnh A, cạnh Ax, Ay cắt cạnh BC và CD thứ tự tại P và Q, kẻ PM song song AQ, QN song song với AP, đường thẳng MN cắt AP tại E và AQ tại F. Chứng minh rằng ME, EF, FN là độ dài 3 cạnh tam giác vuông.

Giải:

Theo giả thiết PM song song với AQ, QN song song với AP

$\Rightarrow \widehat{MPA} = \widehat{PAQ} = \widehat{NQA} = 45^0$



$\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{NQD} \Rightarrow \Delta APB$ và ΔQND đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{ND}{DQ} = \dfrac{BP}{AB} \Rightarrow ND = \dfrac{BP.DQ}{AB}$ (1)

góc $\widehat{BPM} = \widehat{DAQ} \Rightarrow \Delta$BPM đồng dạng ΔDAQ

$\Rightarrow \dfrac{MB}{BP} = \dfrac{QD}{DA} \Rightarrow MB = \dfrac{QD.BP}{DA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ND = MB \Rightarrow AM = AN$.

Gọi K là điểm đối xứng với M qua $AP \Rightarrow AK = AM = AN$, $\widehat{MAP} = \widehat{KAP}$

Mặt khác $\widehat{MAP} + \widehat{QAN} = \widehat{KAP} + \widehat{QAK} = 45^0 \Rightarrow \widehat{QAK} = \widehat{QAN} \Rightarrow K, N$ đối xứng nhau qua $AQ \Rightarrow EM = EK, FK = FN$.

$\Rightarrow \widehat{KEF} + \widehat{KFE} = 180^0 - \widehat{KEM} + 180^0 - \widehat{KFN} = 360^0 - 2(\widehat{MEP} + \widehat{NFQ}) = 90^0$

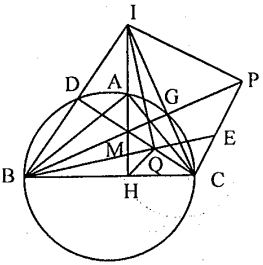
$\Rightarrow \widehat{EKF} = 90^0$.

Theo định lí Pythagoras ta có: $EF^2 = KE^2 + KF^2 = ME^2 + NF^2$.

Theo định lí Pythagoras đảo thì ME, EF, FN là độ dài 3 cạnh tam giác vuông.

Ví dụ 7. Cho tam giác vuông ABC $(\widehat{A}=90^0)$, $AH \perp BC, M \in AH$; $P \in BM$ sao cho $CP = CA$, $Q \in CM$ sao cho $BQ = BA$, CP cắt BQ tại E. Chứng minh $EP = EQ$. (IMO 2012).

Giải:



Theo giả thiết $BQ^2 = BA^2 = BH.BC \Rightarrow BQ$ là tiếp tuyến đường tròn (QHC)

$\Rightarrow \widehat{BQH} = \widehat{QCB}$. Trên AH lấy điểm I sao cho $HM.HI = HC.HB$

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HI} = \dfrac{HM}{HC}$, $IH \perp BC \Rightarrow \Delta IBH, \Delta CMH$ đồng dạng

$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{MCH}$

$\Rightarrow \widehat{BQH} = \widehat{BIH} \Rightarrow QHBI$ nội tiếp $\Rightarrow BQ \perp QI$.

Áp dụng định lí Pythagoras $\Rightarrow QI^2 = BI^2 - BQ^2 = BI^2 - BA^2$.

Từ $CP^2 = CA^2 = CH.CB$, tương tự tứ giác $IPCH$ nội tiếp $\Rightarrow CP \perp IP$

$\Rightarrow IP^2 = CI^2 - CP^2 = CI^2 - CA^2$, $AH \perp BC \Rightarrow BI^2 - BA^2 = CI^2 - CA^2$

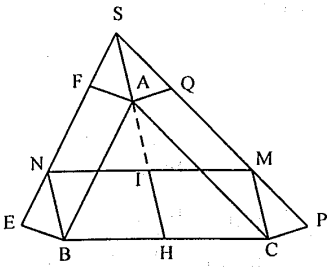
$\Leftrightarrow (BI^2 - BH^2) - (BA^2 - BH^2) = (CI^2 - CH^2) - (CA^2 - CH^2)$

$\Rightarrow QI = PI$, $\widehat{EQI} = \widehat{EPI}$

$\Rightarrow \Delta EQI, \Delta EPI$ bằng nhau $\Rightarrow EP = EQ$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Dựng hình bình hành $BCMN$ cùng phía với đỉnh A, dựng ra phía ngoài hình bình hành $ACPQ$ và $ABEF$ sao cho N trên cạnh EF, M trên cạnh PQ. Chứng minh diện tích hình bình hành $BCMN$ bằng tổng diện tích của hai hình bình hành $ACPQ$ và $ABEF$. (Hình bình hành $BCMN$ ra phía ngoài vẫn cho cùng kết quả).

Giải:



Kéo dài PQ và EF cắt nhau tại S

$\Rightarrow \widehat{SMN} = \widehat{ACB}, \widehat{SNM} = \widehat{ABC}$, $BC = MN$

$\Rightarrow \Delta ABC$ và ΔSNM bằng nhau

$\Rightarrow SM = AC$, $SN = AB$

$\Rightarrow ACMS$ và $ABNS$ là hình bình hành.

$\Rightarrow S_{ACPQ} = S_{ACMS}$ và $S_{ABEF} = S_{ABNS}$.

Kéo dài SA cắt MN, BC tại I và $H \Rightarrow IHCM$, $IHBN$ là hình bình hành.

Ta có $IHCM$ và $SACM$ là hai hình bình hành có cùng đáy và chiều cao

$\Rightarrow S_{IHCM} = S_{SACM}$

Tương tự $S_{IHBN} = S_{SABN}$.

$\Rightarrow S_{BCMN} = S_{SACM} + S_{SABN} = S_{ACPQ} + S_{ABEF}$.

(Có sách cho rằng đây là ý tưởng khởi điểm để chứng minh định lí Pythagoras).

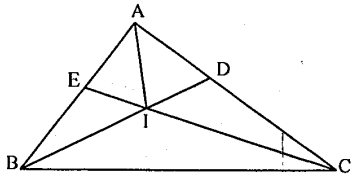
Ví dụ 9. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BI.CI = \frac{1}{2}BD.CE$.

(D, E là thứ tự giao điểm BI và CI với cạnh AC, AB).

Giải:

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow BD$, CE là hai đường phân giác của ΔABC

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow DA = \frac{AC.BA}{BC + BA} \qquad (1)$$



I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow AI$ là phân giác ΔABD

$$\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{IB}{BD} = \frac{AB}{AB + AD} \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) $\Rightarrow \frac{IB}{BD} = \frac{BC + AB}{AB + BC + CA}$.

Tương tự $\frac{IC}{CE} = \frac{BC + AC}{AB + BC + CA} \Rightarrow \frac{IB}{BD}.\frac{IC}{CE} = \frac{(BC + AB)(BC + AC)}{(AB + BC + CA)^2}$.

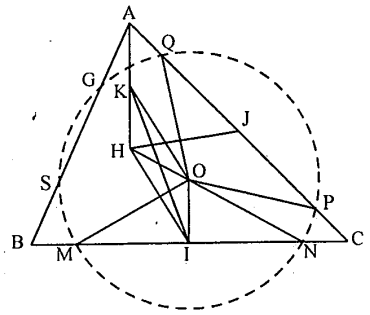
Ta có $BI.CI = \frac{1}{2}BD.CE \Leftrightarrow 2(BC + AB)(BC + AC) = (AB + BC + CA)^2$

$\Leftrightarrow 2(BC^2 + BC.AC + AB.BC + AB.AC) = AB^2 + BC^2 + CA^2 +$

$+ 2(AB.BC + BC.CA + CA.AB) \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^0$.

Ví dụ 10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và H là trực tâm của tam giác. Gọi I là trung điểm BC, đường tròn tâm I bán kính IH cắt cạnh BC tại M và N. Tương tự như đường tròn trên cắt cạnh CA tại P, Q, cắt cạnh AB tại G, S. Chứng minh rằng M, N, P, Q, G, S nằm trên một đường tròn. (IMO 2008).

Giải:



O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \Delta OIM$ là tam giác vuông

Theo định lí Pythagoras $\Rightarrow OM^2 = OI^2 + MI^2$

$\Rightarrow OM^2 = OI^2 + IH^2$

ΔABC nhọn (ta luôn có $AH = 2OI$)

Gọi K là trung điểm $AH \Rightarrow KH = OI$

$\Rightarrow HIOK$ là hình bình hành

$\Rightarrow 2(OI^2 + IH^2) = OH^2 + IK^2$

$$\Rightarrow OM^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + IK^2).$$

Mặt khác, tứ giác $AKIO$ là hình hình hành $\Rightarrow IK = OA = R$

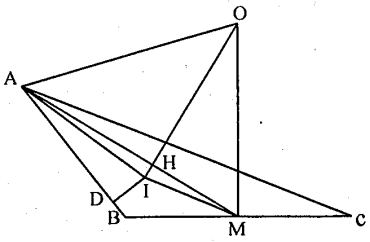
$$\Rightarrow OM^2 = \frac{1}{2}(R^2 + OH^2) \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{2(R^2 + OH^2)}}{2}.$$

Tương tự ta suy ra M, N, P, Q, G, S nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $\frac{\sqrt{2(R^2 + OH^2)}}{2}$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Gọi I, O là tâm đường nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của BC, đường thẳng AM vuông góc với OI.

Chứng minh rằng $\frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Giải:



Gọi bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC là r, R. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

$$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2};$$

Giả thiết $AM \perp OI$, giao điểm AM và OI là H.

Áp dụng định lí Pythagoras với các tam giác vuông *AIH, OMH, AOH, IMH*

$\Rightarrow AI^2 = IH^2 + AH^2,\ OM^2 = OH^2 + HM^2$

$AO^2 = OH^2 + AH^2,\ IM^2 = IH^2 + HM^2.$

$\Rightarrow AI^2 + OM^2 = AO^2 + IM^2 \qquad (1)$

Hạ $ID \perp AB \Rightarrow AD = p - a$

$\Rightarrow \Delta ADI$ vuông $\Rightarrow AI^2 = AD^2 + DI^2 \Rightarrow AI^2 = (p-a)^2 + r^2$, theo giả thiết $MB = MC$.

$$\Rightarrow OM^2 = OB^2 - BM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow IM^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2} - (p-b)\right)^2 = r^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2$$

Thay vào (1) ta được

$$(p-a)^2 + r^2 + R^2 - \frac{1}{4}a^2 = R^2 + r^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{2}(bc - ca - ab) - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}(b^2+c^2) - \frac{1}{2}bc$$

$$\Leftrightarrow ab + ac = 2bc$$

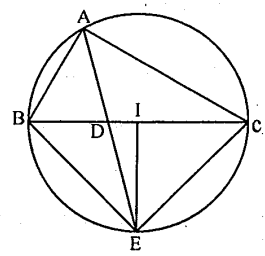
$$\Leftrightarrow \frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Ví dụ 12. Cho tam giác *ABC*, đường phân giác *AD*. Chứng minh rằng $\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{2}{AD^2}$ khi và chỉ khi tam giác *ABC* vuông tại *A*.

Giải:

AD kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại *E*, gọi *I* là trung điểm *BC* $\Rightarrow EI \perp BC$.

$\overset{\frown}{BAE} = \overset{\frown}{BCE} \Leftrightarrow \Delta ADB$ đồng dạng với ΔCDE.



$$\Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE} \Leftrightarrow AD.DE = BD.DC.$$

$$\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{CD^2 + BD^2}{BD^2.CD^2} = \frac{CD^2 + BD^2}{AD^2.DE^2}$$

$$\Leftrightarrow 2DE^2 = BD^2 + CD^2.$$

Mặt khác $BD^2 + CD^2 = (BI - DI)^2 + (BI + ID)^2 = 2(BI^2 + DI^2)$.

$\Leftrightarrow DE^2 = BI^2 + DI^2$, theo định lí Pythagoras $\Rightarrow DE^2 = DI^2 + EI^2$

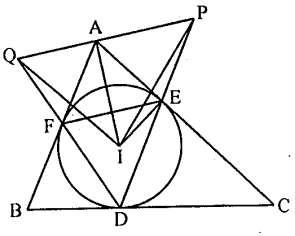
$\Leftrightarrow BI^2 = EI^2 \Leftrightarrow BI = EI \Leftrightarrow EI = BI = CI$

$\Leftrightarrow \Delta BEC$ là tam giác vuông $\Leftrightarrow BC$ là đường kính $\Leftrightarrow AB \perp AC$.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với EF cắt đường các đường thẳng DE và DF tại P và Q. Chứng minh góc $\angle PIQ < 90^0$ (IMO).

Giải:

D, E, F là các tiếp điểm của các cạnh với đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow \angle EFD = \angle CED$, $\angle FED = \angle BFD$



$EF // PQ \Rightarrow \angle EFD = \angle AQF$, $\angle FED = \angle APE$.

Mặt khác $\angle PEA = \angle CED$, $\angle AFQ = \angle BFD$

$\Rightarrow \Delta FQA, \Delta PEA$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{QA}{EA} = \dfrac{AF}{AP}$

$\Rightarrow AE.AF = AP.AQ \Rightarrow AE^2 = AP.AQ$.

Có $AI \perp EF \Rightarrow AI \perp PQ$.

Áp dụng định lí Pythagoras đối với tam giác AIP và AEI ta có:

$IP^2 = PA^2 + AI^2 = PA^2 + IE^2 + AE^2 > PA^2 + AE^2 \Rightarrow IP^2 > PA^2 + AE^2$;

Tương tự $IQ^2 > AQ^2 + AE.^2$

$IP^2 + IQ^2 > PA^2 + AE^2 + AQ^2 + AE^2 = PA^2 + 2AE^2 + AQ^2$

$= PA^2 + AQ^2 + 2AP.AQ = PQ^2$

$\Rightarrow \angle PIQ < 90^0$.

Ví dụ 14. Tính diện tích tam giác có các đường cao 12, 15, 20.

Giải:

Gọi ba cạnh tam giác là $a, b, c \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{3}$

$\Rightarrow a = 5k, b = 4k, c = 3k$ với k là số thực

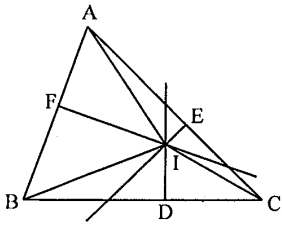
$\Rightarrow a^2 = 25k^2, b^2 = 16k^2, c^2 = 9k^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Theo định lí Pythagoras đảo thì tam giác đã cho là tam giác vuông.

$\Rightarrow$ hai đường cao lớn nhất chính là cạnh góc vuông $\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}.15.20 = 150$.

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F, qua D dựng đường thẳng d_1 vuông góc với BC, qua E dựng đường thẳng d_2 vuông góc với AC, qua F dựng đường thẳng d_3 vuông góc với AB. Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 đồng quy khi và chỉ khi $DB^2 + EC^2 + FA^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$ (*Định lí Carnot*).

Giải:



Thuận: Giả sử d_1, d_2, d_3 đồng quy tại I;

Theo định lí Pythagoras ta có:

$DB^2 = IB^2 - ID^2$, $EC^2 = IC^2 - IE^2$, $FA^2 = IA^2 - IF^2$

Cộng các đẳng thức ta được:

$DB^2 + EC^2 + FA^2 = IB^2 - ID^2 + IC^2 - IE^2 + IA^2 - IF^2$

$= (IC^2 - ID^2) + (IA^2 - IE^2) + (IB^2 - IF^2) = DC^2 + EA^2 + FB^2$

$\Rightarrow DB^2 + EC^2 + FA^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$

Đảo: Giả sử D, E, F thoả mãn $DB^2 + EC^2 + FA^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$;

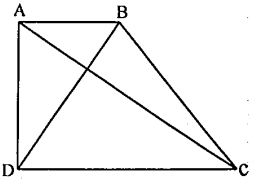
Gọi J là giao điểm của d_1, d_2 và H là hình chiếu của J trên AB

$\Rightarrow DB^2 + EC^2 + HA^2 = DC^2 + EA^2 + HB^2 \Rightarrow FA^2 - FB^2 = HA^2 - HB^2 \Rightarrow H \equiv F.$

Hầu tước Carnot (1753-1823) là nhà toán học, kĩ sư, chính trị gia, nhà chỉ huy quân sự người Pháp. Ông là cha của Nicolas Léonard Sadi Carnot - nhà vật lí nổi tiếng. Lazare Carnot là người đưa ra định lí Carnot, trong đó ông phát biểu rằng tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác nhọn đến các cạnh của tam giác đó bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Ví dụ 16. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($AB//CD$, $AD \perp DC$) và hai đường chéo vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $AD^2 = AB.CD$.

Giải:



$AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$.

Áp dụng định lí Pythagoras cho ΔADC, ΔABD ta có:

$S^2_{ABCD} = \frac{1}{4} AC^2 BD^2 = \frac{1}{4}(AD^2 + DC^2)(AB^2 + AD^2)$.

$$S^2_{ABCD} = \frac{1}{4}\left[AD^4 + AD^2(AB^2 + DC^2) + AB^2CD^2\right].$$

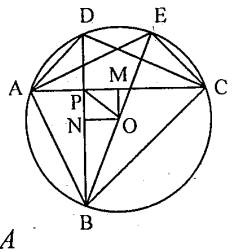
Mặt khác $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD(AB+CD) \Rightarrow S^2_{ABCD} = \frac{1}{4}AD^2(AB+CD)^2$

$\Rightarrow AD^4 + AD^2(AB^2 + DC^2) + AB^2CD^2 = AD^2(AB+CD)^2$

$\Leftrightarrow 2AB.CD.AD^2 = AD^4 + AB^2.CD^2$

$\Leftrightarrow (AD^2 - AB.CD)^2 = 0 \Rightarrow AD^2 = AB.CD$.

Ví dụ 17. Cho điểm P trong đường tròn O, Trong tất cả các tứ giác nội tiếp đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P. Xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất. (VMO 1997).



Giải:

BE là đường kính đường tròn.

Đặt $p = AB + BC + CD + DA$.

ΔABE và ΔPAD là hai tam giác vuông có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \frac{AB}{PA} = \frac{BE}{AD} \Rightarrow AB.AD = 2R.PA$

Tương tự ΔCBE và ΔPCD đồng dạng $\Rightarrow CB.CD = 2R.PC$

$\Rightarrow AB.AD + CB.CD = 2R(PA + PC) = 2R.AC$

Theo giả thiết $AC \perp BD \Rightarrow AE = CD,\ AD = CE$.

Áp dụng định lí Pythagoras với ΔABE ta có:

$AB^2 + CD^2 = AB^2 + AE^2 = 4R^2$, $AD^2 + BC^2 = CE^2 + BC^2 = 4R^2$.

Gọi M, N là trung điểm AC và $BD \Rightarrow OM \perp AC,\ ON \perp BD$

$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 4AM^2 + 4BN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) = 8R^2 - 4OP^2$

Đặt $OP = d \Rightarrow d$ không đổi, mặt khác:

$AC^2BD^2 = 16AM^2BN^2 = 16(R^2 - OM^2)(R^2 - ON^2) = 16(R^4 - R^2d^2 + OM^2ON^2)$

Bình phương p ta có:

$p^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2 + 2(AB.AD + BC.CD) + 2(AB.BC + AD.DC) +$

$+2(AB.CD + AD.BC) = 8R^2 + 2AC.BD + 4R(AC + BD) =$

$= 8R^2 + 2AC.BD + 4R\sqrt{8R^2 - 4d^2 + 2AC.BD}$.

Thay $AC.BD = 4\sqrt{R^4 - R^2d^2 + OM^2ON^2}$ ta được:

$$p^2 = 8R^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2 + OM^2ON^2} + 4R\sqrt{8R^2 - 4d^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2 + OM^2ON^2}}$$

p phụ thuộc vào $OM^2.ON^2 \Rightarrow p$ nhỏ nhất khi $OM^2.ON^2 = 0$

$\Rightarrow AC$ hoặc BD là đường kính của đường tròn $\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của

$$p = \sqrt{8R^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2} + 4R\sqrt{8R^2 - R^2d^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2}}}$$

$$= \sqrt{8R^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2} + 4R\sqrt{4R^2 + 4(R^2 - d^2) + 8R\sqrt{R^2 - d^2}}}$$

$$= \sqrt{8R^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2} + 4R(2\mathrm{R} + 2\sqrt{R^2 - d^2})} = 4\sqrt{R^2 + R\sqrt{R^2 - d^2}}.$$

Những điều bạn chưa biết:

Bộ ba số Pythagoras trong tập các số tự nhiên nhỏ hơn 100

Một bộ ba số nguyên dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 = c^2$ được gọi là bộ số Pythagoras. Khi đó, ta viết bộ ba đó là (a, b, c). Nếu (a, b, c) là bộ ba số Pythagoras, thì cả bộ ba (ka, kb, kc) với số nguyên dương k bất kì cũng là bộ số Pythagoras. Một bộ ba số Pythagoras được gọi là bộ ba số Pythagoras nguyên tố nếu a, b và c là các số nguyên tố cùng nhau.

Tên gọi của các bộ ba số này xuất phát từ định lí Pythagoras. Các bộ ba số Pythagoras có thể lấy làm độ dài các cạnh của tam giác vuông với 2 cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Tuy nhiên, độ dài các cạnh của một tam giác vuông không tạo thành bộ ba số Pythagoras nếu chúng không là các số nguyên. Chẳng hạn, tam giác với các cạnh a = b = 1 và $c = \sqrt{2}$ là tam giác vuông, nhưng $(1, 1, \sqrt{2})$ không là bộ ba số Pythagoras vì $\sqrt{2}$ không là số nguyên.

Không có bộ ba số Pythagoras nào có 2 số chẵn và cũng không có bộ số Pythagoras nào có 3 số liền nhau (trừ 3, 4 và 5).

Có 16 bộ ba số Pythagoras nguyên tố với c < 100 là:

(3, 4, 5); (5, 12, 13); (7, 24, 25); (8, 15, 17); (9, 40, 41); (11, 60, 61); (12, 35, 37); (13, 84, 85); (16, 63, 65); (20, 21, 29); (28, 45, 53); (33, 56, 65); (36, 77, 85); (39, 80, 89); (48, 55, 73); (65, 72, 97).

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^0$) có diện tích bằng 1. Dựng ra phía ngoài các hình vuông có cạnh là AB, AC, BC, gọi tâm các hình vuông là D, E, F. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF không nhỏ hơn 2. (Kvan 6-2006).

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O, gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC. Giả sử $\widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} + 30^0$. Chứng minh rằng $\widehat{CAB} + \widehat{COH} < 90^0$.

3. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$, $\widehat{A} < 60^0$). Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = \widehat{A}$, E là giao điểm của đường trung trực BD và đường thẳng qua A song song với BC. Kéo dài AC về phía A, lấy điểm P sao cho $PA = 2AC$. Chứng minh rằng đường thẳng qua E vuông góc với AC, đường thẳng qua P vuông góc với AB và đường thẳng BD đồng quy.

4. Cho tam giác ABC, gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A và I, D, E là các tiếp điểm của (J) với BC, AC, AB, đường thẳng BJ cắt ID tại M và đường thẳng CJ cắt EI tại N, đường thẳng JC cắt IE tại N. Đường thẳng AM, AN cắt cạnh BC tại P và Q. Chứng minh $IP = IQ$. (IMO 2012).

Chương 3

ĐỊNH LÍ PTOLEMY

Ptolemy Claudius (khoảng 100-178) là nhà toán học cổ Hi Lạp, nhà thiên văn học. Ông là tác giả của "Cơ sở toán học to lớn của thiên văn học" gồm 13 tập. Trong các tác phẩm, ông đã trình bày lượng giác phẳng và lượng giác cầu. Đặc biệt định lí Ptolemy mang tên ông nêu ra đẳng thức liên hệ giữa đường chéo và các cạnh của tứ giác nội tiếp.

Thời gian đó Ptolemy là người ủng hộ thuyết trái đất hình cầu và xây dựng nên mô hình thái dương hệ theo thuyết này, theo quan niệm cũ lại tin rằng trái đất là tâm của vũ trụ, mặt trời, mặt trăng và các ngôi sao khác đều quay quanh cái tâm này theo quỹ đạo hình tròn hoàn hảo.

I. ĐỊNH LÍ PTOLEMY

1. Định lí. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn, khi đó ta có đẳng thức: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Chứng minh:

Tại đỉnh A dựng ra phía ngoài góc $\angle BAx = \angle CAD$, tia Ax cắt cạnh BC tại E, tứ giác $ABCD$ nội tiếp

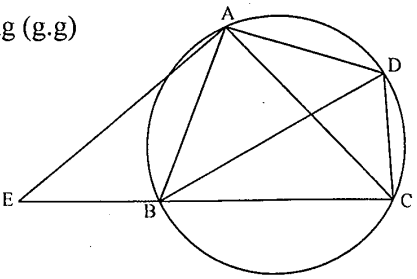
$\Rightarrow \angle EBA = \angle ADC$.

$\Rightarrow \Delta ABE, \Delta ADC$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EB}{CD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow EB = \frac{AB.CD}{AD} \quad (1)$$

$\angle ADB = \angle ACB \Rightarrow \Delta EAC, \Delta BAD$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow EC = \frac{BD.AC}{AD} \quad (2)$$



Mặt khác $EC = EB + BC$ thay (1), (2) vào

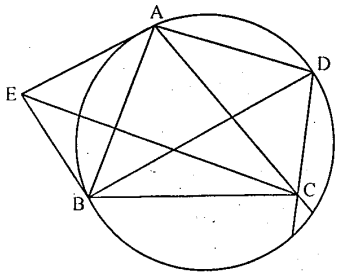
$$\Rightarrow \frac{BD.AC}{AD} = \frac{AB.CD}{AD} + BC$$

$$\Rightarrow BD.AC = AB.CD + BC.AD.$$

Trong trường hợp tứ giác $ABCD$ không là tứ giác nội tiếp, khi đó giả sử C không thuộc đường tròn. Gọi E là điểm thoả mãn

$\angle EAB = \angle CAD, \angle AEB = \angle ADC \Rightarrow E \notin BC$

$\Rightarrow EC < EB + BC.$



Ta có ΔABE, ΔADC đồng dạng và ΔEAC, ΔBAD đồng dạng, thay (1) và (2) vào bất đẳng thức trên ta được:

$AB.CD + AD.BC > AC.BD$ (gọi là *bất đẳng thức Ptolemy*).

Nhận xét: Tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình chữ nhật $ABDC$, theo định lí Ptolemy ta có:

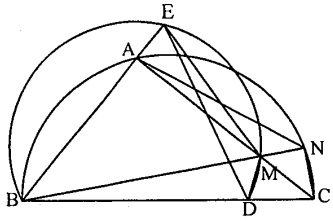
$AC.BD + AB.CD = BC.AD \Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow$ định lí Pythagoras là trường hợp đặc biệt của định lí Ptolemy.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cạnh BC, E là điểm trên cạnh kéo dài của AB sao cho $BD = BE = AC$, đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt cạnh AC tại M, BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại N. Chứng minh rằng $AN + NC = BM$.

Giải:



Tứ giác $BEMD$ và tứ giác $ABCN$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle CBN = \angle CAN, \angle DBM = \angle DEM$

$\Rightarrow \angle CBN = \angle CAN = \angle DEM.$

Mặt khác $\angle ANC = 180^0 - \angle ABC = \angle EMD$

$\Rightarrow \Delta ANC, \Delta EMD$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{EM} = \dfrac{NC}{MD} = \dfrac{AC}{ED} = k$

$EM = \dfrac{AN}{k}, \ MD = \dfrac{NC}{k}, \ ED = \dfrac{AC}{k}.$

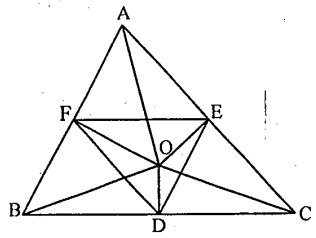
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $BEMD$:

$BM.ED = BE.MD + BD.ME \Rightarrow BM.AC = BE.NC + BD.AN.$

Theo giả thiết $BD = BE = AC \Rightarrow AN + NC = BM.$

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp là r, R. Gọi khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến các cạnh BC, AC, AB là x, y, z. Chứng minh rằng: $x + y + z = r + R$.

Giải:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, và D, E, F là hình chiếu của O trên BC, CA, AB

$\Rightarrow DB = DC, EC = EA, EA = EB$

$\Rightarrow DE = \dfrac{1}{2}AB, \ EF = \dfrac{1}{2}BC, \ DF = \dfrac{1}{2}AC.$

$OA = OB = OC = R.$

Các tứ giác $DOEC, EOFA, FODB$ là các tứ giác nội tiếp, áp dụng định lí Ptolemy ta có: $R.\dfrac{c}{2} = x.\dfrac{b}{2} + y.\dfrac{a}{2}, \ R.\dfrac{a}{2} = z.\dfrac{b}{2} + y.\dfrac{c}{2}, \ R.\dfrac{b}{2} = x.\dfrac{c}{2} + z.\dfrac{a}{2}.$

Lại có: $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{2}r = \dfrac{xa}{2} + \dfrac{yb}{2} + \dfrac{zc}{2}.$

Cộng bốn đẳng thức trên ta được: $x + y + z = r + R$.

(Đẳng thức này được gọi là *Định lí Carnot*).

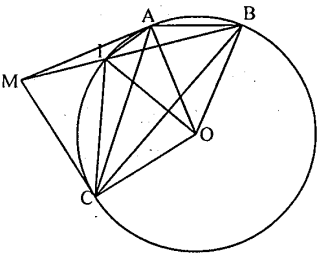
Trong trường hợp tam giác có góc tù, giả sử góc A tù thì $-x+y+z=r+R$, từ đó ta suy ra trong mọi tam giác $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AC = 2AB$, tiếp tuyến tại A, C cắt nhau tại M. Chứng minh rằng MB đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAC}$.

Giải:

Gọi I là giao điểm của MB với đường tròn (O), tiếp tuyến tại A, C cắt nhau tại $M \Rightarrow \angle MCI = \angle MBC$

$\Rightarrow \Delta MCI, \Delta MBC$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{MC}{MB}=\frac{CI}{BC}$.



Tương tự $\Delta MAI, \Delta MBA$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{AI}{BA}$.

Do $MA = MC \Rightarrow \frac{CI}{BC}=\frac{AI}{BA} \Rightarrow CI.BA = AI.BC.$

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $AICB$ ta có:

$IB.AC = AI.BC + AB.CI \Rightarrow IB.AC = 2AB.CI$, theo giả thiết $AC = 2AB$

$\Rightarrow 2IB.AB = 2AB.CI \Rightarrow IC = IB \Rightarrow OI \perp BC$

$\Rightarrow I$ đi qua điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng $CD^2.S_{ABD} + AD^2.S_{BCD} = BD^2.S_{ACD}$ (*Hệ thức Feuerbach*).

Giải:

Ta sử dụng công thức diện tích tam giác $S=\frac{abc}{4R}$. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, theo định lí Ptolemy ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD.$

Nhân hai vế với $\frac{BD.AD.CD}{4R}$ ta được:

$$\frac{CD^2.AB.BD.AD}{4R}+\frac{AD^2.BD.BC.CD}{4R}=\frac{BD^2.AD.CD.AC}{4R}.$$

Thực ra bài toán tổng quát hơn: Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn, M là điểm bất kì trong mặt phẳng tứ giác ta luôn có:

$$MA^2.BC.CD.DB+MC^2.DA.AB.BD=MB^2CD.DA.AC+MD^2.AB.BC.CA$$

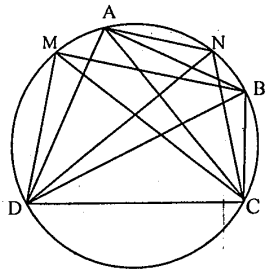
Định lí này mang tên hai ông Feuerbach – Luchterhand.

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính độ dài đường chéo AC, BD khi biết độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$.

Giải:

Đặt $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d\ ,\ AC=x,\ BD=y.$

Trên đường tròn ta lấy điểm M thoả mãn $BM=DA=d\ \Rightarrow\ DM=AB=a.$



Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác MBCD ta có:

$$MC.BD=MB.CD+BC.DM\Rightarrow MC.y=c.d+b.a$$

Tương tự, lấy N trên đường tròn thoả mãn $AN=BC=b.$

$$\Rightarrow AC.DN=AN.CD+NC.DA$$

$$\Rightarrow x.DN=b.c+a.d$$

Mặt khác $MC=DN$, suy ra $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, kết hợp $xy=ac+bd$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+dc}}$$

$$BD=\sqrt{\frac{(ab+dc)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

Cách khác:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính R, ta luôn có các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB cùng chung bán kính đường tròn ngoại tiếp R và:

$S_{ABC} + S_{DCA} = S_{ABD} + S_{CBD}$, áp dụng công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$ ta có:

$$\frac{AB.BC.CA}{4R} + \frac{CD.DA.AC}{4R} = \frac{AB.BD.DA}{4R} + \frac{BC.CD.DB}{4R}$$

$$\Rightarrow AC(AB.BC + CD.DA) = BD(AB.DA + BC.CD)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + CB.CD}{BA.BC + DA.DC} = \frac{ad + bc}{ab + dc} \qquad (1)$$

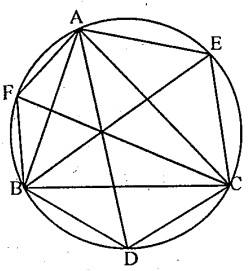
Theo định lí Ptolemy thì $AC.BD = AB.CD + BC.DA = ac + bd$ (2)

Nhân (1) với (2) $\Rightarrow AC^2 = \dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + dc} \Rightarrow AC = \sqrt{\dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + dc}}$.

Chia (2) cho (1) $\Rightarrow BD^2 = \dfrac{(ab + dc)(ac + bd)}{ad + bc} \Rightarrow BD = \sqrt{\dfrac{(ab + dc)(ac + bd)}{ad + bc}}$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường phân giác góc A, B, C cắt (O) tại D, E, F. Chứng minh $AD + BE + CF > AB + BC + CA$.

Giải:



Tứ giác $ABDC$ nội tiếp, theo định lí Ptolemy

$\Rightarrow AB.CD + AC.DB = AD.BC$.

Theo giả thiết AD là phân giác $\Rightarrow DB = DC$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB + AC}{2}.\frac{DB + DC}{BC} > \frac{AB + AC}{2}.\frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC}{2}.$$

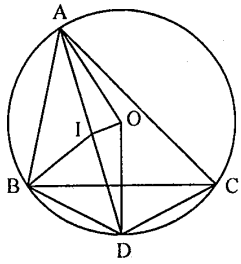
Tương tự $BE > \dfrac{BA + BC}{2}$, $CF > \dfrac{CA + CB}{2}$, cộng ba bất đẳng thức ta được:

$AD + BE + CF > AB + BC + CA$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC không đều, gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác.

Chứng minh rằng $\widehat{AIO} \le 90^0$ khi và chỉ khi $AB + AC \ge 2BC$.

Giải:



Kéo dài AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Khi đó $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} \Rightarrow DB = DC$.

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, suy ra

$$\widehat{BID} = \widehat{IBA} + \widehat{BAI} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{A});$$

$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{A}) \Rightarrow \Delta DIB \text{ cân} \Rightarrow DI = DB.$$

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $ABDC$ ta có:

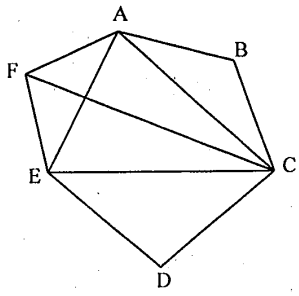
$$AD.BC = AB.CD + AC.BD = BD(AB + AC) = DI(AB + AC).$$

ΔAOD cân: $\widehat{AIO} < 90^0 \Leftrightarrow AI \ge ID \Leftrightarrow AI + ID \ge 2ID \Leftrightarrow AD \ge 2ID$

$$\Leftrightarrow 2 \le \frac{AD}{ID} = \frac{AB + AC}{BC} \Leftrightarrow 2BC \le AB + AC.$$

Ví dụ 8. Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \ge \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi nào? (IMO 2001).

Giải:



Theo bất đẳng thức Ptolemy trong tứ giác $ACEF$

$$\Rightarrow AC.EF + AF.CE \ge AE.FC$$

Theo giả thiết $AF = FE$

$$\Rightarrow FA(AC + CE) \ge AE.FC \Rightarrow \frac{FA}{FC} \ge \frac{AE}{AC + CE}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{DE}{DA} \ge \frac{EC}{AE + AC} \text{ và } \frac{BC}{BE} \ge \frac{AC}{EC + AE}.$$

Cộng ba bất đẳng thức lại ta được:

$$\frac{FA}{FC}+\frac{DE}{DA}+\frac{BC}{BE}\geq\frac{AE}{AC+CE}+\frac{EC}{AE+AC}+\frac{AC}{EC+AE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AE}{AC+CE}+\frac{EC}{AE+AC}+\frac{AC}{EC+AE}\geq\frac{3}{2}\ .\ (\text{Nesbitt})$$

Dấu bằng xảy ra khi $AC=CE=EA$ và tứ giác $ACEF$, $ACDE$, $ABCE$ nội tiếp $\Leftrightarrow AC=CE=EA$ và A, B, C, D, E, F nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn (C). M nằm trên đường thẳng kéo dài của đường chéo DB, sao cho MA, MC là tiếp tuyến của đường tròn (C). Tiếp tuyến tại B với đường tròn (C) cắt MC tại N và CD tại P, ND cắt đường tròn (C) tại E. Chứng minh rằng A, E, P thẳng hàng. (APMO).

Giải:

MC là tiếp tuyến với (C) $\Rightarrow \widehat{NCB}=\widehat{BDC}$

$\Rightarrow \Delta MCB$ và ΔMDC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MC}{MD}=\frac{CB}{DC}$ (1)

MA là tiếp tuyến với (C), tương tự

$\Rightarrow \frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DA}$. (2)

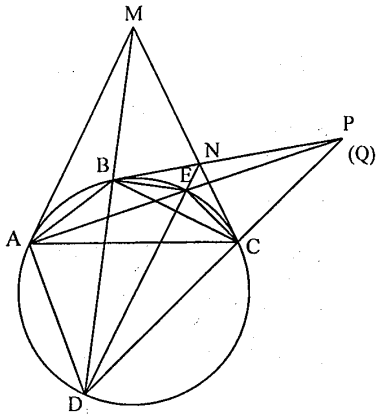
Do $MA=MC$ nên $\frac{CB}{DC}=\frac{AB}{DA}$

$\Rightarrow DA.CB=AB.DC$

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $ABCD$

$\Rightarrow AB.CD+BC.DA=AC.BD$

$\Rightarrow BC.DA=\frac{1}{2}AC.BD\Rightarrow\frac{AC}{DA}=\frac{2BC}{DB}$ (3)



NB, NC là tiếp tuyến với đường tròn (C) $\Rightarrow \Delta NBE$, ΔNDB đồng dạng; ΔNCE, ΔNDC đồng dạng

$\Rightarrow \frac{NB}{ND}=\frac{BE}{DB}$, $\frac{NC}{ND}=\frac{CE}{DC}$ kết hợp $NB=NC\Rightarrow\frac{BE}{DB}=\frac{CE}{DC}$.

$\Rightarrow BE.DC = CE.DB$

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $BECD$ ta có:

$BE.DC + CE.DB = BC.DE$

$\Rightarrow BE.DC = CE.DB = \frac{1}{2}BC.DE \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{2CE}{DE}$ (4)

PB là tiếp tuyến với (C) $\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PD} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow PC.PD = PB^2$.

Mặt khác $\frac{PC}{PD} = \frac{PC.PD}{PD^2} = \left(\frac{PB}{PD}\right)^2 = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2CE}{DE}\right)^2$ (6)

Giả sử AE cắt CD tại $Q \Rightarrow \Delta QEC$ và ΔQDA đồng dạng $\Rightarrow \frac{QC}{QA} = \frac{EC}{DA}$;

Mặt khác ΔQDE và ΔQAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{DE}{AC}$

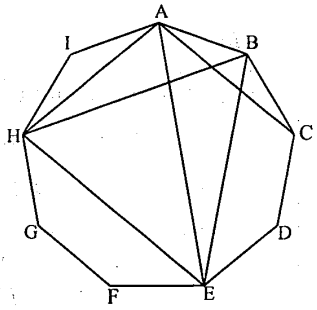
$\Rightarrow \frac{QC}{QA} : \frac{QD}{QA} = \frac{EC}{DA} : \frac{DE}{AC}$ (7)

$\Rightarrow \frac{QC}{QD} = \frac{EC.AC}{DE.DA} = \frac{EC}{DE}\frac{2BC}{DB} = \frac{EC}{DE}\frac{4EC}{DE} = \left(\frac{2EC}{DE}\right)^2$ (8)

Từ (6) và (8) $\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{QC}{QD} \Rightarrow P \equiv Q$

$\Rightarrow A, E, P$ thẳng hàng.

Ví dụ 10. Cho đa giác đều $ABCDEFGHI$. Chứng minh rằng $AE - AC = AB$.



Giải:

Đa giác $ABCDEFGHI$ đều nên nội tiếp một đường tròn $\Rightarrow BH = BE = HE$ và $AH = AC$.

Theo định lí Ptolemy với tứ giác $ABEH$ ta có:

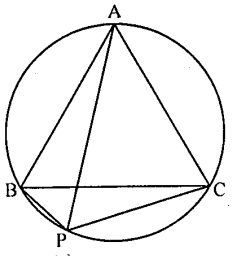
$AE.BH = AB.HE + AH.BE \Rightarrow AE.BE = AB.BE + AC.BE$

$\Rightarrow AE = AB + AC \Rightarrow AE - AC = AB$

Nhận xét: Với đa giác $ABCDEFGHI$ chúng ta áp dụng định lí Ptolemy có nhiều đẳng thức khác.

Ví dụ 11. Cho tam giác đều ABC có cạnh là a, P là điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

Giải:



P là điểm trên cung $BC \Rightarrow ABPC$ là tứ giác nội tiếp, áp dụng định lí Ptolemy

$\Rightarrow AP.BC = AB.PC + AC.PB$

ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow BC = BA = AC$

$\Rightarrow PA = PB + PC$ (1)

Mặt khác $\angle BPA = \angle APC = 60^0$

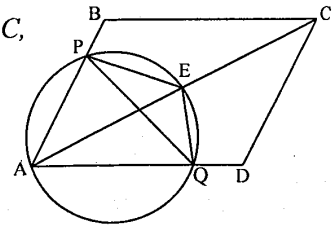
$\Rightarrow AB^2 = PB^2 + PA^2 - PB.PA$, $AC^2 = PA^2 + PC^2 - PA.PC$

$\Rightarrow 2PA^2 + PB^2 + PC^2 - PA(PB + PC) = 2AB^2$.

Sử dụng kết quả (1) $\Rightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2AB^2 \Rightarrow$ không phụ thuộc vào vị trí của P.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$, P và Q là hai điểm trên cạnh AB, AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt AC tại E. Chứng minh rằng $AE.AC = AP.AB + AQ.AD$.

Giải:



$APEQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle PQE = \angle PAE = \angle BAC$,

$\angle EPQ = \angle EAQ = \angle ACB$

$\Rightarrow \Delta ABC$, ΔQEP đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{QE} = \dfrac{AC}{QP} = \dfrac{BC}{EP} = k$ (1)

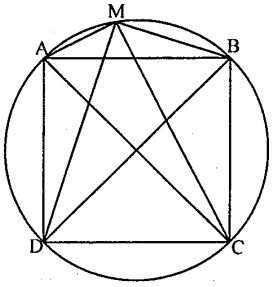
Áp dụng định lí Ptolemy $\Rightarrow AE.PQ = AP.QE + AQ.PE$ thay (1) vào ta được:

$$\frac{1}{k}AE.AC = \frac{1}{k}AP.AB + \frac{1}{k}AQ.BC \Rightarrow AE.AC = AP.AB + AQ.AD.$$

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1, M là điểm trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp $ABCD$. Chứng minh rằng $MC.MD > 3\sqrt{3}MA.MB$.

Giải:

Đặt $MA = a, MB = b, MC = c, MD = d$. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $AMBD \Rightarrow AM.BD + MB.AD = AB.MD \Leftrightarrow a\sqrt{2} + b = d$.



Tương tự với tứ giác $AMBC$ ta có: $a + b\sqrt{2} = c$.

Nhân hai đẳng thức với nhau ta được:

$$cd = 3ab + \sqrt{2}(a^2 + b^2) \geq 3ab + 2\sqrt{2}ab$$

$$\Rightarrow cd \geq ab(3 + 2\sqrt{2}).$$

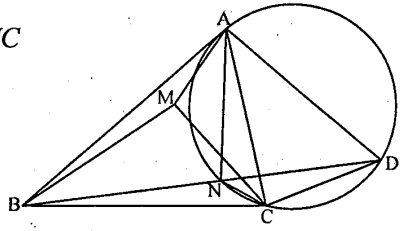
(Dễ dàng chứng minh $3 + 2\sqrt{2} > 3\sqrt{3}$ bằng cách bình phương hai vế)

$$\Rightarrow MC.MD > 3\sqrt{3}MA.MB.$$

Ví dụ 14. Cho hai điểm M, N nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$. Chứng minh biểu thức $\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB}$ không phụ thuộc vào vị trí M, N. (IMO Shortlist).

Giải:

Kéo dài BN cắt đường tròn ngoại tiếp ΔANC tại $D \Rightarrow \angle NAC = \angle NDC \Rightarrow \angle CDB = \angle MAB$



$\Rightarrow \Delta DCB, \Delta AMB$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{MA} = \frac{BC}{MB} \Rightarrow CD = \frac{BC.MA}{MB}.$$

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $ANCD$ ta có:

$ND.AC = AN.CD + AD.NC.$

$\Rightarrow (BD-BN)AC = AN.CD + AD.NC \Rightarrow AC.BD = AC.BN + AN.CD + AD.NC.$

Ta có $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC \Rightarrow \angle ABD = \angle MBC$, $\angle NCB = \angle MCA$

$\Rightarrow \Delta ABD$, ΔMBC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{MC}$

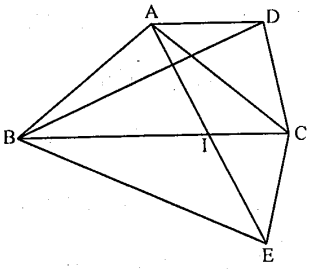
$\Rightarrow DB = \dfrac{AB.BC}{MB}$, $DA = \dfrac{AB.MC}{MB}$

$\Rightarrow \dfrac{AB.BC}{MB}.AC = AC.BN + AN\dfrac{BC.MA}{MB} + CN\dfrac{AB.MC}{MB}$

$\Rightarrow \dfrac{AM.AN}{AB.AC} + \dfrac{BM.BN}{BA.BC} + \dfrac{CM.CN}{CA.CB} = 1.$

Ví dụ 15. Cho hình thang $ABCD$ ($AD//BC$), thoả mãn $AB = AC$, $BC = BD = 1$, $CD < 1$ và $\angle BAC + \angle BDC = 180^0$. Tính CD.

Giải:



Gọi E là điểm đối xứng với D qua cạnh BC

$\Rightarrow \angle BEC = \angle BDC \Rightarrow \angle BAC + \angle BEC = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABEC$ nội tiếp.

Gọi I là giao điểm của AE và BC, $AD//BC$

$\Rightarrow AI = IE$, giả thiết $AB = AC \Rightarrow \angle BEA = \angle AEC$.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{IC}{IB} = \dfrac{CE}{BE} = CE$.

Áp dụng định lí Ptolemy ta có: $AE.BC = AC.BE + AB.CE$

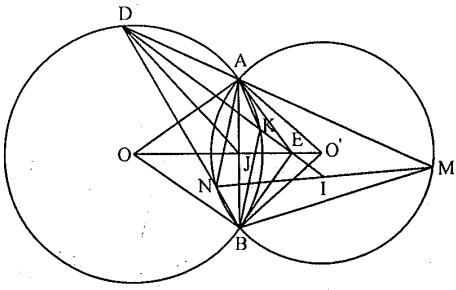
$\Rightarrow 2AI = AC(1 + CD)$

$\Rightarrow \dfrac{2}{CD+1} = \dfrac{AC}{AI} = \dfrac{BE}{BI} = \dfrac{BC}{BI} = \dfrac{BI+IC}{BI} = 1 + \dfrac{EC}{BE} = 1 + EC = 1 + CD$

$\Rightarrow (1+CD)^2 = 2 \Rightarrow CD = \sqrt{2} - 1.$

Ví dụ 16. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) cắt OO' tại E. Gọi D là điểm trên (O), đường thẳng DA, DB cắt (O') tại M và N. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm MN.

Giải:



Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại K và MN tại I.

Theo giả thiết AE là tiếp tuyến với (O) tại A $\Rightarrow \angle EAK = \angle ADK$ (chắn cung AK) $\Rightarrow \Delta AEK, \Delta DEA$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AK}{DA} = \frac{EK}{EA}$$

Do tính chất đối xứng $\Rightarrow EB$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B

$\Rightarrow \angle EBK = \angle BDK$ (chắn cung BK) $\Rightarrow \Delta EBK$ và ΔEDB đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{EK}{EB} = \frac{BK}{DB}.$$

Ta có EA, EB tiếp tuyến với (O) $\Rightarrow EA = EB$

$$\Rightarrow \frac{AK}{DA} = \frac{BK}{DB} \Rightarrow AK.DB = BK.DA$$

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $DAKB \Rightarrow AK.BD + DA.BK = AB.DK$

$$\Rightarrow 2AK.BD = AB.DK = 2BJ.DK \Rightarrow AK.BD = BJ.DK \Rightarrow \frac{BD}{BJ} = \frac{DK}{AK}$$

Có $\angle DBA = \angle DKA \Rightarrow \Delta BDJ$ và ΔKDA đồng dạng (c.g.c).

$\Rightarrow \angle BDJ = \angle KDA$ (1)

Mặt khác $\angle AMN = \angle ABN$ (chắn cung AN) $\Rightarrow \Delta DMN$ và ΔDBA đồng dạng (g.g).

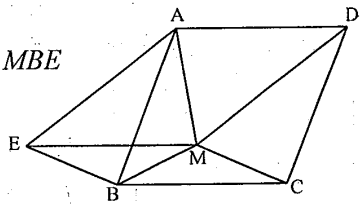
Kết hợp (1), J là trung điểm $AB \Rightarrow I$ là trung điểm MN.

Ví dụ 17. Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm bất kì trong hình bình hành. Chứng minh rằng $MA.MC + MB.MD \leq AB.AD$.

Giải:

Dựng hình bình hành $ADME \Rightarrow ME = AD, ME // AD \Rightarrow ME = BC, ME // BC$

$\Rightarrow MCBE$ cũng là hình bình hành.



Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy đối với tứ giác $AMBE$

$\Rightarrow MA.BE + AE.MB \geq AB.ME$

$\Rightarrow MA.MC + MB.MD \leq AB.AD.$

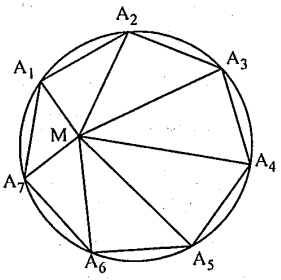
Ví dụ 18. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

1) Chứng minh rằng: $A_1A_2^2 + A_1A_2.A_1A_4 = A_1A_3^2$ và $A_1A_2^2 + A_1A_3.A_1A_4 = A_1A_4^2$.

2) M là điểm bất kì trong đa giác.

Chứng minh rằng: $MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$.

Giải:



1) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ là đa giác đều $\Rightarrow$ nội tiếp một đường tròn $\Rightarrow$ $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_7A_1$;

$A_1A_3 = A_2A_4$; $A_1A_4 = A_2A_5$.

Áp dụng định lí Ptolemy với các tứ giác $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_4A_5$

$\Rightarrow A_1A_2^2 + A_1A_2.A_1A_4 = A_1A_3^2$, $A_1A_2^2 + A_1A_3.A_1A_4 = A_1A_4^2$.

2) Đặt $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho:

Tứ giác $A_1A_2A_3M \Rightarrow a(MA_1 + MA_3) \geq bMA_2$ (1)

Tứ giác $A_5A_6A_7M \Rightarrow a(MA_5 + MA_7) \geq bMA_6$ (2)

Tứ giác $A_2A_4A_6M \Rightarrow b(MA_2 + MA_6) \geq cMA_4$

$\Rightarrow (b+c)(MA_2 + MA_6) \geq c(MA_2 + MA_4 + MA_6)$

$\Rightarrow MA_2 + MA_6 \geq \dfrac{c}{b+c}(MA_2 + MA_4 + MA_6)$ (3)

Cộng (1) và (2) $\Rightarrow a(MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7) \geq b(MA_2 + MA_6)$.

Kết hợp với (3) $\Rightarrow a(MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7) \geq \dfrac{bc}{b+c}(MA_2 + MA_4 + MA_6)$.

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $A_1A_2A_3A_5$ ta có:

$ab + ac = bc \Leftrightarrow a = \dfrac{bc}{b+c} \Rightarrow MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$.

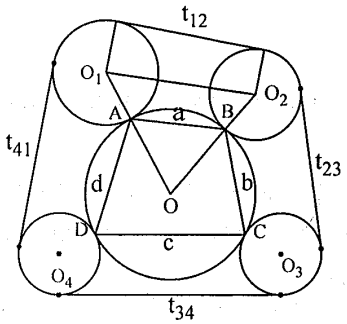
II. ĐỊNH LÍ CASEY

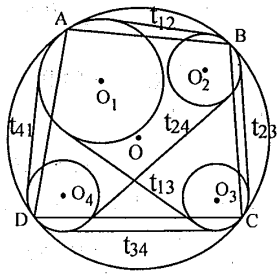
Định lí Casey được đặt theo tên nhà toán học John Casey (1820 -1891) người Ailen. Năm 1869, ông là thành viên Viện hàn lâm hoàng gia Ailen, thành viên Hội toán học London, ông từng giảng dạy nhiều trường đại học có tiếng ở châu Âu. Ông còn là thành viên biên tập của Oxford, Cambridge... về môn Toán. Ông tự học và dành thời gian nghiên cứu sâu môn hình học phẳng và định lí Casey được ra đời chính là sự đóng góp của ông với toán học.

Định lí Casey còn có tên là định lí Ptolemy mở rộng.

1. Định lí Casey

Cho đường tròn tâm (O) và bốn đường tròn tâm (O_i) $(i=\overline{1,4})$, cùng tiếp xúc với (O) trong (hoặc ngoài). Đặt t_{ij} là độ dài tiếp tuyến của hai đường tròn tâm (O_i), tâm (O_j) $(i=\overline{1,4}, j=\overline{1,4}, i\neq j)$ khi đó ta có: $t_{12}t_{34}+t_{23}t_{41}=t_{13}t_{24}$.

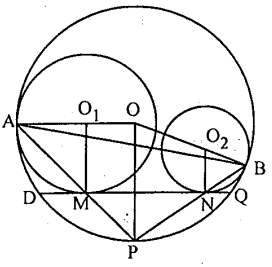




Để chứng minh định lí, trước hết ta chứng minh bổ đề:

Bổ đề. Cho đường tròn (O, R), hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cùng tiếp xúc trong lần lượt tại *A, B*. Khi đó độ dài tiếp tuyến chung $t_{12}=\dfrac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}$, $(r_1>r_2)$.

Chứng minh:



Giả sử đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) có tiếp tuyến chung là MN, đường thẳng AM cắt (O) tại P $\Rightarrow O_1M // OP$ và $O_1M \perp MN \Rightarrow OP \perp MN \Rightarrow P, N, B$ thẳng hàng. MN cắt (O) tại D, Q

$$\Rightarrow \angle NMP = \angle AMP = \frac{1}{2}\angle AO_1M = \frac{1}{2}\angle AOP = \angle ABP$$

$\Rightarrow \Delta PMN$ và ΔPBA đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{BA} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PA} = \sqrt{\frac{PM}{PA}\frac{PN}{PB}} = \sqrt{\frac{OO_1}{OA}\frac{OO_2}{OB}}$$

$$\Rightarrow MN = t_{12} = \frac{AB}{OA}\sqrt{OO_1.OO_2} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}.$$

Chú ý: Nếu hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cùng tiếp xúc ngoài với (O), khi đó ta có: $MN = t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}$;

Nếu đường tròn (O_1, r_1) tiếp xúc ngoài với (O) và (O_2, r_2) tiếp xúc trong với (O) thì: $MN = t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}$.

Trở lại chứng minh định lí (ta chứng minh cho trường hợp cả bốn đường tròn tiếp xúc trong).

Gọi A, B, C, D là các điểm tiếp xúc với đường tròn (O, R), áp dụng bổ đề và kết hợp sử dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$$\Rightarrow t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = \frac{AB.CD}{R.R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}\sqrt{(R-r_3)(R-r_4)} +$$

$$+\frac{BC.DA}{R.R}\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}\sqrt{(R-r_4)(R-r_1)}$$

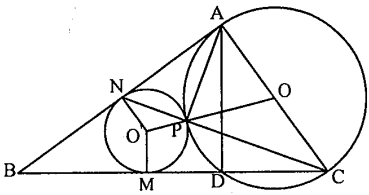
$$= \frac{BD.CA}{R.R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_3)}\sqrt{(R-r_2)(R-r_4)} = t_{24}t_{13}.$$

Khi bốn đường tròn tâm (O_i) $(i = \overline{1,4})$ biến thành bốn điểm ta được định lí Ptolemy.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi D là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn tiếp xúc với cạnh BC, BA lần lượt tại M, N, đồng thời nằm trong tam giác ABD và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Chứng minh rằng $CD.AN + AC.DM = AD.CM$.



Giải:

Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc với BC, AB tại M, N và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔACD tại P;

Theo định lí Casey, ba điểm A, C, D biến thành điểm

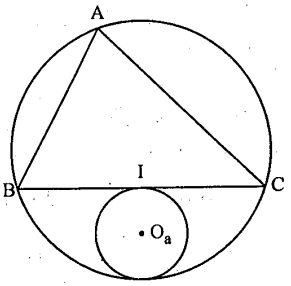
$\Rightarrow t_{CD} = CD,\ t_{A(O')} = AN,\ t_{CA} = CA,\ t_{D(O')} = DM$

$t_{AD} = AD,\ t_{C(O')} = CM \Rightarrow CD.AN + AC.DM = AD.CM.$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi tâm các đường tròn tiếp xúc với (O) và tiếp xúc tại điểm chính giữa cung nhỏ BC, CA, AB lần lượt là (O_a), (O_b), (O_c). Gọi t_{bc} là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của (O_b), (O_c), tương tự ta có t_{ca}, t_{ab}. Chứng minh rằng $t_{bc} = t_{ca} = t_{ab}$.

Giải:

Theo giả thiết tâm các đường tròn tiếp xúc với (O) và tiếp xúc tại điểm chính giữa cung nhỏ BC, CA, $AB \Rightarrow (O_a)$, (O_b), (O_c) lần lượt tiếp xúc tại trung điểm BC, CA, AB.



Gọi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; Khoảng cách tiếp tuyến từ B, C đến đường tròn (O_a) bằng $\frac{a}{2}$.

Áp dụng định lí Casey cho A, C, (O_a), B ta có:

$$t_a.a = \frac{a}{2}b + \frac{a}{2}c = a\frac{b+c}{2} \Rightarrow t_a = \frac{b+c}{2}.$$

Tương tự cho (O_b), (O_c): $t_b = \frac{c+a}{2}$, $t_c = \frac{a+b}{2}$.

Áp dụng định lí Casey cho (O_a), (O_c), A, C ta có: $t_a t_c = \frac{a}{2}\frac{c}{2} + t_{ac} b$

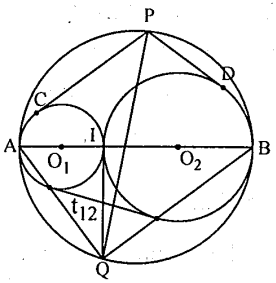
$$\Rightarrow t_{ac} = \frac{t_a t_c - \frac{ac}{4}}{b} = \frac{\frac{(b+c)(a+b)}{4} - \frac{ac}{4}}{b} = \frac{a+b+c}{4}.$$

Hoàn toàn tương tự $t_{bc} = t_{ab} = \frac{a+b+c}{4} \Rightarrow t_{bc} = t_{ca} = t_{ab}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn đường kính AB, P và Q là hai điểm trên đường tròn không cùng phía với AB và PQ không vuông góc với AB. Gọi I là hình chiếu của Q trên AB. Dựng đường tròn (O_1), (O_2) đường kính là AI, IB, từ P kẻ tiếp tuyến PC với (O_1) và tiếp tuyến PD với (O_2).

Chứng minh rằng $PC + PD = PQ$.

Giải:



Áp dụng định lí Casey với P, Q, (O_1), (O_2):

$PC.QI + PD.QI = PQ.t_{12}$

Áp dụng công thức tính t_{12}:

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)},\ R = \frac{AB}{2},\ r_1 = \frac{AI}{2},\ r_2 = \frac{IB}{2}$$

$$\Rightarrow t_{12} = 2\sqrt{(\frac{AB-AI}{2})(\frac{AB-IB)}{2}} = \sqrt{IB.AI}.$$

Theo giả thiết AB là đường kính $\Rightarrow \Delta AQB$ là tam giác vuông.

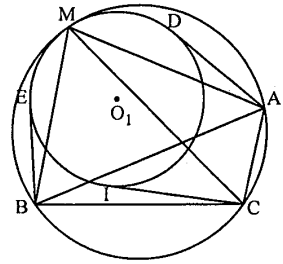
$QI \perp AB \Rightarrow QI^2 = AI.IB$

$$\Rightarrow QI(PC+PD) = PQt_{12} \Leftrightarrow \sqrt{AI.IB}(PC+PD) = PQ.\sqrt{AI.IB}$$

$$\Rightarrow PC + PD = PQ.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với (O) tại M (M thuộc cung AB không chưa C). Từ A, B, C kẻ các tiếp tuyến AD, BE, CI với (O_1).

Chứng minh rằng $AB.CI = AC.BE + BC.DA$.



Giải:

Áp dụng định lí Casey với (O_1), A, C, B:

$d_{B(O_1)} = BE$, $d_{C(O_1)} = CI$, $d_{A(O_1)} = AD$

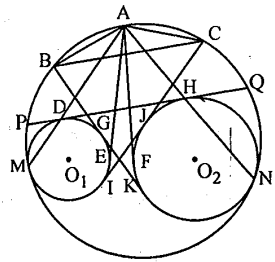
Thay vào $\Rightarrow AB.CI = AC.BE + BC.AD$.

Nhận xét: Bài này không phụ thuộc vào vị trí đường tròn (O_1), nếu không áp dụng định lí Casey, dùng tính chất tiếp tuyến và đồng dạng không hề dễ.

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc trong với đường tròn (O), tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt (O) tại P và Q, tiếp tuyến chung trong (O_1), (O_2) cắt đường tròn (O) (cùng phía với P, Q) tại B, C. Chứng minh rằng BC và PQ song song.

Giải:

Gọi DH là tiếp tuyến ngoài của (O_1), (O_2), hai tiếp tuyến chung trong của (O_1), (O_2) có các tiếp điểm I, J và K, G, gọi M và N là tiếp điểm của (O_1), (O_2) với (O).



Gọi A là điểm chính giữa cung PQ, kẻ các tiếp tuyến AE với (O_1), AF với (O_2) $\Rightarrow A, D, M$ thẳng hàng và A, H, N thẳng hàng

$\Rightarrow AE^2 = AD.AM = AH.AN = AF^2 \Rightarrow AE = AF$

Áp dụng ví dụ 4 ta có:

$BC.AE = BG.AC + CI.AB$, $AF.BC = BK.AC + CJ.AB$

$\Rightarrow BG.AC + CI.AB = BK.AC + CJ.AB$

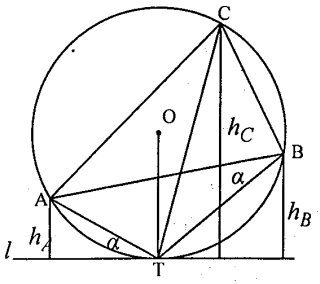
$\Rightarrow AC(BK - BG) = AB(CI - CJ)$

$\Rightarrow AC.GK = AB.IJ \Rightarrow AB = AC \Rightarrow BC // PQ$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), l là tiếp tuyến bất kì của (O). Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là đường thẳng đối xứng với l qua ba cạnh BC, CA, AB. Ba đường l_a, l_b, l_c tạo thành tam giác. Chứng minh rằng đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba đường l_a, l_b, l_c. (IMO 2011).

***Nhận xét*:** Một số nước đánh giá đây là bài hình phẳng khó nhất trong các bài hình phẳng thi toán quốc tế từ trước đến nay. Chow - người Hong Kong có lời giải vận dụng định lí Casey. Sau đây là lời giải Chow.

Giải:



Gọi l là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại T,

gọi h_A, h_B, h_C là hình chiếu của A, B, C trên l.

Chứng minh $\sqrt{h_A}\sin A+\sqrt{h_B}\sin B=\sqrt{h_C}\sin C$.

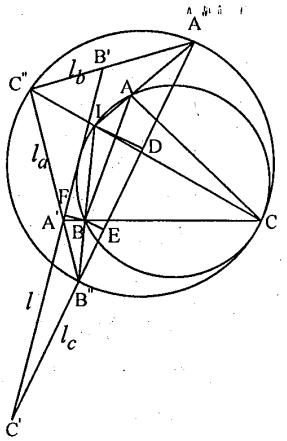
Theo định lí Ptolemy: $AT.BC+CA.BT=AB.CT$.

Thay $BC=2R\sin A$, $CA=2R\sin B$, $CA=2R\sin C$

$\Rightarrow AT\sin A+BT\sin B=CT\sin C$

$AT=\dfrac{h_A}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha=\dfrac{AT}{2R}\Rightarrow AT=\sqrt{2Rh_A}$.

Tương tự $BT=\sqrt{2Rh_B}$, $CT=\sqrt{2Rh_C}\Rightarrow$ (đpcm).



Trở lại bài toán: Ta đặt: $l_a\times l=A'$, $l_b\times l=B'$,

$l_c\times l=C'$ và $l_a\times l_b=C''$, $l_b\times l_c=A''$, $l_c\times l_a=B''$

$\Rightarrow \Delta A''B''C''$ là tam giác tạo bởi l_a, l_b, l_c.

$\angle A''C''B''=\angle A''B'A'-\angle C''A'B'$

$=2\angle CB'A'-(180^0-2\angle CA'B')$

$=180^0-2\angle C$, tương tự: $\angle A''B''C''=180^0-2\angle B$ và $\angle B''A''C''=180^0-2\angle A$

$\Rightarrow A'B$ là phân giác của $\angle B'A'B''$ và $C'B$ là phân giác $\angle A'C'B''$. Do đó $B''B$ là phân giác $\angle A''B''C''$.

Tương tự, $A''A$ là phân giác $\angle B''A''C''$, $C''C$ là phân giác $\angle B''C''A'' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A''B''C''$.

Từ đó $\angle IAB = \angle AA''C'' + \angle AC''A'' = \frac{1}{2}(\angle B''A''C'' + \angle B''C''A'') = \frac{1}{2}\angle A''B''C''$

Tương tự $\angle IBA = \frac{1}{2}\angle B''A''C''$.

$$\angle AIB = 180^0 - \angle IA''B'' - \angle IB''A'' = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle C''A''B'' + \angle C''B''A'')$$

$$= 180^0 - \angle ACB$$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Kẻ $ID \perp A''B'' \Rightarrow ID$ là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta A''B''C''$.

$BE \perp l_c$, $BF \perp l \Rightarrow BE = BF = h_B$.

Gọi $d(B'')$ là độ dài tiếp tuyến từ B'' đến đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$$d(B'') = \sqrt{B''B.B''I} = \sqrt{\frac{BE}{\sin(90^0 - B)}\frac{ID}{\sin(90^0 - B)}} = \frac{\sqrt{h_B r}}{\cos B}$$

$$\Rightarrow d(B'')C''A'' = \frac{\sqrt{h_B r}}{\cos B} 2R\sin(180^0 - 2B) = 4R\sqrt{h_B r}\sin B$$

$\Rightarrow d(A'').B''C'' + d(B'')C''A'' = d(C'').A''B'' \Rightarrow$ đpcm.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp một đường tròn (C). *M* nằm trên đường thẳng kéo dài của đường chéo *DB*, sao cho *MA, MC* là tiếp tuyến của đường tròn (C). Tiếp tuyến tại *B* với đường tròn (C) cắt *MC* tại *N* và *CD* tại *P*, *ND* cắt đường tròn (C) tại *E*. Chứng minh rằng *A, E, P* thẳng hàng (APMO).

2. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (I) tiếp xúc với *BC, BD, CA*, đường tròn (J) tiếp xúc với ngoài với *AB, BC, CD*. Chứng minh rằng *IJ* đi qua điểm chính giữa cung *BC*.

3. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo gặp nhau tại *P*. Gọi (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *PAB, PBC, PCD, PDA*; gọi *I, J, E, F* thứ tự là điểm chính giữa cung *AB, BC, CD, DA*. Chứng minh rằng IO_1, JO_2, EO_3, FO_4 đồng quy.

4. Cho tam giác đều *ABC* nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (I) tiếp xúc ngoài với (O) trên cung nhỏ *BC*, từ *A, B, C* kẻ tiếp tuyến với (I), các tiếp điểm lần lượt là *D, E, F*. Chứng minh rằng $AD = BE + CF$.

5. Gọi *P* là điểm trong đường tròn qua *P* dựng các đường thẳng cắt đường tròn tại *A, B, C, D, E, F*. Chứng minh rằng $AB.CD.EF = FA.BC.DE$.

Chương 4

CÁC ĐỊNH LÍ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN MIXTILINEAR

Tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tiếp xúc trong (ngoài) với đường tròn (O) và tiếp xúc với hai cạnh *AB, AC* của tam giác *ABC* được gọi là *đường tròn Mixtilinear* ứng với góc *A* của tam giác *ABC.*

Đường tròn mixtilinear có nhiều bí ẩn mà chưa được khai thác. Ở Nhật Bản, nhiều đền chùa khắc đường tròn này cũng như hình Sangaku trên tường. Trong những năm gần đây, nhiều kì thi của các nước cũng như IMO đã đưa đường tròn này vào đề thi, có nhiều bài viết được đưa trên các tạp chí và sách. Trước hết chúng ta làm quen với bài toán cơ bản.

1. Bài toán

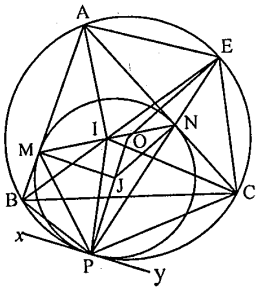
Đường tròn tâm (J) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp *ABC* tại *P* và tiếp xúc với cạnh *AB, AC* lần lượt tại *M* và *N*. Chứng minh rằng trung điểm *MN* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Chứng minh:

Đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh *AB, AC* lần lượt tại *M, N* và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *P*, gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow O, J, P$ thẳng hàng;

Đường thẳng *PN* cắt đường tròn *O* tại $E \Rightarrow \Delta OPE$ và ΔJPN là cân

$\Rightarrow \angle OPE = \angle OEP = \angle JPN = \angle JNP \Rightarrow OE // JN.$



N là tiếp điểm của (J) với cạnh $AC \Rightarrow JN \perp AC$

$\Rightarrow OE \perp AC \Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung AC

$\Rightarrow BE$ là phân giác góc $\angle ABC$

$\Rightarrow \angle CPE = \angle ACE \Rightarrow \Delta CEN$ và ΔPEC đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{EC}{EP} = \frac{EN}{EC} \Rightarrow EC^2 = EN.EP \ (1).$$

Giả sử đường thẳng BE cắt MN tại I, P là tiếp điểm của đường tròn (J) và (O)

(xy tiếp tuyến với (O) và (J) tại P)

$\Rightarrow \angle IMP = \angle NMP = \angle NPy = \angle EPy$, $\angle EBP = \angle EPy \Rightarrow \angle IMP = \angle IBP$

$\Rightarrow$ tứ giác $BMIP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BMP = \angle BIP$ (chắn cung $\overset{\frown}{BP}$).

Mặt khác $\angle MPx = \angle PMB = \angle MNP$ (chắn cung $\overset{\frown}{MP}$) $\Rightarrow \angle BIP = \angle MNP$

$\Rightarrow \angle EIP = \angle ENI \Rightarrow \Delta ENI$ và ΔEIP đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EI}{EP} = \frac{EN}{EI} \Rightarrow EI^2 = EN.EP \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EC^2 = EI^2 \Rightarrow EC = EI \Rightarrow EA = EB = EI$

$$\Rightarrow \Delta EIC \text{ có góc đỉnh } \angle IEC = \angle A \Rightarrow \angle EIC = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A.$$

Tương tự $\angle EIA = 90^0 - \frac{1}{2}\angle C$

$$\Rightarrow \angle AIC = \angle AIE + \angle EIC = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle B$$

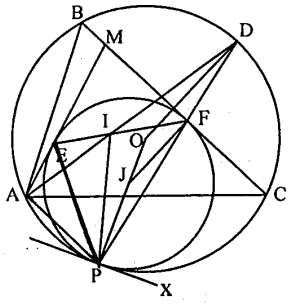
$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IM = IN.$

Trên tạp chí của Mỹ "Sawayama and Thébault's theorem" và cuốn sách "An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle" của Nathan AltshiLLer-Court, cả hai đều viết về tính chất này của đường tròn mixtilinear là của Randal Charles Jonn, (Nixon R. C. J. Nixon, 1863-1918, trên tạp chí Educational Times, London). Như vậy, Nixon là người đã chứng minh tính chất này sớm hơn cả.

2. Bổ đề Sawayama - Thebault

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên cạnh BC. Đường tròn tâm (J) tiếp xúc MA và MC lần lượt tại E và F, đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF. (Vòng tròn 2015) (biến thể)

Chứng minh:



Đường thẳng PF cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D. Đường tròn (J) tiếp xúc với đường tròn (O) tại $P \Rightarrow P, J, O$ thẳng hàng;

ΔPJF và ΔPOD là tam giác cân $\Rightarrow \widehat{ODP} = \widehat{JFP}$

$\Rightarrow OD // JF$, $JF \perp BC \Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow \widehat{DC} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow AD$ là phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Gọi I là giao điểm AD và $EF \Rightarrow \widehat{IAP} = \widehat{FPx}$

$\widehat{FEP} = \widehat{FPx} \Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{IAP} \Rightarrow IEAP$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEP} = \widehat{AIP}$, $\widehat{EFP} = \widehat{AEP} \Rightarrow \widehat{AIP} = \widehat{EFP} \Rightarrow \widehat{DIP} = \widehat{DFI}$

$\Rightarrow \Delta DIF$ và ΔDPI đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DI}{DP} = \dfrac{DF}{DI} \Rightarrow DI^2 = DP.DF$;

Vì $\widehat{DC} = \widehat{DB} \Rightarrow \Delta CDF$ và ΔPDC đồng dạng

$\Rightarrow DC^2 = DF.DP \Rightarrow DI = DC$

Theo chứng minh trên $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

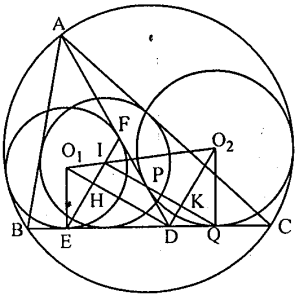
3. Định lí Sawayama-Thebault

Cho tam giác nội tiếp đường tròn tâm (O), ngoại tiếp đường tròn tâm I. D là điểm bất kì trên cạnh BC, gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AD, BC và đường tròn (O), (O_2) là các đường tròn tiếp xúc với AD, BC và đường tròn (O). Chứng minh I, O_1, O_2 thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi E, F là tiếp điểm của (O_1) với BD, AD, và P, Q là tiếp điểm của (O_2) với AD và DC.

Theo tính chất đã được chứng minh trên ⇒ giao điểm của EF và PQ chính là I tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



Gọi H là giao điểm của DO_1 với EF, K là giao điểm DO_2 với $PQ \Rightarrow DO_1 \perp EF$, $DO_1 \perp DO_2$

$\Rightarrow DO_2 // EF$, tương tự $PQ // DO_1 \Rightarrow IHDK$ là hình chữ nhật.

Theo định lí Thales $\Rightarrow \dfrac{IH}{O_2D} = \dfrac{KD}{O_2D} = \dfrac{O_1H}{O_1D} \Rightarrow O_1, I, O_2$ thẳng hàng.

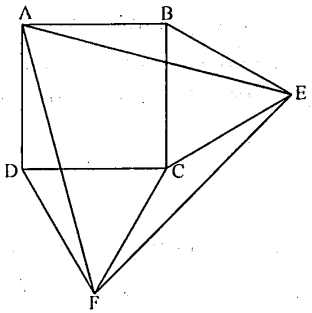
Đặc biệt, khi D là chân đường phân giác góc $A \Rightarrow$ đường tròn (O), (O_2) tiếp xúc nhau tại I.

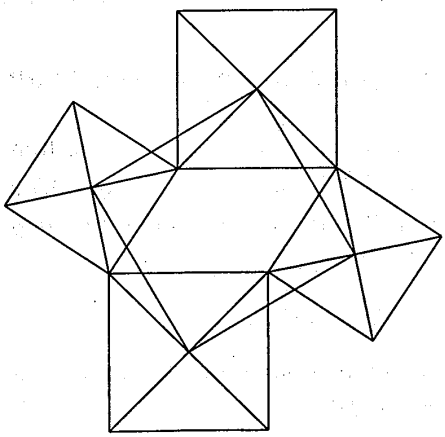
Ông Sawayama là giáo viên Trung học tại Nhật Bản, năm 1905 ông đã chứng minh được bổ đề trên. Ông Vicctor Thebault, người Pháp (1882-1960), năm 1938 ông đã đưa ra cách chứng minh này, vì vậy nhiều tạp chí đăng bài viết và thường gọi là định lí ***Sawayama-Thebault.***

Ngoài ra, Thebault có nhiều bài toán nổi tiếng mang tên ông, chẳng hạn:

1) *Cho một hình bình hành, dựng trên các cạnh của nó bốn hình vuông ra phía ngoài. Tứ giác lập từ các tâm của bốn hình vuông đó là một hình vuông.*

2) *Cho một hình vuông ABCD, dựng các tam giác đều CBE và CDF sao cho các tam giác được dựng cùng ở phía trong hoặc phía ngoài hình vuông. Khi đó, tam giác AEF là tam giác đều.*

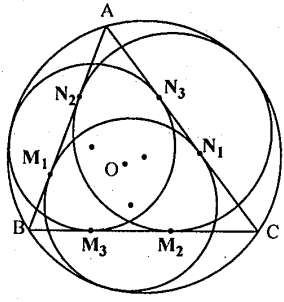




4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K_1) tiếp xúc với AB, AC tại M_1, N_1 đồng thời tiếp xúc đường tròn (O), tương tự có đường tròn (K_2), (K_3) với hai đường M_2N_2, M_3N_3. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn (TST 1999 VN).

Giải:



Đây hoàn toàn là tính chất đã chứng minh ở trên.

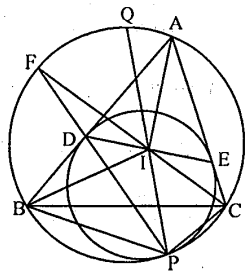
Các đường tròn (K_1), (K_2), (K_3) tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC và đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tạo ra các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3.

Theo *Bài toán* $\Rightarrow$ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC là trung điểm các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (Chứng minh ở định lí).

$\Rightarrow$ Các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 đồng quy tại I.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn (K) tiếp xúc với AB, AC đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại P, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng PI đi qua điểm giữa cung BAC.

Giải:



Gọi D và E là tiếp điểm của đường tròn (K) tiếp xúc với AB, AC; CI cắt đường tròn (O) tại F, PI cắt (O) tại Q. Theo *Bài toán*, trung điểm DE là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

$$\Rightarrow \angle FPB = \angle DPB = \angle DIB = \frac{1}{2}\angle C$$

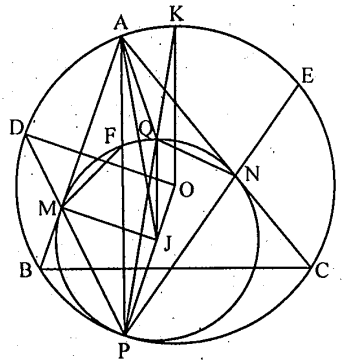
$\Rightarrow$ tứ giác $DBPI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BPQ = \angle ADE$.

Tương tự, tứ giác $IPCE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle IPC = \angle AED$

$\Rightarrow \angle BPQ = \angle CPQ \Rightarrow Q$ là điểm chính giữa cung BAC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC thứ tự tại M, N đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại P. Gọi Q là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (J) và song song với BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Giải:



Đường tròn tâm (J) tiếp xúc với đường tròn tâm (O) tại $P \Rightarrow O, J, P$ thẳng hàng, đường thẳng PM, PN cắt đường tròn (O) tại D và E;

$\Rightarrow \Delta PJM$ và ΔPOD là các tam giác cân

$\Rightarrow \widehat{PMJ} = \widehat{PDO} \Rightarrow JM // OD$

AB tiếp xúc với (J) tại $M \Rightarrow JM \perp AB$

$\Rightarrow OD \perp AB \Rightarrow \widehat{DA} = \widehat{DB}$.

Tương tự $\widehat{EA} = \widehat{EC}$.

Tiếp tuyến của (J) tại Q song song với BC

$\Rightarrow QJ \perp BC \Rightarrow OK \perp BC \Rightarrow \widehat{KB} = \widehat{KC}$

$\Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{DK} = \widehat{KE} + \widehat{EC} \Rightarrow \widehat{DA} + \widehat{DK} = \widehat{KE} + \widehat{EA}$

$\Rightarrow 2\widehat{DA} + \widehat{AK} = 2\widehat{KE} + \widehat{AK} \Rightarrow \widehat{DA} = \widehat{KE}$;

Gọi F là giao điểm của AP với (J) $\Rightarrow \widehat{MF} = \widehat{NQ} \Rightarrow MF = NQ$;

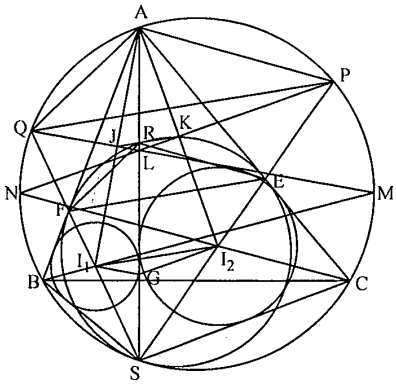
Từ $AM = AN \Rightarrow \Delta AMF$ và ΔANQ bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAF} = \widehat{NAQ} \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn mixtilinear ứng với góc A tiếp điểm với đường tròn (O) tại S. Chứng minh rằng hai đường tròn nội tiếp tam giác ABS và tam giác ACS tiếp xúc nhau.

Giải:

Gọi I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp ΔABS và ΔACS, E và F là tiếp điểm của đường tròn mixtilinear với cạnh AC và AB, SE và SF cắt đường tròn (O) tại P và Q, đường thẳng qua I_1 và vuông góc với AI_1 cắt đường thẳng qua I_2 và vuông góc với AI_2 cắt nhau tại G, BI_1 và CI_2 cắt đường tròn (O) tại M và N.



Đường thẳng PN cắt QM nhau tại L, PN cắt AI_2 tại K, QM cắt AI_1 tại J.

Từ đó ta có $QA = QI_1$ và $MA = MI_2$

$\Rightarrow QM$ là trung trực AI_1

$\Rightarrow QM \perp AI_1 \Rightarrow QM // I_1G$, tương tự $PN // I_2G$.

Gọi R là giao điểm đường tròn mixtilinear ứng với góc A với SA.

$\Rightarrow$ qua phép vị tự tâm S tứ giác $AQSP$ có ảnh là tứ giác $RFSE$, mặt khác tứ giác $RFSE$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow \dfrac{QI_1}{QS} = \dfrac{QA}{QS} = \dfrac{PA}{PS} = \dfrac{PI_2}{PS}$

$\Rightarrow PQ // I_1I_2 \Rightarrow S, G, L$ thẳng hàng.

Mặt khác JK là đường trung bình của $\Delta AI_1I_2 \Rightarrow JK // I_1I_2$, hai ΔLKJ và ΔI_2GI_1 đồng dạng $\Rightarrow I_2J, I_2K, GL$ cắt nhau tại $A \Rightarrow A, L, G$ thẳng hàng $\Rightarrow A, G, S$ thẳng hàng $\Rightarrow$ hai đường tròn nội tiếp tam giác ABS và tam giác ACS tiếp xúc nhau.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE, CF. Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D, gọi M, N là giao điểm của DB, DC với EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tiếp xúc với đường tròn (O) (IMO).

Giải:

Gọi I là trung điểm cạnh BC, theo giả thiết $BE \perp AC$, $CF \perp AB$

$\Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$

$\Rightarrow IE = IC$.

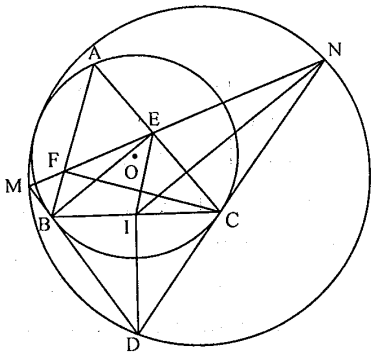
Ta có DB, DC là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow \angle ECN = \angle ABC = \angle NEC \Rightarrow \Delta NCE$ cân

$\Rightarrow NC = NE$

$\Rightarrow \Delta IEN = \Delta ICN \Rightarrow \angle ENI = \angle CNI$

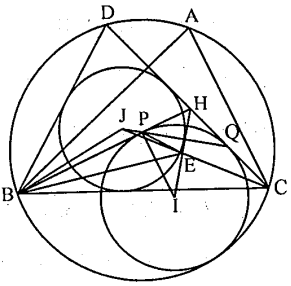
$\Rightarrow NI$ là phân giác góc $\angle MND$.



Mặt khác DI là phân giác góc $\angle MDN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔMDN.

Theo *Bổ đề* $\Rightarrow$ đường tròn (O) là đường tròn mixtilinear của ΔDMN.

Ví dụ 6. Gọi H là trực tâm của tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với HB, HC và đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng trung điểm của HI là tâm đường tròn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác BHC.



Giải:

Kéo dài CH cắt đường tròn (O) tại D, do H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow D$ và H đối xứng qua cạnh AB.

Gọi P, Q là các tiếp điểm của đường tròn (I) tiếp xúc với HB, HC và đường tròn (O), và J là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDC.

E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBHC, theo Bổ đề Sawayama - Thebault $\Rightarrow J$, P, Q thẳng hàng và J, E, C thẳng hàng.

$$\Rightarrow \angle BEJ = 180^0 - \angle BEC = 180^0 - (90^0 + \angle BHE)$$

$$= 90^0 - \angle BHE = \angle HPQ = \angle JPB$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BJPE$ nội tiếp.

$$\angle HPE = 180^0 - \angle BPE = 180^0 - \angle BJD = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BDC$$

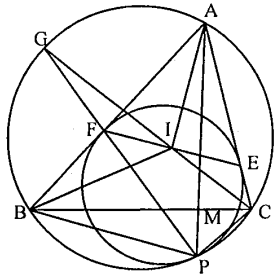
$$= 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BHE .$$

Theo giả thiết $\Rightarrow IP \perp BH \Rightarrow \Delta IPH$ là tam giác vuông

$\Rightarrow EH = EI \Rightarrow E$ là trung điểm HE.

Ví dụ 7. Ba đường tròn mixtilinear tiếp xúc với AB, AC, tiếp xúc với AB, BC, tiếp xúc với BC, CA và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P, Q, R. Chứng minh rằng AP, BQ, CR đồng quy.

Giải:



Từ kết quả của bài toán trung điểm I của EF là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow PF$ là phân giác góc $\angle APB$

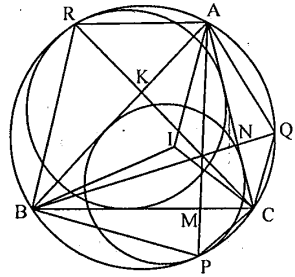
$$\Rightarrow \frac{PB}{BF} = \frac{PA}{AF} = \frac{PA}{AE} = \frac{PC}{CE} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{BF}{CE}$$

$$\angle AIB = 90^0 + \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle FIB = \angle AIB - \angle AIF = \angle AIB - 90^0 = \frac{1}{2}\angle C = \angle ECI$$

và $\angle BFI = \angle CEI \Rightarrow \Delta BIF$ và ΔICE đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC} = \frac{BF}{IE} = \frac{IF}{CE}.$$



Mặt khác, từ $\frac{BF}{CE} = \frac{BF}{IE}\frac{IF}{CE} = \frac{BI^2}{IC^2} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{BI^2}{IC^2}$.

$$\angle ABP + \angle ACP = 180^0$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB.BP\sin\angle APB}{AC.CP\sin\angle ACP} = \frac{AB.BP}{AC.CP} = \frac{AB}{AC}\frac{BI^2}{IC^2}.$$

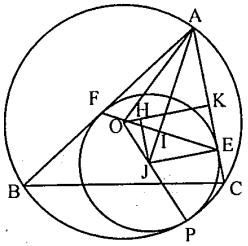
Hoàn toàn tương tự: $\frac{CN}{AM} = \frac{BC}{BA}\frac{CI^2}{AI^2}$, $\frac{AK}{KB} = \frac{CA}{CB}\frac{AI^2}{BI^2}$

$$\Rightarrow \frac{BM}{MC}\frac{CN}{NA}\frac{AK}{KB} = \frac{AB}{AC}\frac{BI^2}{IC^2}\frac{BC}{BA}\frac{CI^2}{AI^2}\frac{CA}{CB}\frac{AI^2}{BI^2} = 1.$$

Theo định lí Ceva $\Rightarrow AP$, BQ, CR thẳng hàng.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn tâm (J) tiếp xúc với AB, AC và đường tròn (O), gọi bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là r, bán kính đường tròn (J) là ρ. Chứng minh $\rho = \dfrac{r}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$ $(\angle A = \alpha)$.

Giải:



Đường tròn (J) tiếp xúc với AB, AC tại F và E, tiếp xúc với đường tròn (O) tại $P \Rightarrow O, J, P$ thẳng hàng, kẻ $JH \perp OK$;

Theo tính chất của đường tròn mixtilinear $\Rightarrow JA$ đi qua trung điểm của EF.

$$\Rightarrow \angle JAE = \frac{1}{2}\angle A \Rightarrow AE = \rho\cot\frac{\alpha}{2}$$

Kẻ $OK \perp AC \Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}b = R\sin B$, $OK = R\cos B$, $OJ = R - \rho$.

Kẻ $JH \perp OK \Rightarrow KE = AE - AK = \rho\cot\dfrac{\alpha}{2} - R\sin B$,

$OH = OK - HK = OK - JE = \rho - R\cos B$

ΔOJH vuông tại $H \Rightarrow OJ^2 = OH^2 + HJ^2$

$$\Rightarrow (R-\rho)^2 = (\rho - R\cos B)^2 + (\rho\cot\frac{\alpha}{2} - R\sin B)^2$$

$$\Rightarrow \rho = 2R\tan^2\frac{\alpha}{2}\left[\cot\frac{\alpha}{2}\sin B - 1 + \cos B\right] = 4R\tan^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{B}{2}\left[\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - \sin\frac{B}{2}\right]$$

(do $\sin B = 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ và $1 - \cos B = 2\sin^2\dfrac{B}{2}$)

$$\Rightarrow \rho = 4R\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{B}{2}\right] =$$

$$= 4R\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha+B}{2} = 4R\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC tại P và Q và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Chứng minh PQ đi qua trung điểm AI.

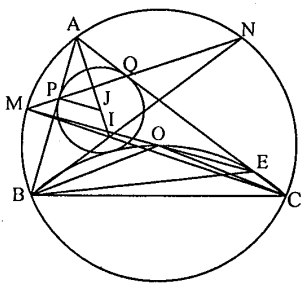
Giải:

Gọi E là giao điểm AC với đường tròn ngoại tiếp ΔBOC

$\Rightarrow \angle AEB = 180^0 - \angle BEC = 180^0 - \angle BOC = 180^0 - 2\angle BAC$

$\Rightarrow \angle ABE = 180^0 - \angle BAE - \angle AEB = \angle BAE \Rightarrow \Delta AEB$ cân

$\Rightarrow EO \perp AB$, EO cắt cung AB tại $M \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow$ đường tròn tâm (J) là đường tròn Thebault của ΔBEC ứng với AB và M là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của $\Delta BEC \Rightarrow M, P, Q$ thẳng hàng. Tương tự N là điểm chính giữa cung AC



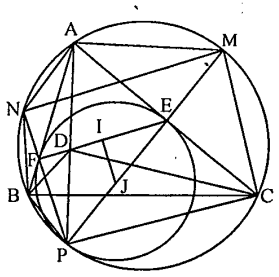
$\Rightarrow N, P, Q$ thẳng hàng $\Rightarrow MN$ là trung trực AI

$\Rightarrow PQ$ chia đôi AI.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm J tiếp xúc với cạnh AC tại E và AB tại F đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại P, AP cắt EF tại D. Chứng minh rằng tam giác BDF và tam giác CDE đồng dạng.

Giải:

Đường thẳng PE, PF cắt đường tròn (O) tại M và N, AC và AB tiếp xúc đường tròn tâm $J \Rightarrow EF // MN$.



AP là đường đối trung của ΔPFE (tính chất của đường đối trung) $\Rightarrow \dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PF^2}{PE^2}$ (1)

ΔBFN và ΔPFA đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{PF} = \dfrac{FN}{FA}$ (2)

Tương tự ΔCEM và ΔPEA đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{CE}{PE} = \dfrac{EM}{EA}$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{BF}{PF}\frac{PE}{CE}=\frac{FN}{FA}\frac{EA}{EM}=\frac{FN}{EM}$.

Mặt khác $EF//MN \Rightarrow \frac{FN}{EM}=\frac{PF}{PE} \Rightarrow \frac{BF}{CE}=\frac{PF^2}{PE^2}$.

Kết hợp (1) $\Rightarrow \frac{FD}{DE}=\frac{FB}{EC}$.

$\angle AFE = \angle AEF \Rightarrow \angle BFD = \angle CDE \Rightarrow \Delta BDF$ và ΔCDE đồng dạng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt tại E và F, đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O). Gọi M, N là trung điểm của AE, AF. Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua điểm chính giữa cung AB, AC.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC, đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại P. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC.
   Chứng minh rằng $\angle ABC = \angle BPD$ và $\angle ACB = \angle CPD$.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC, đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại P. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle BPI = \angle CPI$.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm (J) tiếp xúc với cạnh AB, AC, đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại P. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC với cạnh BC. Chứng minh rằng $\angle BAD = \angle CAP$.

5. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD. Hai đường tròn (O_1),(O_2) tiếp xúc với AB, CD đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O), đường tròn (O_3) tiếp xúc ngoài với (O_1),(O_2) cắt AB, CD tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng M, N, P, Q nằm trên một đường tròn.

Chương 5

ĐỊNH LÍ EULER

Leonhard Euler (1707-1783), nhà toán học thiên tài người Thụy Sĩ. Năm 20 tuổi, ông làm việc tại Viện hàn lâm Berlin, đồng thời là cộng tác viên Viện hàn lâm Peterburg. Ngoài Toán học, ông còn nghiên cứu Thiên văn, Vật lí, Hoá học. Ông để lại 30.000 trang sách viết bằng bút lông và 25.000 lá thư hoàn toàn là những đề tài khoa học và những công trình nghiên cứu của ông. Ông là người đưa ra kí hiệu ngày nay vẫn thường dùng như: số π, số ảo $i^2 = -1$, số e, cos, sin, tan... ông được nhiều nước vinh danh là nhà toán học xuất sắc nhất thế kỉ XVIII.

Euler đã đưa ra định nghĩa điểm Euler, năm 1765 tại Peterburg ông đã cho đăng cách chứng minh định lí trong Kỉ yếu của Viện hàn lâm. Ông sống nhiều năm ở Peterburg, năm 60 tuổi ông bị mù hai mắt.

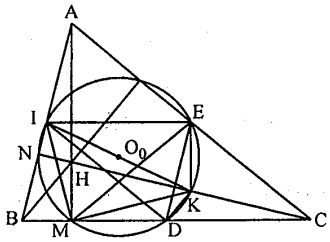
I. ĐỊNH LÍ EULER

1. Định lí Euler

Định nghĩa. Trung điểm của các đoạn thẳng thuộc đường cao từ đỉnh đến trực tâm tam giác gọi là *điểm Euler*.

Định lí. Trung điểm các cạnh, hình chiếu của trực tâm đến các cạnh và các điểm Euler nằm trên một đường tròn, gọi là *đường tròn chín điểm* hay *đường tròn Euler*.

Chứng minh:



Gọi D, E, I là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; các đường cao AM, CN và H là trực tâm ΔABC suy ra $IE//BC$, $DI//AC$, $AM \perp BC$;

$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}AC$, $DI = \frac{1}{2}AC \Rightarrow ME = DI$

$\Rightarrow IEDM$ là hình thang cân

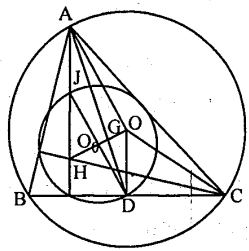
$\Rightarrow I, E, D, M$ thuộc một đường tròn, đó là đường tròn ngoại tiếp ΔDEI.

Gọi K là trung điểm $CH \Rightarrow KE$ là đường trung bình của ΔACH

$\Rightarrow EK//AH \Rightarrow IE \perp EK$, $KD//HB \Rightarrow KD \perp ID$

$\Rightarrow I, E, K, D, M$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔDEI, tương tự chứng minh cho các điểm còn lại.

Nhận xét: Đường thẳng IK là đường kính của của đường tròn chín điểm, O_0 là trung điểm của $IK \Rightarrow O_0$ là tâm đường tròn đó.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow OD//AH$

Nối D với O_0 cắt AH tại $J \Rightarrow JA = JH$

$\Rightarrow \Delta O_0OD$, ΔO_0HJ bằng nhau (g.c.g)

$\Rightarrow OD = JH = AJ \Rightarrow AJDO$ là hình bình hành

$\Rightarrow OA = DJ \Rightarrow O_0J = \frac{1}{2}R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp).

Gọi giao điểm AD với OH tại G, theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{AH}{OD} = 2$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow O, G, O_0, H$ nằm trên một đường thẳng và $HG = 2GO$, $O_0H = O_0O$.

Đường thẳng đi qua trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có tên là *đường thẳng Euler*.

Đường thẳng Euler có nhiều tính chất mà ngày nay chúng ta vẫn chưa khai thác hết, năm 2006 kiến trúc sư người Hi Lạp Rostas Vittasko đã đưa ra tính chất:

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn và có hai đường chéo cắt nhau tại E. Khi đó các đường thẳng Euler của các tam giác AEB, EBC, ECD, EDA đồng quy.

2. Định lí Hamilton

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, các tam giác BCH, CAH, ABH chung nhau đường tròn 9 điểm.

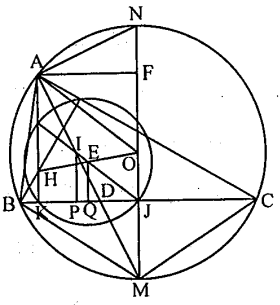
Hamilton (1805 - 1865) – Nhà toán học, vật lí người Ireland, năm 1861 ông đã chứng minh định lí trên, ông có công lớn trong lí thuyết đồ thị nhiều người biết đến, đó là chu trình Hamilton.

3. Định lí Feuerbach

Đường tròn chín điểm tiếp xúc với đường tròn nội tiếp.

Karl Feuerback (1800 - 1834) là nhà toán học người Đức.

Chứng minh:



Gọi O, I, E là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, và đường tròn chín điểm của ΔABC.

Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại M, kẻ đường kính MN, F là hình chiếu của A trên MN; J là giao điểm MN và $BC \Rightarrow FJ = AK$.

Gọi K, P, Q là hình chiếu của H, I, E trên BC và D là giao điểm của AM với $BC \Rightarrow JB = JC$.

Tứ giác $HOJK$ là hình thang $\Rightarrow 2EQ = HK + OJ$

$FO = FJ - OJ = AK - OJ = AH + HK - OJ$

$= 2OJ + HK - OJ = OJ + HK = 2EQ \Rightarrow EQ = \frac{1}{2}OF$

ΔAFN, ΔIPD là hai tam giác vuông có $\angle PID = \angle DMN = \angle NAF$

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \frac{FN}{PD} = \frac{AF}{IP}$

$\Rightarrow FN.IP = AF.PD = KJ.PD$ (1)

ΔMBD, ΔMAB đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MB}{MA}$.

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MI = MB = MC \Rightarrow \dfrac{MD}{MI} = \dfrac{MI}{MA}$.

Thay MD, MI, MA bằng hình chiếu trên cạnh $BC \Rightarrow \dfrac{JD}{JP} = \dfrac{JP}{JK}$

$\Rightarrow JP^2 = JD.JK \Rightarrow JP.JK - JP^2 = JP.JK - JD.JK$

$\Rightarrow JP(JK - JP) = JK(JP - JD) \Rightarrow JP.PK = JK.DP$

Kết hợp (1) $\Rightarrow JP.PK = FN.IP$.

Áp dụng định lí Pythagoras ta có: $EI^2 = (IP - EQ)^2 + (JP - JQ)^2$

$\Rightarrow EI^2 = (IP - \dfrac{OF}{2})^2 + (JP - \dfrac{JK}{2})^2$

$\Rightarrow EI^2 = IP^2 + \dfrac{1}{4}OF^2 - IP.OF + JP^2 + \dfrac{1}{4}JK^2 - JP.JK$

$EI^2 = \dfrac{1}{4}(OF^2 + JK^2) + IP^2 - JP(JK - JP) - IP.OF$

$= \dfrac{1}{4}R^2 + IP^2 - JP.PK - IP.OF = \dfrac{1}{4}R^2 + r^2 - IP(OF + FN) = \dfrac{1}{4}R^2 + r^2 - R.r$

$\Rightarrow IE^2 = (\dfrac{R}{2} - r)^2 \Rightarrow IE = \dfrac{R}{2} - r$ (do $R \geq 2r$).

$\Rightarrow$ đường tròn nội tiếp và đường tròn chín điểm tiếp xúc nhau (bán kính đường tròn chín điểm $\dfrac{R}{2}$).

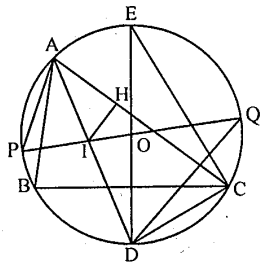
Đường tròn chín điểm tiếp xúc ngoài với mỗi đường tròn bàng tiếp tam giác.

Chứng minh tương tự cho ta kết quả $EM = \dfrac{R}{2} + r_a$ (M là tiếp điểm, r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với góc A).

Các tiếp điểm của đường tròn chín điểm với đường tròn nội tiếp và bàng tiếp gọi là *điểm Feuerbach.*

4. Hệ thức Euler

Định lí. Trong tam giác, bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp và khoảng cách giữa hai tâm có hệ thức $d^2 = R^2 - 2R.r$.



Chứng minh:

Cách 1.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, I là tâm đường tròn nội tiếp, AI cắt đường tròn (O) tại D.

Qua I kẻ đường kính PQ, đặt $d = OI$

$\Rightarrow AI.ID = IP.IQ = (OP - OI)(OQ + OI) = R^2 - d^2$;

Kẻ $IH \perp AC \Rightarrow IH = r$, DE là đường kính $\Rightarrow EC \perp CD$

$\Rightarrow \Delta AHI$ và ΔECD là hai tam giác vuông có $\angle DAC = \angle DEC$

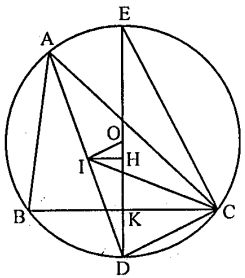
$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{HI}{AI} = \dfrac{CD}{ED}$.

$DC = DI \Rightarrow AI.DI = ED.IH = 2R.r$

$\Rightarrow R^2 - d^2 = 2R.r$

Cách 2.

DO cắt (O) tại E, H là hình chiếu của I trên DE.



Trong ΔOID: $OI^2 = ID^2 + OD^2 - 2OD.DH$

Đặt $OI = d \Rightarrow d^2 = ID^2 + R^2 - 2R.DH$,

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow DI = DC$

$DC \perp CE \Rightarrow DC^2 = DK.DE = DK.2R = DI^2$

$\Rightarrow d^2 = DK.2R + R^2 - 2R.DH$

$\Rightarrow d^2 = R^2 - 2R(DH - DK) = R^2 - 2R.HK = R^2 - 2R.r$.

Hệ quả. Trong tam giác $R \geq 2r$ (dấu bằng xảy ra khi tam giác đều).

Định lí. Trong tam giác, bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn bàng tiếp và khoảng cách giữa hai tâm có hệ thức $d_a^{\,2} = R^2 + 2R.r_a$.

5. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định (A khác B). Một điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $\angle ACB = \alpha$ ($0^0 < \alpha < 180^0$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh rằng MN có độ dài không đổi.

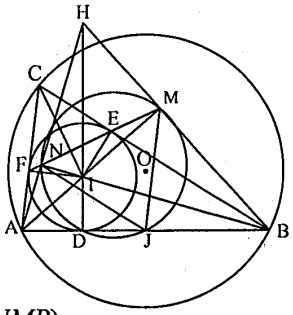
2) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm cố định.

(VMO 2009).

Giải:

1) Theo giả thiết $IE \perp BC$, $IF \perp AC$, I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow \angle AIB = 90^0 + \dfrac{C}{2}$.



E và F là tiếp điểm $\Rightarrow \angle CFN = 90^0 - \dfrac{C}{2}$

$\Rightarrow \angle AIB + \angle CFN = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $AFNI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ANB = 90^0$

Tương tự $\angle AMB = 90^0 \Rightarrow ANMB$ là tứ giác nội tiếp có đường kính AB.

Gọi J là trung điểm $AB \Rightarrow J$ là tâm của đường tròn ($ANMB$)

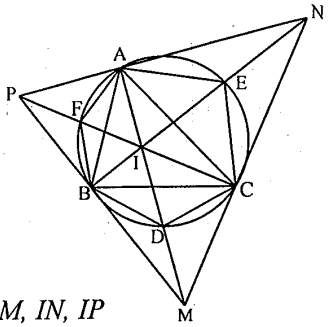
$\Rightarrow \angle MJN = 2\angle MBN = 2\angle NEI = 2\angle ICF = \angle ACB = \alpha$

$\Rightarrow MN = AB \sin\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow MN$ có độ dài không đổi.

2) AN cắt BM tại H, theo chứng minh trên $\Rightarrow AM \perp BH$, $BN \perp AH \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta AHB \Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔDMN là đường tròn Euler của ΔAHB $\Rightarrow$ đường tròn này qua trung điểm $AB \Rightarrow$ luôn đi qua J.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, các đường phân giác trong của góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D, E, F. Đường phân giác ngoài góc B, C cắt AD tại M, đường phân giác ngoài góc C, A cắt BE tại N, đường phân giác ngoài góc A, B cắt CF tại P. Chứng minh rằng diện tích tam giác MNP gấp hai lần diện tích $AECDBF$.

Giải:



Gọi I là giao điểm các đường phân giác của ΔABC.

Theo giả thiết AP là phân giác ngoài của góc A

$\Rightarrow AP \perp AM$

Tương tự $NB \perp MP$, $PC \perp MN$

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường tròn Euler của ΔMNP.

$\Rightarrow I$ là trực tâm $\Rightarrow D, E, F$ là trung điểm các đoạn IM, IN, IP

$\Rightarrow S_{BMD} = S_{BDI}$ và $S_{CMD} = S_{CDI}$.

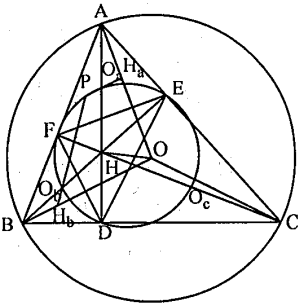
Tương tự $S_{CNE} = S_{CEI}$, $S_{ANE} = S_{AEI}$, $S_{APF} = S_{AFI}$, $S_{BPF} = S_{BFI}$.

Cộng các vế đẳng thức lại $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác AEF, BDF, CDE đồng quy.

Giải:

Gọi O_a, O_b, O_c là tâm các tam giác AEF, BDF, CED, $AH \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp AB \Rightarrow O_a$, O_b, O_c là trung điểm của AH, BH, CH. Gọi H_a, H_b, H_c là trực tâm các tam giác AEF, BDF, CED. Gọi P là giao điểm của H_aO_a với H_bO_b và H là trực tâm ΔABC.



ΔAEF và ΔABC đồng dạng $\Rightarrow \angle AO_aH_a = \angle AOH$;

Tương tự $\angle BO_bH_b = \angle BOH$, $\angle CO_cH_c = \angle COH$;

Xét tứ giác O_aPO_bH:

$\angle O_aPO_b = 360^0 - \angle PO_aH - \angle PO_bH - \angle O_aHO_b$

$= 360^0 - \angle AO_aH_a - \angle BO_bH_b - \angle AHB$

$= 360^0 - \angle AOH - \angle BOH - \angle AHB$

$= 360^0 - \angle AOB - \angle DHE = 180^0 - \angle C$.

Mặt khác $\angle O_aO_cO_b = \angle C \Rightarrow$ tứ giác $PO_aO_cO_b$ nội tiếp

$\Rightarrow P$ thuộc đường tròn Euler của ΔABC.

Gọi Q là giao điểm H_aO_a với H_cO_c hoàn tương tự Q thuộc được tròn Euler của $\Delta ABC \Rightarrow P \equiv Q \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\frac{1}{R^2-d^2}=\frac{1}{d_a^2-R^2}+\frac{1}{d_b^2-R^2}+\frac{1}{d_c^2-R^2}.$$

Trong đó R, d, d_a, d_b, d_c theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp, khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và bàng tiếp ứng với các góc A, B, C.

Giải:

Trước hết ta chứng minh hệ thức $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ (r, r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn nội tiếp và bàng tiếp ứng với các góc A, B, C).

Từ $S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$, $2p=a+b+c$

$$\Rightarrow pr=(p-a)r_a\Rightarrow\frac{p-a}{r}=\frac{p}{r_a}\Rightarrow\frac{1}{r}(p-a+p-b+p-c)=p(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c})$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

Theo hệ thức Euler $d^2=R^2-2rR\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{2R}{R^2-d^2}$,

$$d_a{}^2=R^2+2R.r_a\Rightarrow\frac{1}{r_a}=\frac{2R}{d_a^2-R^2}.$$

Tương tự $\frac{1}{r_b}=\frac{2R}{d_b^2-R^2}$ và $\frac{1}{r_c}=\frac{2R}{d_c^2-R^2}$, cộng các đẳng thức lại:

$$\frac{2R}{R^2-d^2}=\frac{2R}{d_a{}^2-R^2}+\frac{2R}{d_b{}^2-R^2}+\frac{2R}{d_c{}^2-R^2}\Rightarrow\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, D trên AB và E trên AC sao cho B, D, E, C nằm trên một đường tròn, BE và CD cắt nhau tại P. Gọi H là hình chiếu của P trên AC, và M, N thứ tự là trung điểm AP và BC. Chứng minh rằng tam giác MHN và tam giác ADC đồng dạng.

Giải:

Gọi I, J thứ tự là trung điểm của AC và PC; $IA = IC$, $JP = JC$.

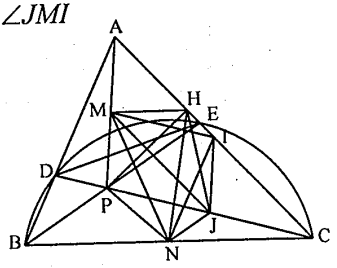
$\Rightarrow IJ//AP$, $NI//AB$, $NB = NC\Rightarrow NJ//BP\Rightarrow\angle JNC=\angle EBC$, $\angle INC=\angle ABC$.

$\angle INJ = \angle BNJ - \angle BNI = (180^0 - \angle JNC) - (180^0 - \angle INC)$

$= \angle INC - \angle JNC = \angle ABC - \angle EBC = \angle ABE = \angle DCE$

$MA = MP \Rightarrow MJ // AC$, $IJ // AP \Rightarrow \angle DCE = \angle PJM = \angle JMI$

$\Rightarrow \angle INJ = \angle IMJ \Rightarrow MIJN$ nội tiếp.



Mặt khác M, I, J nằm trên đường tròn Euler của ΔAPC, theo giả thiết $PH \perp AC$

$\Rightarrow M, H, I, J, N$ nằm trên đường tròn Euler.

$\Rightarrow \angle HMN = \angle NIC = \angle CAD$,

$\angle HNM = \angle HJM = \angle PJM = \angle ACD$ (Do MJ là phân giác $\angle PJH$)

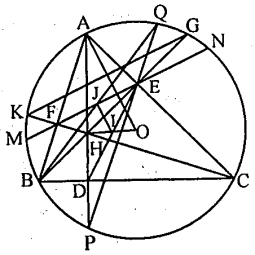
$\Rightarrow \Delta MHN$ và ΔADC đồng dạng (g.g).

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường cao AD, BE, CF, đường thẳng AH cắt (O) tại P, PE cắt (O) tại Q, đường thẳng BE cắt đường (O) tại G, BQ cắt EF tại J, gọi I trung điểm OH. Chứng minh rằng IJ song song với OA.

Giải:

Đường thẳng EF cắt (O) tại M, N, BE và CF cắt (O) tại G, K

$\Rightarrow \angle GKC = \angle GBC = \angle EBC = \angle EFC \Rightarrow KG // MN$



$$\angle BFC = 90^0 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{BC}) = \angle BEC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{BC})$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{AG} \Rightarrow OA \perp KG \Rightarrow OA \perp MN$.

Xét hai tam giác BFE và DHE có:

$\angle BFE = \angle PHE$ (cùng bù với $\angle ACB$),

$\angle FEB = \angle HED$ (cùng bằng $\angle BCH$) $\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng

ΔBFJ và ΔPHE đồng dạng ($\angle ABQ = \angle APQ$).

Mặt khác ΔABC nhọn ta luôn có $HD = DP$.

Với các tam giác đồng dạng trên ta có:

$$\frac{BF}{FJ} = \frac{PH}{HE} \Rightarrow FJ = \frac{BF.HE}{PH}; \quad \frac{HD}{HE} = \frac{BF}{EF} \Rightarrow EF = \frac{2BF.HE}{PH}.$$

$\Rightarrow EF = 2JF \Rightarrow JF = JE.$

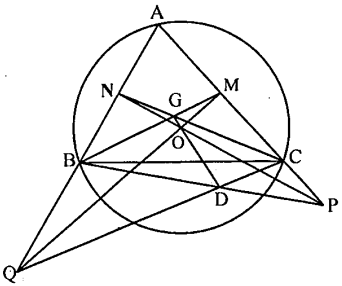
Theo tính chất của đường tròn Euler của ΔABC có tâm là trung điểm OH

$\Rightarrow IJ \perp EF \Rightarrow IJ$ song song với OA.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC góc A không vuông. Gọi D là điểm thoả mãn $\angle DBA = \angle BAC = \angle DCA$.

Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua điểm D.

Giải:



Gọi P là giao điểm của AC và BD, Q là giao điểm AB và CD, và M, N thứ tự là trung điểm AC, AB

O, G là tâm và trọng tâm tam giác.

Theo giả thiết $\angle ABP = \angle ABD = \angle BAC$

$\Rightarrow \Delta ABP$ là tam giác cân

$\Rightarrow P$, O, N thẳng hàng.

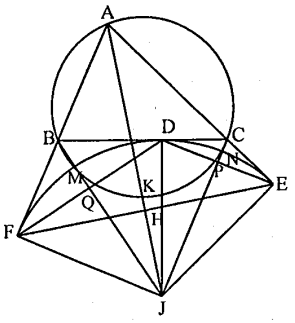
Tương tự ΔAQC cân $\Rightarrow Q$, O, M thẳng hàng.

Áp dụng định lí Desargues $\Rightarrow D$, O, G thẳng hàng

$\Rightarrow$ đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua điểm D.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc A có tâm J. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua điểm J.

Giải:



Gọi các tiếp điểm với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, đường tắng JA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại K và EF tại H, đường thẳng JB, JC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại M và N, đường thẳng DE và JC cắt nhau tại P, DF cắt JB tại Q

$\Rightarrow JE \perp AC$, $JF \perp AB$, $JA \perp EF$, $DF \perp JB$, $DE \perp JC$

$\Rightarrow JH.JA = JP.JC = JQ.JB$

và $JK.JA = JN.JC = JM.JB$.

Chia các đẳng thức cho nhau ta được: $\frac{JH}{JK} = \frac{JP}{JN} = \frac{JQ}{JM}$

$\Rightarrow J$ và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *MKN, PQH* thẳng hàng

$\Rightarrow$ đường thẳng Euler của tam giác *ABC* đi qua điểm *J*.

Ví dụ 9. Cho tam giác *ABC, I* là điểm trong tam giác thoả mãn

$\angle BIC = \angle CIA = \angle AIB$.

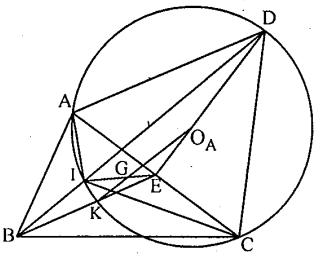
Chứng minh rằng ba đường thẳng Euler của ba tam giác *IBC, ICA, IAB* đồng quy.

Giải:

Theo giả thiết $\angle BIC = \angle CIA = \angle AIB \Rightarrow \angle CIA = 120^0$, dựng đường tròn ngoại tiếp ΔAIC, đường thẳng BI cắt đường tròn tại *D*.

$\Rightarrow \angle ADC = 60^0$, $\angle AIB = 120^0 \Rightarrow \angle AID = 60^0$

$\Rightarrow \angle ACD = 60^0 \Rightarrow \Delta ADC$ là tam giác đều.



Gọi O_A là tâm của đường tròn *AIC*, kẻ $DO_A \perp AC$, cắt *AC* tại $E \Rightarrow EA = EC \Rightarrow IE$ là trung tuyến ΔAIC, *BE* là trung tuyến của ΔABC. Từ O_A kẻ đường thẳng song song *DB* cắt *BE* tại *K*, cắt *EI* tại *G*.

Theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{EK}{KB} = \frac{EG}{GI} = \frac{EO_A}{DO_A} = \frac{1}{2}$

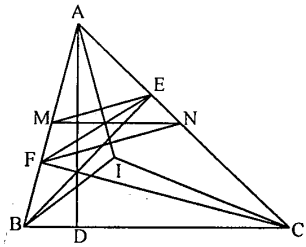
$\Rightarrow G, K$ là trọng tâm của ΔIAC, ΔABC.

Mặt khác O_A là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta IAC \Rightarrow O_AG$ là đường thẳng Euler của ΔIAC.

Chứng minh hoàn toàn tương tự đường thẳng Euler của ΔAIB, ΔBIC đi qua K $\Rightarrow$ ba đường thẳng Euler của ba tam giác *IBC, ICA, IAB* đồng quy.

Ví dụ 10. Cho tam giác *ABC* không vuông có các đường cao *AD, BE, CF* và tâm đường tròn nội tiếp *I*. Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng Euler của các tam giác *AEF, BFD, CDE*, gọi d_1', d_2', d_3' tương ứng là các đường thẳng đối xứng của d_1, d_2, d_3 qua *AI, BI, CI*. Chứng minh rằng d_1', d_2', d_3' song song với nhau.

Giải:



Từ E, F kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow \angle FAI = \angle EAI \Rightarrow$ các tam giác AME, ANF là các tam giác cân $\Rightarrow M$, E và N, F đối xứng qua $AI \Rightarrow \Delta AMN$ đối xứng với ΔAEF qua AI

$\Rightarrow$ đường thẳng Euler của ΔAMN đối xứng với đường Euler của ΔAEF qua AI. Nếu d_1 là đường thẳng Euler của $\Delta AEF \Rightarrow d_1'$ là đường thẳng Euler của ΔAMN.

$BE \perp AC$, $CF \perp AB \Rightarrow \Delta AEF$ và ΔABC đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

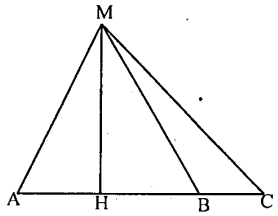
Theo định lí Thales đảo $\Rightarrow MN // BC \Rightarrow$ đường thẳng Euler của ΔAMN và đường thẳng Euler của ΔABC song song với nhau

$\Rightarrow d_1'$, d_2', d_3' song song với nhau.

II. ĐỊNH LÍ STEWART

Bài toán. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. M là điểm bất kì, ta luôn có hệ thức: $MA^2.BC + MC^2.AB - MB^2.AC = AC.AB.BC$.

Chứng minh:



Gọi H là hình chiếu của M trên $AC \Rightarrow MH \perp AC$

Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác MAB và MBC

$MA^2 = AB^2 + MB^2 - 2AB.HB$;

$MC^2 = MB^2 + BC^2 + 2BC.HB$

$\Rightarrow MA^2.BC + MC^2.AB = MB^2(AB + BC) + AB.BC(AB + BC)$

$\Rightarrow MA^2.BC + MC^2.AB - MB^2.AC = AC.AB.BC$

Định lí mang tên nhà toán học người Scotland - Matthew Stewart, ông là người đầu tiên chứng minh định lí này vào năm 1746.

1. Định lí Stewart

D là điểm trên cạnh BC của tam giác ABC. Chia cạnh BC thành hai đoạn BD và DC ta có đẳng thức: $AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.BD.DC$

Hệ quả. Từ định lí trên ta suy ra công thức tính đường trung tuyến trong một tam giác: $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

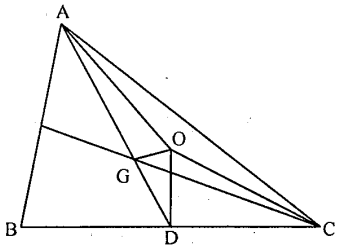
Khoảng cách giữa các điểm đặc biệt trong tam giác.

1. Khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm.

Gọi O, G là tâm và trọng tâm tam giác và D là trung điểm của BC, ΔCOD vuông $\Rightarrow OD^2 = OC^2 - DC^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow OD = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$.

Từ $AD^2 = m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$.



Áp dụng hệ thức Stewart với ΔAOD:

$OA^2.GD + OD^2.AG - OG^2.AD = AD.AG.GD$

$\Rightarrow d^2 = OG^2 = \frac{R^2.GD}{AD} + \frac{OD^2.AG}{AD} - AG.GD$, $AG = \frac{2}{3}m_a$, $GD = \frac{1}{3}m_a$

$\Rightarrow d^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{4R^2 - a^2}{6} - \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{18} = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$

$\Rightarrow d = \sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}}$.

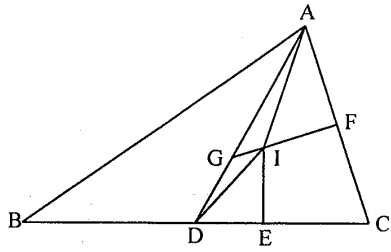
2. Khoảng cách từ trọng tâm đến tâm đường tròn nội tiếp.

Ta có $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$.

Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với các cạnh BC và AC.

$$\Rightarrow ED = \frac{a}{2} - (p-c) = \frac{c-b}{2}$$

$$\Rightarrow ID = \sqrt{r^2 + \frac{(c-b)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (c-b)^2}$$



ΔAIF vuông $\Rightarrow IA = \sqrt{r^2 + (p-a)^2}$

Áp dụng định lí cho ΔAID:

$$IA^2.GD + ID^2.AG - IG^2.AD = AG.AD.GD$$

$$\Rightarrow d^2 = IG^2 = \frac{IA^2.GD}{AD} + \frac{ID^2.AG}{AD} - AG.GD$$

$$d^2 = \frac{r^2 + (p-a)^2}{3} + \frac{4r^2 + (c-b)^2}{6} - \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{18} = \frac{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2+b^2+c^2)}{9}$$

$$d = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2+b^2+c^2)}.$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng. Xác định vị trí của M để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Trước hết bạn đọc chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$

$$GA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3MG^2.$$

Cộng ba công thức đường trung tuyến trong một tam giác ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3MG^2$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MG^2 = 0 \Rightarrow M \equiv G$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ta có đẳng thức $5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$.

Giải:

Từ đẳng thức $d=\frac{1}{3}\sqrt{9r^2-3p^2+2(a^2+b^2+c^2)}$, khi G nằm trên đường tròn nội tiếp $\Rightarrow r=\frac{1}{3}\sqrt{9r^2-3p^2+2(a^2+b^2+c^2)}$. Từ đó biến đổi ta được đpcm.

Ví dụ 3. Cho hai điểm A, B cố định. Tìm quỹ tích M thoả mãn $MA^2+MB^2=k^2$ (k là số dương cho trước).

Giải:

Gọi I là trung điểm AB ta có: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

$\Rightarrow 2MI^2=k^2-\frac{1}{2}AB^2 \Rightarrow MI^2=\frac{2k^2-a^2}{4}$ $(AB=a)$

- Nếu $k\geq\frac{a\sqrt{2}}{2}$ thì quỹ tích M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{\sqrt{2k^2-a^2}}{2}$

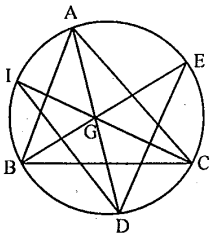
- Nếu $k<\frac{a\sqrt{2}}{2}$ bài toán không có nghiệm.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC không cân. Các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại D, E, I. Giả sử $DE = DI$ khi đó $2BC^2=AB^2+AC^2$.

Giải:

Gọi G là trọng tâm $\Rightarrow \Delta IGD$ và ΔAGC đồng dạng $\Rightarrow \frac{ID}{AC}=\frac{GD}{GC}$.

Tương tự $\frac{ED}{AB}=\frac{GD}{GB}$, theo giả thiết $DE = DI \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BG}{CG}$.



Áp dụng công thức đường trung tuyến:

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{2AB^2+2BC^2-AC^2}{2AC^2+2BC^2-AB^2}$$

$\Rightarrow (AC^2-AB^2)(2BC^2-AB^2-AC^2) \Rightarrow 2BC^2=AB^2+AC^2$.

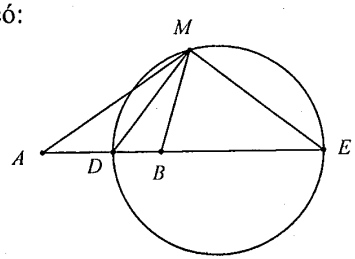
III. ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS

1. Bài toán. Cho đoạn thẳng $AB = a$, k là số cho trước $(0 < k < 1)$, M là điểm chuyển động trong mặt phẳng sao cho $\frac{MA}{MB} = k$. Tìm quỹ tích của điểm M.

Giải:

Phần thuận: Dựng MD, ME là phân giác của $\Delta MAB \Rightarrow \widehat{DME} = 90^0$

Theo tính chất đường phân giác và giả thiết ta có:



$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{DA}{DA + DB} = \frac{k}{k+1}$$

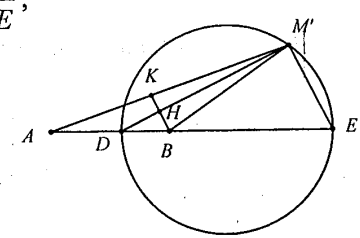
$$\Rightarrow DA = \frac{ak}{k+1}, \text{ tương tự } AE = \frac{ak}{k-1} \quad (1)$$

$\Rightarrow D, E$ cố định, $\widehat{DME} = 90^0$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính DE.

Phần đảo: Lấy M' trên đường tròn đường kính DE, qua B kẻ đường vuông góc DM' cắt $M'D$ và MA tại H và K

$$\Rightarrow BK // M'E \Rightarrow \frac{BK}{EM'} = \frac{AB}{AE} = \frac{k-1}{k}, \frac{BH}{EM'} = \frac{DB}{DE};$$



$$DE = AE - AD = \frac{ak}{k-1} - \frac{ak}{k+1} = \frac{2ak}{k^2-1}.$$

Từ (1) $\Rightarrow DB = \frac{a}{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{BH}{EM'} = \frac{DB}{DE} = \frac{a}{k+1}\frac{k^2-1}{2ak} = \frac{k-1}{2k} \Rightarrow 2\frac{BH}{EM'} = \frac{BK}{EM'}$$

$\Rightarrow BK = 2BH \Rightarrow HB = HK \Rightarrow \Delta MBK$ là tam giác cân $\Rightarrow M'D$ là phân giác $\widehat{AM'B} \Rightarrow M'E$ là phân giác ngoài $\widehat{AM'B}$.

Chú ý: Đây là quỹ tích cơ bản được gọi là *đường tròn Apollonius*, mang tên nhà toán học Apollonius.

Apollonius ở xứ Perga (khoảng 262 - 190 trước CN) – Nhà toán học Hi Lạp, một trong những người theo trường phái Alexandria. Công trình của ông có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của các nhà khoa học thời đại mới: Thiên văn học, cơ học, quang học. Ông đưa ra khái niệm thuật ngữ các đường conic "hyperbol","parabol", "elip" ,"đường tiệm cận".

2. Các ví dụ

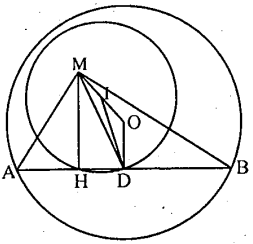
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$, và điểm M cố định. Một góc vuông quay quanh điểm M cắt đường tròn tại A và B. Tìm quỹ tích trung điểm của AB.

Giải:

Phần thuận: Tam giác MAB là tam giác vuông, D là trung điểm AB

$\Rightarrow MD = DB \Rightarrow DO^2 = OB^2 - BD^2 = R^2 - DM^2$

$\Rightarrow DO^2 + DM^2 = R^2$.



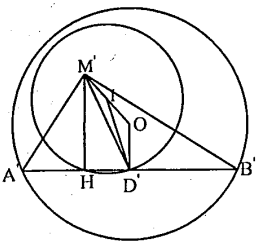
Gọi I là trung điểm OM, theo công thức đường trung tuyến ta có:

$$DO^2 + DM^2 - \frac{1}{2}OM^2 = 2DI^2$$

$$\Rightarrow 2DI^2 = R^2 - \frac{1}{2}OM^2, \text{ điều kiện } R\sqrt{2} > OM \Rightarrow DI = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OM^2}.$$

I cố định $\Rightarrow D$ nằm trên đường tròn tâm I bán kính $DI = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OM^2}$.

Phần đảo: Lấy điểm D' trên đường tròn $(I; \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OM^2})$, qua D' kẻ đường thẳng vuông góc với OD' cắt đường tròn (O) tại A', B'.



Ta chứng minh $MA' \perp MB'$.

$D' \in (I) \Rightarrow D'O^2 + D'M^2 = R^2$

và $D'O^2 + D'M^2 - \frac{1}{2}OM^2 = 2D'I^2$.

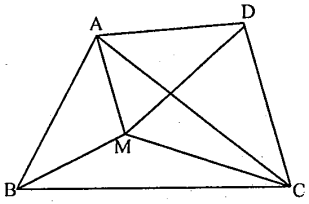
H là hình chiếu của M trên $A'B' \Rightarrow HM^2 = MD'^2 - HD'^2$;

$HD'^2 = HO^2 - OD'^2 = HO^2 - R^2 + MD'^2 \Rightarrow HM^2 + HO^2 = R^2$.

Chú ý: Quỹ tích hình chiếu H của M trên AB và trung điểm AB đều là đường tròn $(I; \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OM^2})$ (bạn đọc tự chứng minh).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC không cân. Điểm M thay đổi trong tam giác thoả mãn $\angle AMC - \angle ABC = \angle AMB - \angle ACB$. Chứng minh rằng M thuộc đường tròn cố định.

Giải:



Dựng ra phía ngoài tam giác ABC tam giác ADC đồng dạng với ΔAMB

$\Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{AC}{AB}$ và $\angle BAC = \angle MAD$

$\Rightarrow \Delta AMD$ và ΔABC đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \angle AMD = \angle ABC \Rightarrow \angle AMC - \angle ABC = \angle AMB - \angle ACB = \angle CMD.$

Mặt khác $\angle ADC = \angle AMB$ và $\angle ADM = \angle ACB$

$\Rightarrow \angle AMB - \angle ACB = \angle ADC - \angle ADM = \angle MDC$

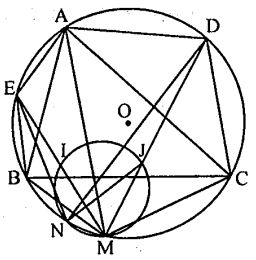
$\Rightarrow \angle CMD = \angle CDM \Rightarrow CD = CM$

$\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CM}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$ không đổi

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn Apollonius dựng trên cạnh BC tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên cung BC (không chứa A) của đường tròn (O). Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM, CAM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ luôn đi qua điểm cố định. (Iran 1997).

Giải:



Gọi N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔMIJ với (O), MI cắt đường tròn (O) tại E, MJ cắt đường tròn (O) tại $D \Rightarrow EA = EB$, $DA = DC$.

Mặt khác $EA = EB = EI$, $DA = DC = DJ$.

Xét ΔNIE và ΔNJD có:

$\angle NEI = \angle NDJ$ (chắn cung MN)

$\angle EIN = \angle DJN$ (cùng bù với $\angle NIM = \angle NJM$)

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{NE}{ND} = \dfrac{EI}{DJ} = \dfrac{AE}{AD}$

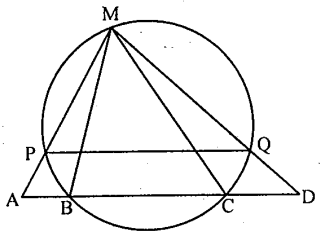
$\Rightarrow N$ thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn ED với tỉ số $\dfrac{AE}{AD}$

$\Rightarrow N$ là giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn Apollonius.

Ví dụ 4. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó, $AB \neq CD$. Điểm M thay đổi sao cho $\angle AMB = \angle CMD$ (M không thuộc AB). Chứng minh rằng M thuộc đường tròn cố định.

Giải:

Gọi P và Q là giao điểm của MA, MD với đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.



Theo giả thiết $\angle AMB = \angle CMD \Rightarrow PB = QC$

$\Rightarrow PQ // BC$, theo định lí Thales

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{DQ}{DM}$ (1)

Theo hệ thức đường tròn $\Rightarrow AP.AM = AB.AC$

$\Rightarrow AM^2 \dfrac{AP}{AM} = AB.AC$ (2)

$DQ.DM = DC.DB \Rightarrow DM^2 \dfrac{DQ}{DM} = DC.DB$ (3)

Kết hợp (1), (2), (3) $\Rightarrow \dfrac{AM^2}{DM^2} = \dfrac{AB.AC}{DC.DB}$.

A, B, C, D cố định $\Rightarrow \dfrac{AB.AC}{DC.DB}$ không đổi $\Rightarrow \dfrac{AM}{DM} = \sqrt{\dfrac{AB.AC}{DC.DB}}$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn Apollonius có tỉ số $\sqrt{\dfrac{AB.AC}{DC.DB}}$ trên đoạn AD.

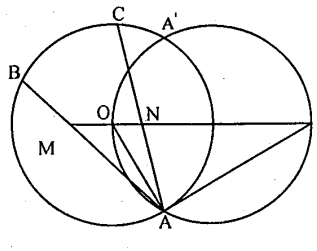
Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) và hai điểm M, N nằm phía trong đường tròn sao cho O thuộc đoạn MN ($OM \neq ON$). Tìm điểm A thuộc (O) sao cho AM, AN lần lượt cắt (O) tại B, C thoả mãn $AB = AC$.

Giải:

Giả sử điểm A trên đường tròn (O) thoả mãn $AB = AC$

$\Rightarrow AO$ là phân giác của góc $\angle BAC = \angle MAN$.

Gọi I là điểm chia ngoài đoạn MN theo tỉ số $\frac{IM}{IN} = \frac{OM}{ON}$.



$\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của góc $\angle MAN$

$\Rightarrow OA \perp AI \Rightarrow$ xác định được vị trí của điểm I.

Dựng đường tròn đường kính OI cắt đường tròn (O) tại hai điểm A và $A' \Rightarrow$ có hai vị trí trên (O) thoả mãn bài toán.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có:

a) $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2$.

b) $HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, H là trực tâm tam giác ABC.

2. Chứng minh $OI^2 = R(R + 2R_A)$, I là tâm đường tròn nội tiếp, R_A là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A.

3. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Điểm A thay đổi trên (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh tại M, N, P. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác MNP đi qua điểm cố định.

4. Cho tam giác ABC, điểm M thay đổi trên AB, điểm N thay đổi trên tia đối CA sao cho $CN = 2BM$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN có tâm nằm trên đường tròn cố định.

Chương 6

CÁC ĐỊNH LÍ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, BÀNG TIẾP

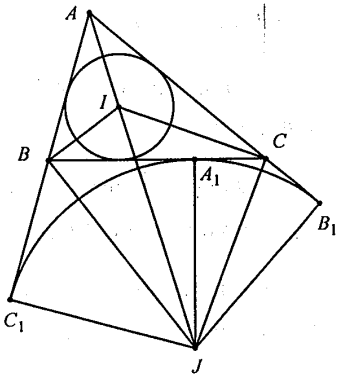
I. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, BÀNG TIẾP

1. Tính chất

1. Cho tam giác ABC, các điều kiện sau là tương đương:

- I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- I thuộc đường phân giác của góc trong của góc A và $\angle BIC = 90^0 + \frac{A}{2}$.
- I nằm trong tam giác ABC thoả mãn:

$\angle BIC = 90^0 + \frac{A}{2}$, $\angle AIC = 90^0 + \frac{B}{2}$



2. Cho tam giác ABC, các điều kiện sau là tương đương:

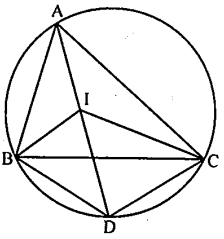
- J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.
- J thuộc đường phân giác trong của góc A, nằm ngoài tam giác ABC và $\angle BJC = 90^0 - \frac{A}{2}$.
- J thuộc đường phân giác ngoài góc B và $\angle BJC = 90^0 - \frac{A}{2}$.

Gọi A_1, B_1, C_1 là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó $BC_1 = BA_1$, $AB_1 = AC_1$, $CA_1 = CB_1$.

Bài toán 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

Chứng minh rằng $DI = DB = DC$.

Chứng minh:



I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow \overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow BD = DC.$

Xét ΔDBI có $\overset{\frown}{BID} = \overset{\frown}{IAB} + \overset{\frown}{IBA} = \frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}),$

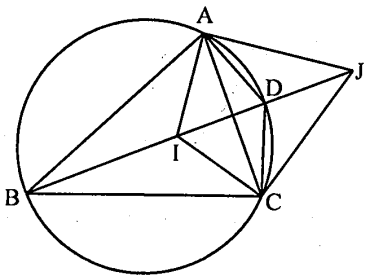
$\overset{\frown}{IBD} = \overset{\frown}{IBC} + \overset{\frown}{CBD} = \frac{1}{2}\hat{B} + \overset{\frown}{DAC} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{A})$

$\Rightarrow \Delta DBI$ cân $\Rightarrow DB = DI \Rightarrow DI = DB = DC$.

Bài toán 2. Gọi I, J là tâm đường tròn nội và bàng tiếp của tam giác ABC, IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

Chứng minh rằng $DA = DI = DJ$.

Chứng minh:



J là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABC ứng với góc A

$\Rightarrow J$ nằm trên đường phân giác BI và phân giác ngoài của góc A hoặc $C \Rightarrow AI \perp AJ$.

Đường thẳng BI cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại $D \Rightarrow DA = DI \Rightarrow \angle DAI = \angle DIA$;

$\angle IAJ = 90^0 \Rightarrow \angle DAJ = \angle DJA$

$\Rightarrow DA = DJ = DI$.

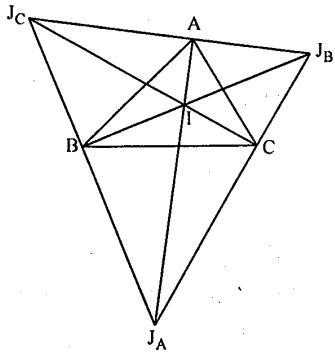
2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp, J_A, J_B, J_C là tâm các đường tròn bàng tiếp của góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh I là trực tâm tam giác $J_AJ_BJ_C$.

Giải:

Trước hết ta chứng minh đường phân giác trong của góc A và hai đường phân giác ngoài B, C đồng quy.

Giả sử đường phân giác trong của góc A và phân giác ngoài góc B cắt nhau tại J_A



$$\Rightarrow \angle BJ_AI = 180^0 - \angle ABI - 90^0 - \angle BAI = \frac{1}{2}\angle C.$$

Mặt khác $\angle ICB = \frac{1}{2}\angle C \Rightarrow \angle BJ_AI = \angle ICB$

$\Rightarrow IBJ_AC$ nội tiếp $\Rightarrow J_AC \perp IC$.

Hoàn toàn tương tự $\Rightarrow AJ_A$, BJ_B, CJ_C đồng quy

$\Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta J_AJ_BJ_C$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, D là điểm trên cạnh BC sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và tam giác ADC bằng nhau.

Chứng minh rằng $AD = \sqrt{p(p-a)}$.

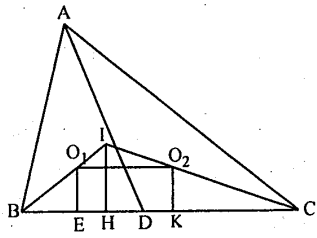
Giải:

Gọi đường tròn nội tiếp ΔABC là $(I; r)$. Đường tròn nội tiếp ΔABD, ΔADC là $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$. Hạ các đường thẳng IH, O_1E, O_2K vuông góc với cạnh BC.

$\Rightarrow IH = r, O_1E = r_1, O_2K = r_2$.

Theo giả thiết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ADC bằng nhau $\Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow$ tứ giác O_1O_2KE là hình chữ nhật.

$\Rightarrow O_1O_2 // BC$ và $O_1O_2 = EK$



$\Rightarrow \dfrac{O_1O_2}{BC} = \dfrac{IH - O_1E}{IH} = \dfrac{r - r_1}{r}$ (1)

Đặt $p_1 = \dfrac{1}{2}(c + BD + AD)$, $p_2 = \dfrac{1}{2}(b + CD + AD)$, $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$\Rightarrow O_1O_2 = EK = ED + DK = (p_1 - c) + (p_2 - b) = p + AD - b - c$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{r - r_1}{r} = \dfrac{p + AD - b - c}{a} = \dfrac{AD + a - p}{a}$ (3)

Theo công thức diện tích $S = pr = (p_1 + p_2)r_1$,

$p_1 + p_2 = \dfrac{1}{2}(a + b + c + 2AD) = p + AD$

Thay vào (3) $\Rightarrow \dfrac{S}{p} : (\dfrac{S}{p} - \dfrac{S}{p + AD}) = \dfrac{a}{AD + a - p}$, biến đổi $\Rightarrow AD^2 = p(p - a)$

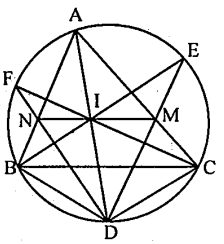
$\Rightarrow AD = \sqrt{p(p - a)}$.

Ví dụ 3. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, E và F. Đường thẳng DE cắt cạnh AC tại M, đường thẳng DF cắt cạnh AB tại N. Chứng minh rằng MN song song với cạnh BC.

Giải:

Theo giả thiết BE là phân giác góc $\widehat{ABC} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow \overset{\frown}{ADE} = \overset{\frown}{EDC}$

Xét ΔADC có $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AD}{DC}$, tương tự $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AD}{DB}$.



Theo giả thiết AD là phân giác góc $\widehat{A} \Rightarrow DB = DC$

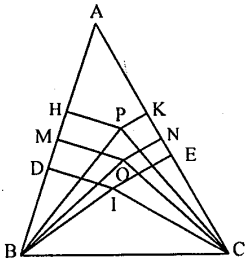
$\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AN}{NB}$.

Theo định lí Thales đảo $\Rightarrow MN // BC$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} < 60^0$. P là điểm trong tam giác, H, K là hình chiếu của P lần lượt trên cạnh AB và cạnh AC thoả mãn $AC + AH = BC + BH$ và $AB + AK = BC + CK$. Chứng minh góc $\widehat{BPC} < 120^0$. (APMO).

Giải:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; M và N là trung điểm AB và $AC \Rightarrow OM \perp AB$, $ON \perp AC$.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh AB, $AC \Rightarrow ID \perp AB$, $IE \perp AC$

$$\Rightarrow AD = AE = \frac{CA + AB - BC}{2}$$

$$\Rightarrow BD = AB - AD = AB - \frac{CA + AB - BC}{2} = \frac{AB + BC - CA}{2}$$

Từ $AC + AH = BC + BH \Rightarrow AC + 2AH = BC + AH + BH$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB + BC - CA}{2}.$$

Tương tự $AB + AK = BC + CK \Rightarrow AK = \frac{BC + CA - AB}{2}$

$\Rightarrow BD = AH \Rightarrow MH = MD$, tương tự $NE = NK$.

O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$;

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BIC} = 90^0 + \frac{1}{2}\hat{A}$.

Theo giả thiết $\hat{A} < 60^0 \Rightarrow 2\hat{A} < 90^0 + \frac{1}{2}\hat{A} \Rightarrow \widehat{BOC} < \widehat{BIC}$

$\Rightarrow \widehat{BPC} < \widehat{BOC} = 2\hat{A} < 120^0$.

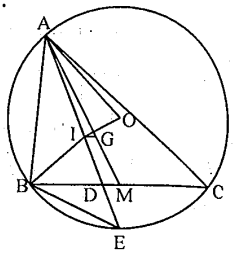
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Gọi I, O là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{AIO} = 90^0$ khi và chỉ khi IG song song với BC. (G là trọng tâm tam giác ABC).

Giải:

Đường thẳng AI cắt BC tại D và đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại E

$$\Rightarrow \widehat{BIE} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}),\ \widehat{CAE} = \widehat{CBE}$$

$\Leftrightarrow \widehat{IBE} = \widehat{IBC} + \widehat{CBE} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \Delta EBI$ cân $\Rightarrow EB = EI$.



$\widehat{AIO} = 90^0 \Leftrightarrow OI \perp AE \Leftrightarrow IA = IE.$

Mặt khác ΔABE và ΔBDE đồng dạng

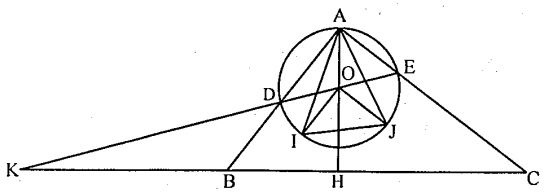
$\Leftrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{BE} = \frac{AE}{IE} = 2$, $\widehat{ABI} = \widehat{IBD} \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = 2.$

G là trọng tâm tam giác ABC, AG cắt BC tại $M \Leftrightarrow \frac{AG}{GM} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GM} \Leftrightarrow IG // BC.$

Ví dụ 6. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^0$, $AB < AC$), H là chân đường cao kẻ từ A, gọi I và J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH và ACH, và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ, đường tròn này cắt cạnh AB, AC tại D và E. Đường thẳng DE cắt cạnh BC kéo dài tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OKH, và J là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác OKH.

Giải:



$\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow DE$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ

$\Rightarrow O$ là giao điểm của AH và DE.

I, J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABH và $\Delta AHC \Rightarrow \widehat{IAJ} = 45^0 \Rightarrow \widehat{IOJ} = 90^0$.

$AH \perp BC \Rightarrow \widehat{IHJ} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $OIHJ$ là tứ giác nội tiếp

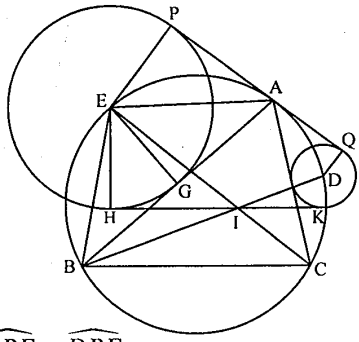
$\Rightarrow \widehat{OHJ} = \widehat{OIJ} = 45^0 = \widehat{AHJ}$

$\widehat{DOI} = 2\widehat{DAI} = 2\widehat{IAH} = \widehat{IOH} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔOKH.

Tương tự $\widehat{EOJ} = \widehat{JOH}$ và $\widehat{OHJ} = \widehat{JHC} = 45^0$

$\Rightarrow J$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác OHK.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường tròn (O) tại D , E. Dựng đường tròn tâm D tiếp xúc cạnh AC, đường tròn tâm E tiếp xúc cạnh AB. Chứng minh rằng tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên tiếp tuyến chung của đường hai tròn (D) và (E). (Vô địch Nga 2002).



Giải:

Cách 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC;

Từ I kẻ tiếp tuyến IH với đường tròn (E) và tiếp tuyến IK với đường tròn (D) $\Rightarrow$ B, I, D thẳng hàng; C, I, E thẳng hàng.

Gọi các tiếp điểm H, G, K như hình vẽ.

Ta có $\widehat{BIE} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \widehat{IBA} + \widehat{ICA} = \widehat{DBA} + \widehat{ABE} = \widehat{DBE}$

$\Rightarrow$ tam giác EBI cân $\Rightarrow$ $EA = EI$

Xét hai ΔEGB và ΔEHI là hai tam giác vuông có $EH = EG$ và $EA = EI$

$\Rightarrow$ hai tam giác bằng nhau $\Rightarrow$ $\widehat{EIH} = \widehat{EBG} = \widehat{ECA} = \widehat{ECB}$ $\Rightarrow$ $IH // BC$.

Tương tự, ta chứng minh được $IK // BC$ $\Rightarrow$ H, I, K thẳng hàng.

Cách 2. Từ A kẻ tiếp tuyến với AP, AQ với đường tròn tâm (E) và tâm (D)

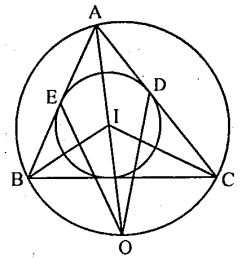
$\Rightarrow$ $\angle PAB = \angle C$ và $\angle QAC = \angle C$

$\Rightarrow$ P, A, Q thẳng hàng, A và I đối xứng qua DE

$\Rightarrow$ HK đối xứng PQ qua DE $\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến đi qua I.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D và E là các tiếp điểm của đường tròn (I) với cạnh AC, AB. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh rằng $\angle ODC = \angle OEB$. (EGMO 2012).

Giải:



AI là phân giác của góc A, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K.

Theo *Bài toán 1* $\Rightarrow$ $KB = KC = KI \Rightarrow K \equiv O$.

D, E tiếp điểm $\Rightarrow$ $AD = AE$.

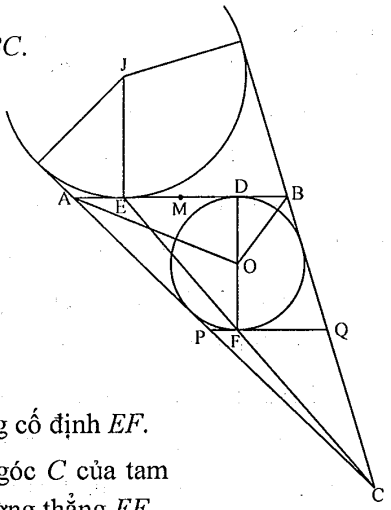
Mặt khác $\angle BAO = \angle CAO \Rightarrow \Delta EAO$ và ΔDAO bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow \angle ADO = \angle AEO \Rightarrow \angle ODC = \angle OEB$.

Ví dụ 9. Cho đường tròn (O) và tiếp tuyến *d*, *M* là điểm trên *d*. Hai điểm *A* và *B* thay đổi trên *d* sao cho *M* là trung điểm *AB*, các tiếp tuyến qua *A*, *B* (khác *d*) với đường tròn (O) cắt nhau tại *C*. Chứng minh *C* thuộc một đường thẳng cố định.

Giải:

Gọi *D* là tiếp điểm của đường thẳng *d* với (O) $\Rightarrow$ đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp tam giác *ABC*.



Trường hợp 1: (O) là đường tròn nội tiếp ΔABC.

Gọi *E* là điểm đối xứng với *D* qua *M*

$\Rightarrow$ *E* là tiếp điểm của đường tròn (J) bàng tiếp của góc *C*.

Gọi *F* là điểm đối xứng với *D* qua *O*. Qua *F* dựng tiếp tuyến cắt *AC*, *BC* tại *P* và *Q*

$\Rightarrow PQ // AB$

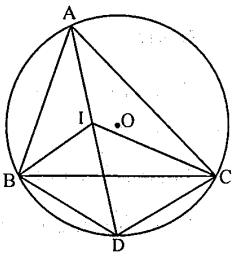
$$\Rightarrow \frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{PQ + CP - CQ}{AB + CA - CB} = \frac{PF}{AE}$$

$\Rightarrow$ *C*, *F*, *E* thẳng hàng $\Rightarrow$ *C* thuộc đường thẳng cố định *EF*.

Trường hợp 2: (O) là đường tròn bàng tiếp góc *C* của tam giác *ABC*. Tương tự ta cũng có điểm *C* thuộc đường thẳng *EF*.

Ví dụ 10. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O), *I* là tâm của đường tròn nội tiếp, đường thẳng *AI* cắt (O) tại *D*. Chứng minh rằng $\frac{DI}{DA} = \frac{BC}{AB + AC}$.

Giải:



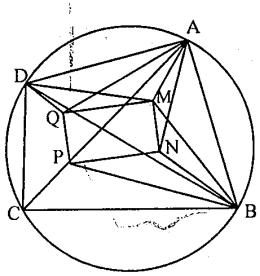
Theo *Bài toán 1* ta có $DB = DC = DI$.

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác nội tiếp *ABDC* ta có: $AB.CD + AC.BD = AD.BC$

$$\Rightarrow DI(AB + AC) = DA.\ BC \Rightarrow \frac{DI}{DA} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Ví dụ 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn. Gọi M, N, P, Q thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác DAB, ABC, BCD, CDA. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Giải:



Theo tính chất tâm đường tròn nội tiếp tam giác

$$\Rightarrow \angle AMB = 90^0 + \frac{1}{2}\angle ADB = 90^0 + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ANB$$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMNB$ nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự ta có các tứ giác $BNPC$, $CPQD$, $DQMA$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \angle QMN = 360^0 - (\angle QMD + \angle DMA + \angle AMB + \angle BMN)$$

$$= 360^0 - (\angle QAD + \angle DMA + \angle AMB + \angle BAN)$$

$$= 360^0 - (\frac{1}{2}\angle DAC + 90^0 + \frac{1}{2}\angle DBA + 90^0 + \frac{1}{2}\angle ADB + \frac{1}{2}\angle BAC)$$

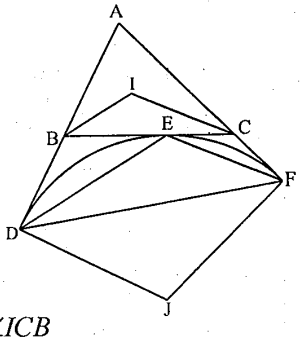
$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle DBA + \angle ADB + \angle BAC) = 180^0 - 90^0 = 90^0$$

$\Rightarrow \angle QMN = 90^0$

Hoàn toàn tương tự ta có $\angle MNP = \angle NPQ = 90^0$.

$\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC với các cạnh tam giác. Chứng minh rằng $S_{IBC} > \frac{1}{4}S_{DEF}$.



Giải:

Từ giả thiết $\Rightarrow AD = AF, BD = BE$

$$\Rightarrow \angle EDF = \angle ADF - \angle BDE$$

$$= (90^0 - \frac{1}{2}\angle A) - (90 - \frac{1}{2}\angle EBD)$$

$$= \frac{1}{2}(\angle CBD - \angle A) = \frac{1}{2}(180^0 - \angle B - \angle A) = \angle ICB$$

Tương tự $\angle EFD = \angle IBC \Rightarrow \Delta IBC$ và ΔEFD đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{IBC}}{S_{EFD}} = \frac{BC^2}{FD^2}.$$

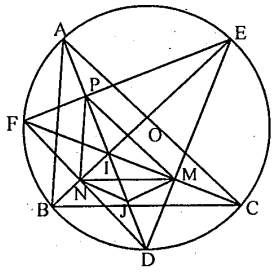
Mặt khác $BC = \frac{1}{2}(BD + BE + EC + CF) > \frac{1}{2}(DE + EF) > \frac{1}{2}DF$

$$\Rightarrow \frac{BC^2}{DF^2} > \frac{1}{4} \Rightarrow S_{IBC} > \frac{1}{4}S_{DEF}.$$

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). AI, BI, CI cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F và DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N, AD cắt EF tại P. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN. Chứng minh M, N, J, P nằm trên một đường tròn.

Giải:

Theo tính chất tâm đường tròn nội tiếp tam giác ta có:



$$\angle NIM + \angle MDN = \angle BIC + \angle FDE$$

$$= 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAC + \angle FDA + \angle ADE$$

$$= 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAC + \angle FCA + \angle EBC$$

$$= 90^0 + \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA) = 180^0$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $INDM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle INM = \angle IDM = \angle EBC$

$\Rightarrow MN // BC$, hoàn toàn tương tự $PN // AB$, $PM // AC$

$\Rightarrow \angle NPM = \angle BAC$.

J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta MDN \Rightarrow \angle NJM = 2\angle NDM = \angle ABC + \angle ACB$

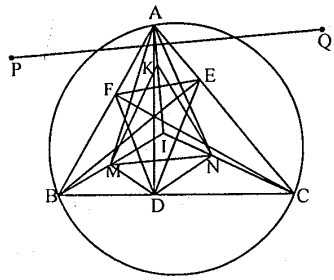
$\Rightarrow \angle NJM + \angle NPM = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^0$

$\Rightarrow P$, M, J, N nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 14. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFD, CDE và P, Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM, ACN.

Chứng minh rằng MN song song với PQ. (IMO Shortlist 2012).

Giải:



AD, BE, CF là các đường cao

$\Rightarrow \angle FBD = \angle DEC$ và $\angle BFD = \angle ECD$

$\Rightarrow \Delta BFD$ đồng dạng ΔECD, theo giả thiết M, N là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác đó

$\Rightarrow \dfrac{FD}{CD} = \dfrac{DM}{DN}, \angle MDN = \angle FDC$

$\Rightarrow \Delta DMN$ và ΔDFC đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \angle DMN = \angle DFC = \angle DAC$

$$\Rightarrow \angle BMN = \angle BMD + \angle DMN = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BFD + \angle DFC$$

$$= 90^0 + \frac{1}{2}\angle ACB + 90^0 - \angle ACB = 180^0 - \frac{1}{2}\angle ACB$$

$= 180^0 - \angle NCB \Rightarrow$ tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF, tương tự $\Rightarrow$ các tứ giác $BMKA, AKNC$ là các tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AK$ là dây chung của hai đường tròn $(BMKA)$ và $(AKNC)$, theo giả thiết P, Q là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM, ACN

$\Rightarrow P, Q$ chính là tâm của hai đường tròn $(BMKA)$ và $(AKNC) \Rightarrow AK \perp PQ$.

Mặt khác M, N, K là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác BDF, CDE, AEF

$\Rightarrow M, N, K$ nằm trên BI, CI, AI

$$\Rightarrow \angle IKN = \angle NCA = \frac{1}{2}\angle ACB \text{ và } \angle IMN = \angle NCB = \frac{1}{2}\angle ACB$$

$\Rightarrow \angle IKN = \angle IMN$, tương tự $\angle IMK = \angle INK, \angle IKM = \angle INM$

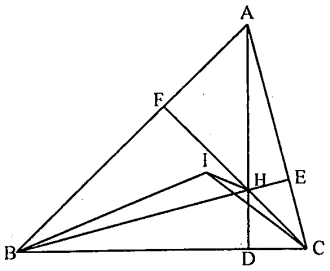
$\Rightarrow I$ là trực tâm ΔKMN

$\Rightarrow KI \perp MN \Rightarrow PQ // MN$.

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle A = 60^0$ ($AB > AC$). Gọi I, H là tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm tam giác ABC.

Chứng minh rằng $2\angle AHI = 3\angle ABC$ (APMO 2007).

Giải:



Từ giả thiết ta có $\angle BIC = 90^0 + \frac{A}{2} = 120^0$;

H là trực tâm, có $\angle A = 60^0$

$\Rightarrow \angle BHC = 180^0 - 60^0 = 120^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $BIHC$ nội tiếp.

$\angle IHA = 180^0 - \angle IHD = 180^0 - \angle IHB - \angle BHD$

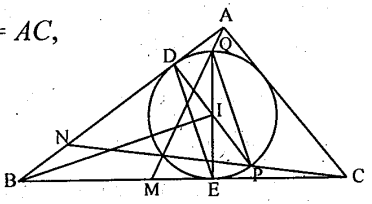
$= 180^0 - \angle ICB - \angle AHE = 180^0 - \frac{1}{2}\angle ACB - \angle ACB$

$= 180^0 - \frac{3}{2}\angle ACB = 180^0 - \frac{3}{2}(120^0 - \angle ABC) = \frac{3}{2}\angle ABC$

$\Rightarrow 2\angle IHA = 3\angle ABC.$

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có $AB + BC = 3AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, BC tại D và E. Gọi P, Q là điểm đối xứng của D và E qua I. Chứng minh tứ giác $AQPC$ nội tiếp một đường tròn. (IMO shortlist 2005).

Giải:



D và E là tiếp điểm $\Rightarrow BD = BE$ và $AD + CE = AC$, theo giả thiết $AB + BC = 3AC$

$\Rightarrow AB + BC = 2BD + AD + CE$

$= 2BD + AC = 3AC$

$\Rightarrow BD = BE = AC.$

Đường thẳng AQ cắt BC tại M, đường thẳng CP cắt AB tại N. QE, DP là đường kính, theo tính chất

$\Rightarrow AN = BD = AC$ và $CM = BE = AC$

$\Rightarrow \Delta ACN$ là tam giác cân tại $A \Rightarrow \angle ACN = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC$ (1)

$$\angle MQP = \angle MQE + \angle EQP = 90^0 - \angle QME + \angle EQP$$

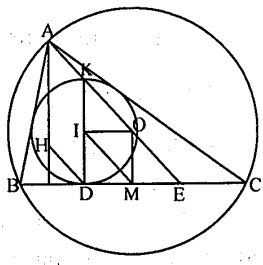
$$= 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\angle ACB) + \angle ABI$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BAC \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle ACN = \angle MQP \Rightarrow$ tứ giác $AQPC$ nội tiếp đường tròn.

Nhận xét: Mạnh hơn ta có thể chứng minh 5 điểm A, Q, I, P, C nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). H là trực tâm và D là tiếp điểm của (I) với cạnh BC. Giả sử OI song song với cạnh BC chứng minh rằng AO song song với HD.



Giải:

Gọi K là điểm đối xứng của D qua I và M là trung điểm cạnh BC, AK cắt cạnh BC tại E theo tính chất của đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MD = ME \Rightarrow IM$ là đường trung bình của $\Delta KDE \Rightarrow IM // AE$.

Theo giả thiết $OI // BC \Rightarrow IOMD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IO = ME \Rightarrow IOEM$ là hình bình hành $\Rightarrow IM // OE \Rightarrow O$ thuộc đường thẳng AE và $KD = 2OM$;

$AH \perp BC \Rightarrow AH // KD$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp

$\Rightarrow AH = 2OM \Rightarrow AH = KD \Rightarrow AKDH$ là hình bình hành

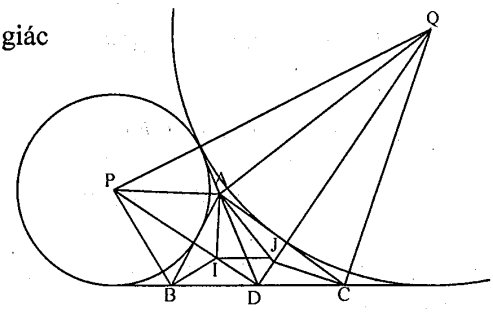
$\Rightarrow HD // AK \Rightarrow HD // AO$.

Ví dụ 18. Cho tam giác ABC, D là trung điểm BC. Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ADC, P, Q là tâm đường tròn bàng tiếp của D đối với tam giác ABD và ADC. Chứng minh rằng bốn điểm I, J, P, Q nằm trên một đường tròn.

Giải:

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD, P là tâm đường tròn bàng tiếp của góc $\widehat{ADB}$.

$\Rightarrow I$ và P nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{PDB}$, PB là phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$



$\Rightarrow \widehat{PBD} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{ABD}$

$\widehat{PBD} = 90^0 + (90^0 - \widehat{IAD} - \widehat{IDB})$

$= 180^0 - \widehat{IAD} - \widehat{IDB} = \widehat{AID}$

$\Rightarrow \Delta DIA$ đồng dạng với $\Delta DBP \Rightarrow \frac{DI}{DB} = \frac{DA}{DP}$

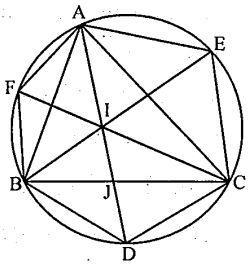
$\Rightarrow DI.DP = DA.DB$ (1)

Hoàn toàn tương tự $DJ.DQ = DA.DC$ (2)

Mặt khác $DB = DC$, kết hợp (1) và (2) $\Rightarrow DI.DP = DJ.DQ$

$\Rightarrow$ bốn điểm I, J, P, Q nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thứ tự tại D, E, F.



Chứng minh $AD + BE + CF > AB + BC + CA$.

Giải:

Theo *Bài toán 1* $\Rightarrow DB = DC = DI$, $EA = EC = EI$, $FA = FB = FI$

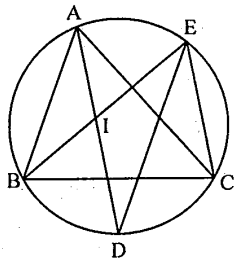
$AD + BE + CF = (AI + ID) + (BI + IE) + (CI + IF)$

$= \frac{1}{2}(IB + IC + IC + IA + IA + IB) + \frac{1}{2}(DB + DC + EC + EA + FA + FB)$

$> \frac{1}{2}(BC + CA + AB) + \frac{1}{2}(BC + CA + AB) = AB + BC + CA.$

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC, đường phân giác góc $\hat{A}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng $AD > \frac{1}{2}(AB + AC)$. (MMO XIX).

Giải:



Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường tròn tại E.

$\Rightarrow AC = DE$ và $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AE} \Rightarrow \overset{\frown}{DAC} = \overset{\frown}{ACE}$, AD là phân giác $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{DAC} \Rightarrow \overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{ADE} \Rightarrow AB$ song song $DE \Rightarrow AD = BE$

Gọi giao điểm của AD và BE là I

$\Rightarrow IA + IB > AB$, $ID + IE > DE$

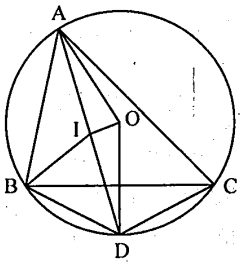
Cộng hai bất đẳng thức $\Rightarrow IA + IB + ID + IE > AB + DE$

$\Rightarrow AD + BE > AB + DE \Rightarrow 2AD > AB + AC$

$\Rightarrow AD > \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC không đều, gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AIO} \leq 90^0$ khi và chỉ khi $AB + AC \geq 2BC$.

Giải:



Kéo dài AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

$\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{DAC} \Rightarrow DB = DC$.

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow \Delta DIB$ cân

$\Rightarrow DI = DB$.

Áp dụng định lí Ptolemy với tứ giác $ABDC$ ta có:

$AD.BC = AB.CD + AC.BD = BD(AB + AC) = DI(AB + AC)$

ΔAOD cân: $\overset{\frown}{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow AI \geq ID \Leftrightarrow AI + ID \geq 2ID \Leftrightarrow AD \geq 2ID$

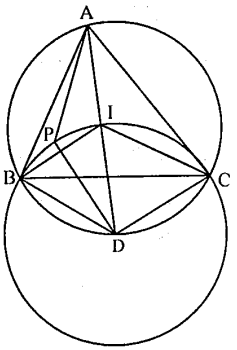
$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{AD}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}$

$\Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC$.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp là I. P là một điểm trong tam giác thoả mãn $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$. Chứng minh rằng $AP \geq AI$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv I$. (IMO 2006).

Giải:



Theo giả thiết $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$

$\Rightarrow \widehat{PBA}+\widehat{PCA}+\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=\hat{B}+\hat{C}$

$\Rightarrow 2(\widehat{PBC}+\widehat{PCB})=\hat{B}+\hat{C}=180^0-\hat{A}$

$\Rightarrow \widehat{PBC}+\widehat{PCB}=90^0-\dfrac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BPC}=180^0-\widehat{PBC}-\widehat{PCB}=90^0+\dfrac{\hat{A}}{2}$ (*)

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{BIC}=\hat{A}+\dfrac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})=90^0+\dfrac{\hat{A}}{2}$

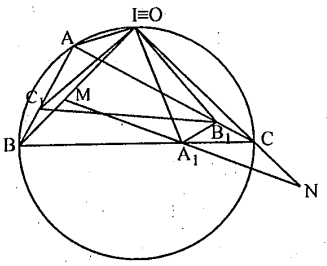
Từ (*) $\Rightarrow B, P, I, C$ nằm trên một đường tròn.

Theo *Bài toán 1* $\Rightarrow DB = DI = DC \Rightarrow D$ là tâm đường tròn qua các điểm B, P, I, C. Xét ΔAPD có: $AP + PD \geq AD = AI + ID \Rightarrow AP \geq AI$.

Dấu bằng xảy ra khi $P \in AD \Rightarrow P \equiv I$.

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC, gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng nếu tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ABC là tam giác vuông. (IMO 2013).

Giải:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, theo giả thiết O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Theo giả thiết A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow BC_1 = CB_1,\ AB_1 = BA_1,\ CA_1 = AC_1.$

Giả sử $AC \geq AB$, gọi I là điểm chính giữa cung BC chứa A

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \angle ABI = \angle ACI$ (chắn cung AI)

$\Rightarrow$ tam giác IBC_1 và ICB_1 bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow IC_1 = IB_1$, theo giả thiết $\Rightarrow I \equiv O.$

Trên OB lấy điểm M và trên OC kéo dài lấy điểm N sao cho $BM = CN = OA.$

Tứ giác $OABC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle NCA_1 = \angle OAB.$

Lại có $CA_1 = AC_1 \Rightarrow \Delta CNA_1 = \Delta AOC_1$ (c.g.c).

Ta có $\angle OBA_1 = \angle OBC = \angle OAC$ và $AB_1 = BA_1$

$\Rightarrow \Delta BMA_1 = \Delta AOB_1$ (c.g.c)

$\Rightarrow NA_1 = OC_1 = OA_1 = OB_1 = MA_1$

$\Rightarrow \angle CA_1N = \angle AC_1O = 180^0 - \angle BC_1O = 180^0 - \angle OB_1C = \angle AB_1O = \angle BA_1M$

$\Rightarrow M, A_1, N$ thẳng hàng.

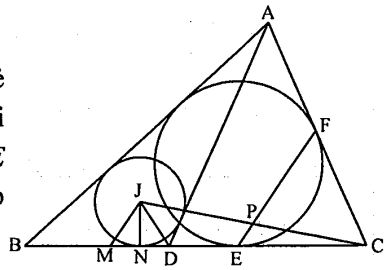
Do $NA_1 = OA_1 = MA_1 \Rightarrow \Delta MON$ là tam giác vuông

$\Rightarrow \angle MON = 90^0 \Rightarrow \angle BAC = 90^0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông.

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC ($\angle B < \angle C < 90^0$), D là điểm trên cạnh BC sao cho $AD = AC$, đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC, CA tại E và F. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của CJ. (IMO Shortlist 2006).

Giải:

Gọi P là giao điểm của EF và CJ. Từ J kẻ đường thẳng song song với EF cắt cạnh BC tại M. Đặt $\angle BCA = 2\alpha$, theo giả thiết $AC = AD$, E và F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow CE = CF.$



$\Rightarrow \angle CEF = \angle CFE = 90^0 - \alpha$.

Đường tròn tâm J nội tiếp $\Delta ABD \Rightarrow DJ$ là phân giác góc $\angle ADB$

$\Rightarrow \angle BDJ = \frac{1}{2}(180^0 - \angle ADC) = 90^0 - \alpha (1)$

Do $JM//EF \Rightarrow \angle DMJ = \angle CEF = 90^0 - \alpha$ (2)

$\Rightarrow \angle JDM = \angle JMD \Rightarrow \Delta JMD$ cân $\Rightarrow JD = JM$.

Gọi N là tiếp điểm của đường tròn (J) với cạnh $BC \Rightarrow JN \perp MD \Rightarrow MN = ND$.

Áp dụng công thức tính độ dài từ đỉnh tới điểm tiếp xúc cạnh tam giác:

$DM = 2DN = AD + BD - AB$

$\Rightarrow CM = CD + DM = CD + (AD + BD - AB)$

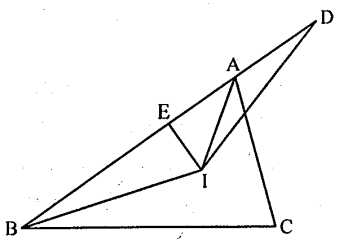
$= CD + AD + DB - AB = BC + CA - AB = 2CE$

$\Rightarrow CJ = 2CP \Rightarrow PJ = PC$.

Ví dụ 25. Cho tam giác ABC, $\angle A = 70^0$ và $CA + AI = BC$. Tính góc $\angle B$.

Giải:

Hạ $IE \perp AB$, kéo dài AB lấy điểm D sao cho $AD = AI$.



Gọi độ dài ba cạnh ΔABC là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Theo giả thiết $CA + AI = BC \Rightarrow AI = a - b$;

Đặt $s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow BE = s - b, AE = s - a$.

$DE = DA + AE = AI + AE = a - b + s - a = s - b$

$\Rightarrow DE = BE$, kết hợp $IE \perp AB \Rightarrow \Delta IBD$ cân $\Rightarrow IB = ID$.

$\Rightarrow \angle IBE = \angle IDE$.

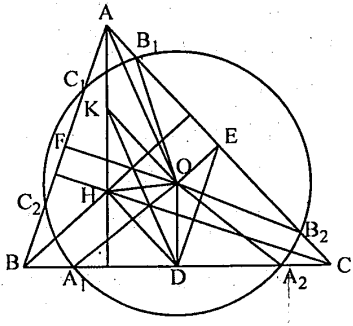
I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ΔIDA cân $\Rightarrow \angle ADI = \frac{1}{2}\angle BAI = \frac{1}{4}\angle A$

$\Rightarrow \angle ABI = \frac{1}{4}\angle A$

$\Rightarrow \angle B = \frac{1}{2}\angle A \Rightarrow \angle B = 35^0$.

Ví dụ 26. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm tam giác, gọi D, E, F là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Đường tròn tâm D bán kính DH cắt cạnh BC tại A_1, A_2. Tương tự, trên CA ta có B_1, B_2 và trên AB ta có C_1, C_2. Chứng minh rằng $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên một đường tròn. (IMO Shortlist 2008).

Giải:



D, E là trung điểm của BC, $CA \Rightarrow OD \perp BC$, $OE \perp CA \Rightarrow OD // AH$, $OE // BH$

$\Rightarrow \Delta ODE$ và ΔHAB đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow AH = 2OD$ và $BH = 2OE$.

Gọi K là trung điểm $AH \Rightarrow HK = OD$ và $HK // OD \Rightarrow$ tứ giác $KODH$ là hình bình hành $\Rightarrow OK = DH$.

$AK = OD \Rightarrow$ tứ giác $AKDO$ là hình bình hành $\Rightarrow DK = OA = R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Theo giả thiết $DH = DA_1 \Rightarrow \Delta ODA_1$ là tam giác vuông

$\Rightarrow OA_1^2 = OD^2 + DA_1^2 = OD^2 + DH^2$.

Theo công thức đường trung tuyến tam giác, công thức cạnh và đường chéo hình bình hành ta có:

$$OD^2 + DH^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + DK^2) = \frac{1}{2}(OH^2 + OA^2) = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2).$$

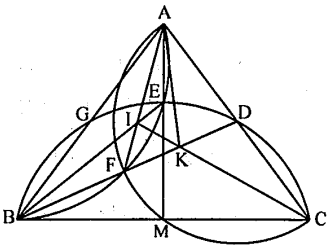
$\Rightarrow OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$.

Tương tự $OA_1^2 = OA_2^2 = OB_1^2 = OB_2^2 = OC_1^2 = OC_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$.

Vậy A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{2(OH^2 + R^2)}$.

Ví dụ 27. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), D là trung điểm cạnh AC, đường phân giác góc $\angle BAC$ cắt cung BDC tại E. Đường thẳng BD cắt cung AEB tại F, đường thẳng AF và BE cắt nhau tại I, và CI cắt BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK (IMO Shortlist 2011).

Giải:



Gọi G là giao điểm của cung BDC với cạnh AB và M là trung điểm của $BC \Rightarrow A$, E, M thẳng hàng.

ΔABC cân $\Rightarrow ED = EG \Rightarrow \angle GBE = \angle EBD$

$\Rightarrow \angle ABI = \angle IBK$

$\Rightarrow BI$ là phân giác của góc $\angle ABK$

$$\angle DFA = 180^0 - \angle BFA = 180^0 - \angle BEA = \angle MEB = \frac{1}{2}\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BDC$$

$\Rightarrow \angle DFA = \angle BEM$.

Mặt khác $\angle EBF = \angle FAE$ (cắn cung cung EF)

$\Rightarrow \angle BEM = \angle BAM + \angle ABE = \angle MAC + \angle FAE = \angle FAD$

$\Rightarrow \angle FAD = \angle AFD \Rightarrow \Delta DAF$ là tam giác cân $\Rightarrow AD = DF$.

Áp dụng định lí Menelaus với ΔADF cát tuyến $IKC \Rightarrow \frac{CA}{CD}\frac{KD}{KF}\frac{IF}{IA} = 1$.

$AD = DC$, BI là phân giác góc $\angle ABD \Rightarrow \frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BA}$.

$$\Rightarrow 1 = 2.\frac{KD}{KF}\frac{BF}{BA} = \frac{KD}{KF}\frac{BF}{AD} \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{KF}{KD} \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{BD}{AD}=\frac{BF+FD}{AD}=\frac{BF}{AD}+1$, kết hợp (1) suy ra:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{BF}{AD}+1=\frac{KF}{KD}+1=\frac{KF+KD}{KD}=\frac{DF}{KD}=\frac{AD}{KD}$$

$\Rightarrow \Delta BDA$ và ΔADK (c.g.c) $\Rightarrow \angle DAK = \angle DBA$

Áp dụng tính chất góc ngoài tam giác ABF ta có:

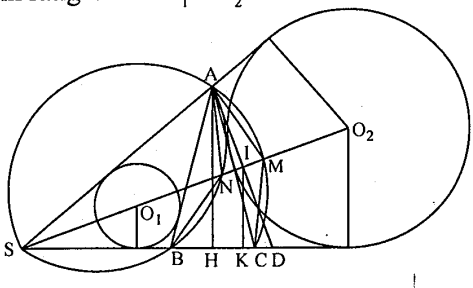
$\angle IAB = \angle AFD - \angle ABD = \angle DAF - \angle DAK = \angle KAI$

$\Rightarrow AI$ là phân giác $\angle BAK \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Ví dụ 28. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2), $(R_1 \neq R_2)$ không cắt nhau. Gọi A, B, C nằm trên hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1, R_1) và (O_2, R_2), sao cho $AB = AC$ đồng thời AB, AC theo thứ tự là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) và (O_2), gọi H là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AH = R_1 + R_2$.

Giải:

Gọi S là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài (O_1, R_1) và (O_2, R_2) $\Rightarrow S, O_1, O_2$ thẳng hàng và nằm trên đường phân giác tạo bởi hai tiếp tuyến ngoài của (O_1, R_1) và (O_2, R_2).



Đường tròn ngoại tiếp ΔSAC cắt SO_2 tại M, SO_2 là phân giác $\angle ASC$ suy ra $MA = MC = MO_2$. Đường tròn ngoại tiếp ΔSBA cắt SO_2 tại $N \Rightarrow NA = NB = NO_1$ (do tính chất đường phân giác cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác).

Theo giả thiết $AB = AC$ và $\angle ASB + \angle ANB = \angle ASC + \angle AMC = 180^0$

$\Rightarrow \angle ANB = \angle AMC \Rightarrow \Delta ANB$ và ΔAMC là hai tam giác cân bằng nhau (g.c.g)

$\Rightarrow NO_1 = MO_2$.

Gọi I là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IM = IN$, AI cắt BC tại $D \Rightarrow AI = ID$.

Gọi K là hình chiếu của I trên $CD \Rightarrow AH = 2IK$.

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \Rightarrow AH = R_1 + R_2$.

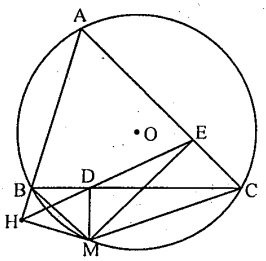
II. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

Robert Simson là nhà toán học người Scotland (1687-1768). Lúc đầu ông có ý định làm việc trong nhà thờ nhưng sự đam mê đã đưa ông sang toán học, năm 1711 ông được bổ nhiệm giáo sư toán học của đại học Glasgow.

1. Đường thẳng Simson

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm tùy ý trên (O), gọi D, E, H là hình chiếu của trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng D, E, H thẳng hàng.

Chứng minh:



Không mất tính tổng quát giả sử M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$.

$MD \perp BC$, $ME \perp AC \Rightarrow MDEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \overset{\frown}{EMC} = \overset{\frown}{EDC}$ (1)

$MH \perp AB$, $MD \perp BC \Rightarrow$ tứ giác $MHBD$ nội tiếp

$\Rightarrow \overset{\frown}{HMB} = \overset{\frown}{HDB}$ (2)

$ABMC$ nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{MBH} = \overset{\frown}{MCA}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MBH} + \overset{\frown}{HMB} = \overset{\frown}{MCA} + \overset{\frown}{EMC} = 90^0$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EMC} = \overset{\frown}{HMB}$ (3)

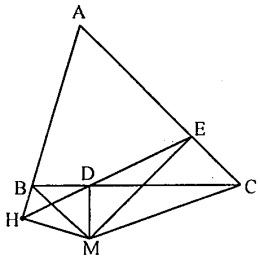
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \overset{\frown}{HDB} = \overset{\frown}{EDC} \Rightarrow H, D, E$ thẳng hàng.

Đường thẳng qua D, H, E có tên là *đường thẳng Simson* của tam giác ABC ứng với điểm M (*hay đường thẳng Wallace, để khỏi trùng với nhà toán học người Anh Thomas Simpson, 1710-1761*).

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi D, E, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB và D, E, H thẳng hàng. Chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh:

Theo giả thiết $MD \perp BC, ME \perp CA, MH \perp AB$ và D, H, E thẳng hàng.



$\Rightarrow$ tứ giác $MDBH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{HDB}$

(chắn cung $\widehat{HB}$), $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$ (đối đỉnh), $\widehat{EDC} = \widehat{EMC}$ (chắn cung $\widehat{EC}$) $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{EMC}$.

Tứ giác $AEMH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EMH} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EMH} = \widehat{A} + \widehat{HMB} + \widehat{BME}$.

$\widehat{A} + \widehat{HMB} + \widehat{BME} = \widehat{A} + \widehat{EMC} + \widehat{BME} = \widehat{A} + \widehat{BMC} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

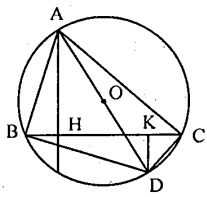
Từ hai bài toán trên ta thấy "*Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác và không trùng với các đỉnh, gọi D, E, H là hình chiếu của M trên ba cạnh của tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là D, E, H thẳng hàng*".

Như vậy, với mỗi điểm M có một đường thẳng Simson đối với tam giác ABC cho trước.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Đường thẳng Simson của đỉnh A của tam giác là đường cao hạ từ đỉnh đó và đường thẳng Simson của điểm D đối xứng với đỉnh A qua tâm O là cạnh BC của tam giác.

Giải:



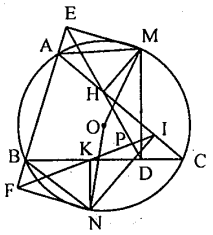
Đối với đỉnh A đường thẳng Simson trùng với đường cao AH.

D là điểm đối xứng của A qua tâm $O \Rightarrow AD$ là đường kính.

$\Rightarrow DB \perp AB, DC \perp AC \Rightarrow$ đường thẳng Simson chính là đường thẳng BC.

Ví dụ 2. Nếu M và N là các điểm thuộc (O), thì các góc giữa hai đường thẳng Simson của M và N bằng nửa số đo cung $\overset{\frown}{MN}$. Đặc biệt nếu M và N đối xứng nhau qua tâm O, thì các đường thẳng Simson của chúng vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn Euler.

Giải:



$AEMH$ nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{AEH} = \overset{\frown}{AMH} = 90^0 - \overset{\frown}{MAC}$ (1)

$BFNK$ nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{BFK} = \overset{\frown}{BNK} = 90^0 - \overset{\frown}{CBN}$ (2)

Cộng (1) và (2) $\Rightarrow \overset{\frown}{AEH} + \overset{\frown}{BFK} = 180^0 - \overset{\frown}{MAC} - \overset{\frown}{CBN}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MAC} + \overset{\frown}{CBN} = 180^0 - (\overset{\frown}{AEH} + \overset{\frown}{BFK}) = \overset{\frown}{EPF}$

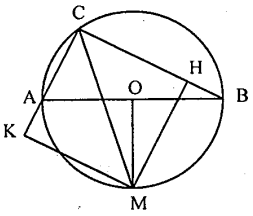
$\Rightarrow$ đường thẳng ED và đường thẳng FI tạo với nhau bằng nửa số đo cung $\overset{\frown}{MN}$.

(Trường hợp đặc biệt bạn đọc tự chứng minh).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, C là điểm trên đường tròn. Đường phân giác của góc $\overset{\frown}{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại M, gọi H và K là hình chiếu của M trên BC và CA.

Chứng minh rằng O, K, H thẳng hàng.

Giải:



CM phân giác góc $\overset{\frown}{ACB} \Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow MO \perp AB$

Theo giả thiết $MH \perp BC, MK \perp CA$.

Theo bài toán 1 $\Rightarrow H$, O, K thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi K, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh P, K, Q nằm trên một đường thẳng và luôn đi qua một điểm cố định, không phụ thuộc vào điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Olimpia Japan 1996).

Giải:

Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của MK, MP, MQ với BC, CA, AB

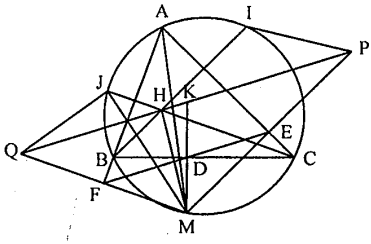
$\Rightarrow MD \perp BC, ME \perp AC, MQ \perp AB$

$\Rightarrow D$, E, F thẳng hàng.

Mặt khác $MD = DK,\ ME = EP, MF = FQ$

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔMPQ

$\Rightarrow EF // PQ$ và $P,\ K,\ Q$ thẳng hàng.



Gọi H là trực tâm ΔABC và $I,\ J$ là điểm đối xứng của H qua AC và AB.

$\Rightarrow I,\ J$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow MHIP, MHJQ$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{QHJ} = \widehat{MJH} = \widehat{MAC}$.

Tương tự $\widehat{PHI} = \widehat{MIH} = \widehat{MAB}$

$\Rightarrow \widehat{QHJ} + \widehat{PHI} + \widehat{IHJ} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} + \widehat{IHJ} = \hat{A} + \widehat{IHJ} = 180^0$

$\Rightarrow P,\ Q,\ H$ thẳng hàng

$\Rightarrow$ đường thẳng PQ luôn đi qua trực tâm của ΔABC.

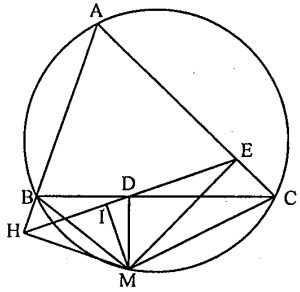
Đường thẳng này có tên là đường thẳng Steiner, Steiner (1796-1863) - nhà toán học Thụy Sĩ, Viện sĩ Viện hàn lâm Berlin (1834).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa đỉnh A. Gọi $D,\ E,\ H$ là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh $BC,\ CA,\ AB$.

Chứng minh rằng $\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MH}$. (USA năm 1979).

Giải:

Theo *bài toán 1* $\Rightarrow H,\ D,\ E$ thẳng hàng, các tứ giác $MHBD, MDEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MCB}$ (chắn cung $\widehat{BM}$), $\widehat{MBC} = \widehat{MHE}$



$\Rightarrow \Delta MEH$ đồng dạng ΔMCB.

Kẻ $MI \perp HE \Rightarrow \dfrac{BC}{MD} = \dfrac{HE}{MI}$ (1)

$\widehat{MHD} = \widehat{MBC} = \widehat{MAC}$, $\widehat{MDH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow \Delta MHD$ đồng dạng với $\Delta MAC \Rightarrow \dfrac{AC}{ME} = \dfrac{HD}{MI}$ (2)

$\widehat{MED} = \widehat{MCB} = \widehat{MAB}$, $\widehat{MDE} + \widehat{MCA} = 180^0 = \widehat{MBA} + \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MBA}$

$\Rightarrow \Delta MED$ đồng dạng với $\Delta MAB \Rightarrow \dfrac{AB}{MH} = \dfrac{ED}{MI}$ (3)

Cộng hai vế (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{AC}{ME} + \dfrac{AB}{MH} = \dfrac{HD + DE}{MI} = \dfrac{HE}{MI}$.

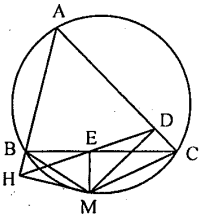
Kết hợp (1) $\Rightarrow \dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MH}$.

Chú ý: Trong kì thi học sinh giỏi Quốc gia Việt Nam ra trường hợp ΔABC đều: *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{ME} + \dfrac{1}{MH} = \dfrac{1}{MD}$.

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn *ABC*, *M* là điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa đỉnh *A*. Gọi *D*, *H* là hình chiếu của *M* lần lượt trên các cạnh *AC*, *AB*. Xác định vị trí của *M* để *DH* ngắn nhất.

Giải:

Hạ $ME \perp BC \Rightarrow D, E, H$ thẳng hàng.



Tứ giác *MIIBE* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{DHM}$, tứ giác *MCDE* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{HDM} \Rightarrow \Delta HDM$ và ΔBCM đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{HD}{BC} = \dfrac{HM}{BM}$, $MH \le MB \Rightarrow \dfrac{MH}{MB} \le 1 \Rightarrow \dfrac{HD}{BC} \le 1$

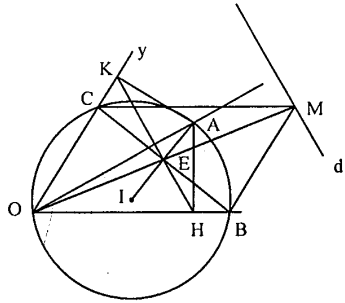
$\Rightarrow HD \le BC \Rightarrow HD$ lớn nhất khi $HD = BC$

$\Rightarrow MH = MB \Rightarrow MB \perp AB \Rightarrow AM$ là đường kính

$\Rightarrow M$ đối xứng *A* qua tâm *O*.

Ví dụ 7. Cho góc $\widehat{xOy}$, lấy điểm *A* cố định thuộc phân giác $\widehat{xOy}$. Dựng đường tròn tâm (I) qua *O* và *A* cắt *Ox*, *Oy* tại *B* và *C*; dựng hình bình hành *OBMC*. Chứng minh *M* thuộc một đường thẳng cố định.

Giải:



Gọi E là giao điểm của AI và BC, điểm A trên phân giác của góc $\widehat{xOy} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow IA \perp BC$, kẻ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$

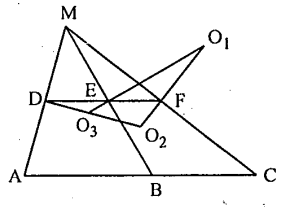
$\Rightarrow K, H$ cố định và K, E, H thẳng hàng

$\Rightarrow$ đường thẳng Simson của A đối với đường tròn (I) cố định.

Hình bình hành $OBMC$ có $OM = 2OE \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng Simson và cách O một khoảng không đổi.

Ví dụ 8. Cho ba điểm A, B, C thuộc một đường thẳng và M không thuộc đường thẳng đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCA và M thuộc một đường tròn.

Giải:



Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCA và D, E, F là hình chiếu của M trên các cạnh của $\Delta O_1O_2O_3$

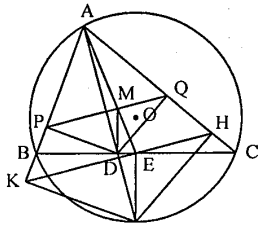
$\Rightarrow MF \perp O_1O_2$, $MD \perp O_2O_3$, $ME \perp O_3O_1 \Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng.

Theo bài toán ngược lại $\Rightarrow O_1, O_2, O_3, M$ nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và đường phân giác AD. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC, từ D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt PQ tại M.

Chứng minh rằng M thuộc trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC.

Giải:



Gọi I là giao điểm của đường phân giác AD với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Từ I kẻ $IK \perp AB, IH \perp AC$, nối I với O cắt BC tại E

$\Rightarrow EB = EC$ và $IE \perp BC$

I

Theo Bài toán 1 $\Rightarrow$ *K, E, H* thẳng hàng.

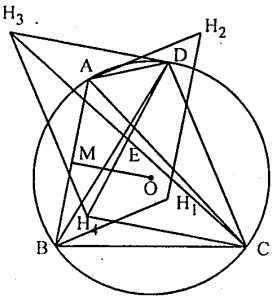
$\Rightarrow DP//IK$ và $DQ//IH \Rightarrow \dfrac{AP}{AK}=\dfrac{AD}{AI}$ và $\dfrac{AQ}{AH}=\dfrac{AD}{AI} \Rightarrow \dfrac{AP}{AK}=\dfrac{AQ}{AH} \Rightarrow PQ//KH.$

$MD \perp BC$, $IE \perp BC \Rightarrow DM//IE \Rightarrow$ *A, M, E* thẳng hàng

$\Rightarrow$ *M* thuộc trung tuyến *AE.*

Ví dụ 10. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn, d_A, d_B, d_C, d_D là các đường thẳng Simson của *A, B, C, D* tương ứng đối với các tam giác *BCD, CDA, DAB, ABC*. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

Giải:



Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác *BCD, CDA, DAB, ABC.*

$\Rightarrow$ đường thẳng Steiner của điểm *A, B, C, D* đối với các tam giác *BCD, CDA, DAB, ABC* đi qua $H_1, H_2, H_3, H_4 \Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$ đi qua trung điểm của AH_1, BH_2, CH_3, DH_4.

Gọi *M* là trung điểm của $AB \Rightarrow CH_4 = 2OM$, $DH_3 = 2OM$

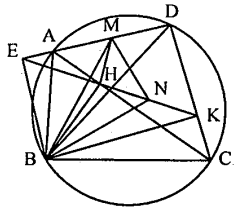
$\Rightarrow CDH_3H_4$ là hình bình hành

$\Rightarrow DH_4, CH_3$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Tương tự AH_1, BH_2 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

$\Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$ đồng quy.

Ví dụ 11. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn. Gọi *H, K* là hình chiếu của *B* trên *AC* và *CD, M, N* là trung điểm của *AD* và *HK*. Chứng minh tam giác *BMN* là tam giác vuông.



Giải:

Từ *B* kẻ $BE \perp AD$, theo bài toán 1 $\Rightarrow$ đỉnh *B* với tam giác *ADC* có $BH \perp AC, BK \perp CD \Rightarrow$ *E, H, K* thẳng hàng.

Tứ giác $BEDK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EKB}$.

Tứ giác $BHKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHK} + \widehat{BCD} = 180^0$.

Mặt khác $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHK} \Rightarrow \Delta BHK$ và ΔBAD đồng dạng, $MA = MD$ và $NH = NK \Rightarrow \Delta BNK$ và ΔBMD đồng dạng.

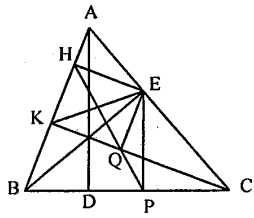
Xét ΔBMD: $\widehat{AMB} = \widehat{MDB} + \widehat{MBD}$; tương tự ΔBNK: $\widehat{BNE} = \widehat{NKB} + \widehat{NBK}$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BNE} \Rightarrow$ tứ giác $BEMN$ nội tiếp, $BE \perp AD \Rightarrow BN \perp MN$

$\Rightarrow BMN$ là tam giác vuông.

Ví dụ 12. Gọi AD, BE, CK là đường cao của tam giác ABC. P, Q là hình chiếu của E trên BC và CK. Chứng minh PQ đi qua trung điểm của KE.

Giải:



Từ E hạ $EH \perp AB$, theo giả thiết $EP \perp BC, EQ \perp CK$, tứ giác $BKEC$ nội tiếp

Theo bài toán 1 $\Rightarrow P, Q, H$ thẳng hàng.

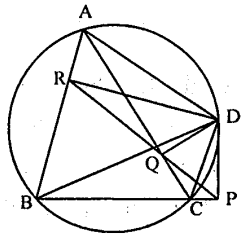
Tứ giác $KHEQ$ có: $\widehat{EHK} = \widehat{HKQ} = \widehat{KQE} = 90^0$

$\Rightarrow KHEQ$ là hình chữ nhật, KE và HQ là đường chéo

$\Rightarrow$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $\Rightarrow PQ$ đi qua trung điểm KE.

Ví dụ 13. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Chứng minh $PQ = QR$ khi và chỉ khi đường phân giác $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC.

Giải:



Theo giả thiết ta có P, Q, R thẳng hàng;

$DPCQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{DPR}$.

Tương tự $\widehat{DAC} = \widehat{DRP} \Rightarrow \Delta DCA$ và ΔDPR đồng dạng, ΔDAB và ΔDQP đồng dạng, ΔDBC và ΔDRQ đồng dạng.

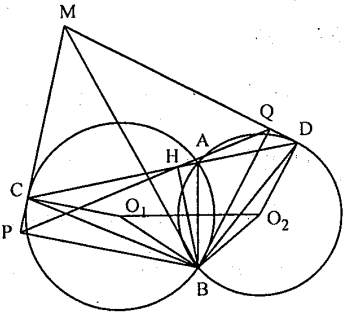
$$\Rightarrow \frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP};\frac{DR}{DB}=\frac{QR}{BC};\frac{DP}{DB}=\frac{PQ}{BA}\Rightarrow \frac{DA}{DC}=\frac{DB\dfrac{QR}{BC}}{DB\dfrac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}.\frac{BA}{BC}$$

$\Rightarrow PQ=QR$ khi và chỉ khi $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}$

$\Leftrightarrow$ đường phân giác $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC.

Ví dụ 14. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt (O_1), (O_2) tại C, D (A nằm giữa C và D). Tiếp tuyến tại C của (O_1) và tại D của (O_2) cắt nhau tại M. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống hai tiếp tuyến. Chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn cố định.

Giải:



MC, MD là tiếp tuyến của (O_1), (O_2)

$\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{MCA}$, $\widehat{ABD}=\widehat{MDA}$

$\Rightarrow \widehat{CBD}=\widehat{MCD}+\widehat{MDC}=180^0-\widehat{CMD}$

$\Rightarrow \widehat{CBD}+\widehat{CMD}=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác MCBD nội tiếp.

Hạ $BH\perp CD$, khi đó P, H, Q thẳng hàng.

A, B cố định $\Rightarrow$ H nằm trên đường tròn đường kính AB.

Ta có $\widehat{PHB}=\widehat{PCB}=\widehat{CAB}\Rightarrow$ PQ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

$\Rightarrow$ PQ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H, D là điểm trên cung nhỏ BC, lấy E sao cho CE song song và bằng AD, và K là trực tâm của tam giác ACE. Gọi P, Q là hình chiếu của K trên BC và AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của HK. (VMO 2004).

Giải:

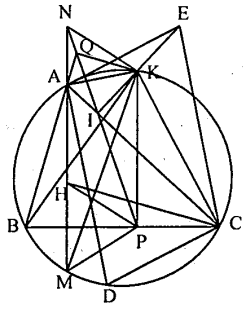
Theo giả thiết $\Rightarrow ADCE$ là hình bình hành $\Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{AEC}$, K là trực tâm $\Delta AEC \Rightarrow EK \perp AC$.

Ta có $\overset{\frown}{AKC} + \overset{\frown}{AEC} = 180^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AKC} + \overset{\frown}{ADC} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $ADCK$ nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$.

EK cắt AC tại $I \Rightarrow P, Q, I$ thẳng hàng (Simson).

AH cắt (O) tại M và cắt PQ tại $N \Rightarrow MN // KP$, $KQ \perp AB, KP \perp BC \Rightarrow BQKP$ là tứ giác nội tiếp.



$\Rightarrow \overset{\frown}{QBK} = \overset{\frown}{AMK} = \overset{\frown}{QPK} \Rightarrow MPKN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MPKN$ là hình thang cân $\Rightarrow KN = PM$.

Mặt khác $PH = PM \Rightarrow PH = KN \Rightarrow HPKN$ là hình bình hành

$\Rightarrow NP$ cắt HK tại trung điểm $\Rightarrow PQ$ đi qua trung điểm HK.

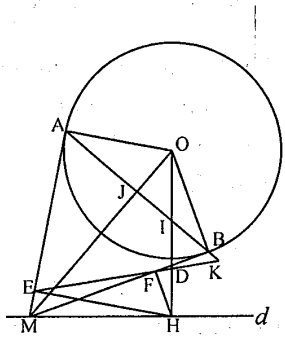
Ví dụ 16. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt (O). Điểm M thay đổi trên d. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O). Gọi H là hình chiếu của O trên d và E, F lần lượt là hình chiếu của H trên MA, MB. Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định từ đó suy ra EF cũng đi qua điểm cố định.

Giải:

MA, MB là tiếp tuyến với (O)

$\Rightarrow OA \perp MA, OB \perp MB, OH \perp MH$

$\Rightarrow$ năm điểm O, A, M, H, B nằm trên đường tròn đường kính MO. AB cắt OH tại I.



$OM \perp AB$ tại J, $JA = JB \Rightarrow OI.OH = OJ.OM = R^2$

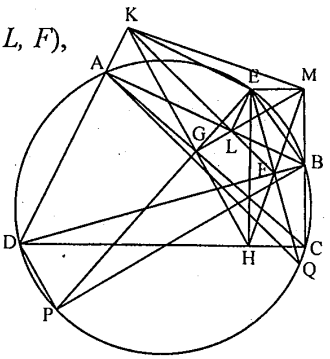
$\Rightarrow I$ cố định. Kẻ $HK \perp AB \Rightarrow E, F, K$ nằm trên đường thẳng Simson của H đối với ΔAMB.

ΔIKD là tam giác cân $\Rightarrow D$ là trung điểm $IH \Rightarrow D$ cố định $\Rightarrow EF$ đi qua điểm cố định.

Ví dụ 17. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), E là điểm bất kì trên (O). Gọi K, L, M, H lần lượt là hình chiếu của M trên DA, AB, BC, CD. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác KLM khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật. (Rumani 2001).

Giải:

Theo giả thiết $EK \perp AD$, $EL \perp AB$, $EM \perp BC$, $EH \perp CD$, từ M kẻ $MG \perp AC$, $MF \perp BD$.



Theo định lí đường thẳng Simson $\Rightarrow$ các bộ ba (K, L, F), (M, F, H), (K, H, G), (M, L, G) thẳng hàng;

Gọi P và Q là giao điểm của EG, EF với đường tròn (O) $\Rightarrow \angle ABE = \angle AQE$, $\angle LFE = \angle LBE$

$\Rightarrow \angle LFE = \angle AQE \Rightarrow KL // AQ$.

Tương tự $MG // BP$, $DP // KH$, $CQ // MH$.

$KF \perp MH \Leftrightarrow AQ \perp QC$, $MG \perp KH \Leftrightarrow BP \perp PD$.

Mặt khác $AQ \perp QC \Leftrightarrow \angle AQC = 90^0$

$\Leftrightarrow AC$ là đường kính của đường tròn (O), tương tự $BP \perp DP \Leftrightarrow BD$ là đường kính của đường tròn (O).

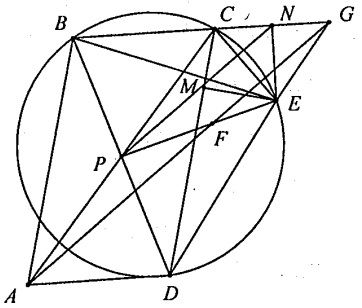
AC, BD đồng thời là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow H$ là trực tâm của ΔKLM.

Ví dụ 18. Cho năm điểm A, B, C, D, E thoả mãn $ABCD$ là hình bình hành, $BCED$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Đường thẳng l qua A cắt DC và BC tại F và G thoả mãn $EF = EG = EC$. Chứng minh rằng l là phân giác góc A. (IMO Shortlist 2007).

Giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm CF, CG. Theo giả thiết $EF = EG = EC \Rightarrow EM \perp CF$, $EN \perp CG$.

Gọi P là giao điểm của BD và AC, theo giả thiết $BCDA$ là hình bình hành $\Rightarrow CP = PA$.



$\Rightarrow PN$ là đường trung bình của ΔCAG

$\Rightarrow P, M, N$ thẳng hàng.

Ta có $EN \perp CG$, $EM \perp CD$, theo định lí đường thẳng Simson đối với đường tròn $(BDEC)$ suy ra $EP \perp BD$, lại có $PB = PD \Rightarrow \Delta EBD$ cân.

$\Rightarrow ED = EB \Rightarrow \angle DBE = \angle BDE.$

Mặt khác $\angle DBE = \angle DCE$ (cùng chắn cung DE).

Tứ giác $BCED$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BDE = \angle ECG \Rightarrow \angle DCE = \angle ECG$

$\Rightarrow \Delta CFE$, ΔCGE bằng nhau (c.g.c) $\Rightarrow CF = CG \Rightarrow \Delta CFG$ cân

$\Rightarrow \angle CGF = \angle CFG$, $\angle CFG = \angle BAG$ (đồng vị).

$\angle BGA = \angle GAD$ (so le) $\Rightarrow \angle BAG = \angle GAD$

$\Rightarrow AG$ là phân giác của góc $\angle BAD$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn bán kính R. Gọi J_A, J_B, J_C là ba tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn đi qua J_A, J_B, J_C.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác ABH và ACH, đường thẳng O_1O_2 cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH và ACH; P, Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB và JAC. Chứng minh rằng PQ song song với IJ.

4. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với BC, CA tại D và E. P và Q là hai điểm trên BC và CA sao cho $CP = BD$ và $CQ = AE$. Gọi M là giao điểm AP và BQ, đường tròn (I) cắt AP tại N.

   Chứng minh $AN = PM$. (IMO 2001).

5. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M là trung điểm BC, chứng minh rằng DI, AM, EF đồng quy.

Chương 7

CÁC ĐỊNH LÍ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC, ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG

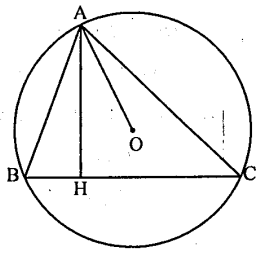
I. ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng đi qua đỉnh của một góc và tạo với đường phân giác của góc đó những góc bằng nhau được gọi là các *đường đẳng giác* đối với các cạnh của góc đó.

Hai điểm gọi là *đẳng giác* nếu nối mỗi đỉnh tam giác với hai điểm đó là những cặp đường đẳng giác.

Ví dụ. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH và bán kính AO là hai đường đẳng giác của tam giác ABC.



2. Định lí

Hai điểm M, N ở trên hai đường thẳng xuất phát từ một đỉnh của một góc, hình chiếu hai điểm đó lên hai cạnh của góc là M_1, M_2 và N_1, N_2, hai đường thẳng đó được gọi là các đường thẳng đẳng giác khi và chỉ khi $MM_1.NN_1 = MM_2.NN_2$.

Chứng minh:

Thuận: $MM_1 \perp Ox$, $NN_1 \perp Ox$ và $MM_2 \perp Oy$, $NN_2 \perp Oy$

Giả thiết $\angle MOM_1 = \angle NON_2 \Rightarrow \Delta OMM_2$ và ΔONN_1 đồng dạng.

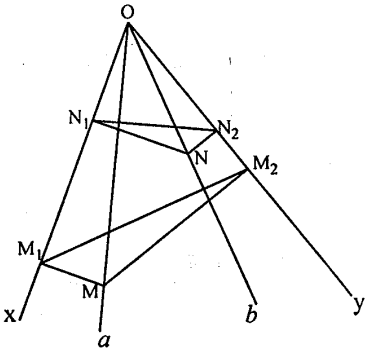
ΔOMM_1 và ΔONN_2 đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MM_2}{NN_1} = \frac{OM}{ON} = \frac{MM_1}{NN_2}$$

$$\Rightarrow MM_1.NN_1 = MM_2.NN_2$$

Đảo:

$$MM_1.NN_1 = MM_2.NN_2 \Rightarrow \frac{MM_2}{NN_1} = \frac{MM_1}{NN_2}$$



$MM_1 // NN_1$, $MM_2 // NN_2 \Rightarrow \angle M_1MM_2 = \angle N_1NN_2$

$\Rightarrow \Delta M_1MM_2$ và ΔN_2NN_1 đồng dạng

$\Rightarrow \angle MM_2M_1 = \angle NN_1N_2$.

Tứ giác OM_1MM_2 và ON_1NN_2 là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle MM_2M_1 = \angle MOM_1$, $\angle NON_2 = \angle NN_1N_2 \Rightarrow \angle MOM_1 = \angle NON_2$.

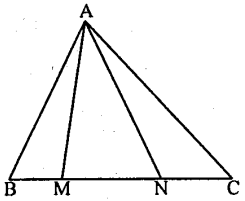
3. Tính chất

1. Bốn điểm M_1, M_2, N_1, N_2 nằm trên một đường tròn.
2. $M_1M_2 \perp ON$, $N_1N_2 \perp OM$.
3. Cho tam giác ABC, AM, AN là hai đường đẳng giác

$$\Leftrightarrow \frac{BM.BN}{CN.CM} = \frac{AB^2}{AC^2}$$ (*Định lí Steiner*).

Chứng minh:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \frac{BM}{CN} \text{ và } \frac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \frac{AB.AM}{AC.AN} \Leftrightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AB.AM}{AC.AN}.$$



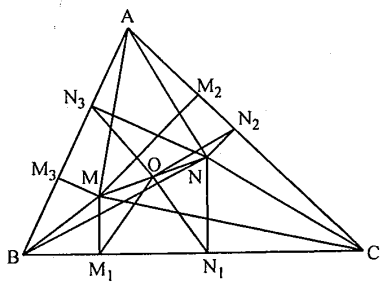
Tương tự $\frac{BN}{CM} = \frac{AB.AN}{AC.AM}$

$$\Rightarrow \frac{BM}{CN}\frac{BN}{CM} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm đẳng giác, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 là hình chiếu của M, N trên ba cạnh. Chứng minh sáu điểm M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 nằm trên một đường tròn và $MM_1.MM_2.MM_3 = NN_1.NN_2.NN_3$.

Giải:



Từ định lí và tính chất của đường đẳng giác M_1, M_2, N_1, N_2 nằm trên một đường tròn;

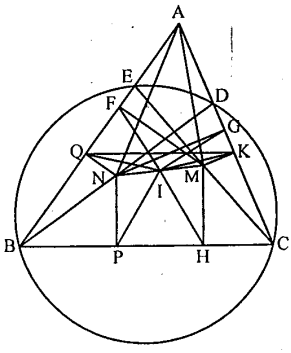
Tương tự M_2, M_3, N_2, N_3 nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow$ sáu điểm M_1, M_2, M_3, N_1 N_2, N_3 nằm trên một đường tròn và O là trung điểm MN là tâm đường tròn đi qua sáu điểm đó.

Chứng minh tích $MM_1.MM_2.MM_3$ không đổi (bạn đọc tự chứng minh).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC không cân, đường tròn qua B, C cắt CA, AB tại D và E. Gọi M, N là trung điểm của CE và BD. Gọi H và K là hình chiếu của M trên BC, CA, và P, Q là hình chiếu của N trên BC, AB, I là trung điểm MN. Chứng minh rằng tam giác IHP và IKQ cân.

Giải:



Theo giả thiết $MH \perp BC$, $NP \perp BC \Rightarrow NP // MH$

$\Rightarrow$ tứ giác $MHPN$ là hình thang vuông.

Do $IM = IN \Rightarrow I$ nằm trên trung trực hình thang $MHPN \Rightarrow I$ nằm trên trung trực PH

$\Rightarrow IH = IP \Rightarrow \Delta IHP$ cân.

Theo giả thiết đường tròn qua B, C cắt cạnh AC, AB tại D, $E \Rightarrow \angle DCE = \angle DBE$ (chắn cung DE).

$\Rightarrow \Delta ACE$ và ΔABD có góc $\angle A$ chung.

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng (g.g), M và N là trung điểm của CE và BD.

$\Rightarrow AM$, AN là các đường trung tuyến của ΔACE và ΔABD.

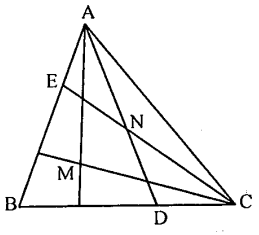
$\Rightarrow \angle CAM = \angle BAN \Rightarrow AM$, AN là đường đẳng giác của ΔABC.

Từ $MK \perp CA$, $NQ \perp AB$, dựng $NG \perp AC$, $MF \perp AB$, theo tính chất đường đẳng giác trong tam giác $\Rightarrow K, G, F, Q$ nằm trên một đường tròn.

Theo phần trên $\Rightarrow IK = IG$ và $IQ = IF \Rightarrow IK = IQ \Rightarrow \Delta IKQ$ cân.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và M là điểm đẳng giác của tam giác. Xác định điểm đẳng giác thứ hai của tam giác ABC.

Giải:



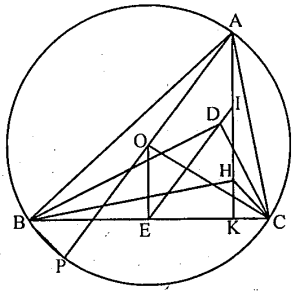
Bài này thực chất là bài củng cố định nghĩa về đường đẳng giác của tam giác.

Dựng đường thẳng AD đối xứng với đường thẳng AM qua đường phân giác góc. Dựng đường thẳng CE đối xứng với CM qua đường phân giác góc ACB, giao điểm của AD và CE là N.

Bạn đọc tự chứng minh N là điểm đẳng giác thứ hai của tam giác ABC.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định, A là điểm trên (O) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn, H là trực tâm tam giác ABC. Gọi I là trung điểm đoạn AH, đường phân giác góc ABH và phân giác góc ACH cắt nhau tại D. Chứng minh rằng đường thẳng DI đi qua điểm cố định.

Giải:



Theo giả thiết H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow BH \perp AC$, $CH \perp AB \Rightarrow \angle HBC = 90^0 - \angle C$

$\Rightarrow \angle ABH = \angle B - \angle HBC = \angle B + \angle C - 90^0$

$= 90^0 - \angle A$

$\Rightarrow \angle DBH = \frac{1}{2}(90^0 - \angle A)$, $\angle DBC = \angle DBH + \angle HBC$

$\Rightarrow \angle DBC = 45^0 - \frac{1}{2}\angle A + 90^0 - \angle C = 135^0 - \angle C - \frac{1}{2}\angle A.$

Tương tự $\angle DCB = 135^0 - \angle B - \frac{1}{2}\angle A$

$\Rightarrow \angle DBC + \angle DCB = 270^0 - \angle B - \angle C - \angle A = 90^0 \Rightarrow \angle BDC = 90^0$.

Từ O hạ $OE \perp BC \Rightarrow EB = EC$, I là trung điểm của $AH \Rightarrow IH = OE \Rightarrow OAIE$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle OAI = \angle EIH$.

Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại P

$\Rightarrow AB \perp BP$ và $\angle APB = \angle ACB$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle CAH$, tương tự $\angle ACH = \angle BCO \Rightarrow O$ và H là hai điểm đẳng giác của ΔABC.

$\Rightarrow \angle OAH = \angle BAC - 2\angle BAO = \angle A - 2(90^0 - \angle C) = \angle EIH$

$\Rightarrow \angle IEC = 90^0 - \angle EIH = 90^0 - (\angle A - 180^0 + 2\angle C) = 270^0 - 2\angle C - \angle A$

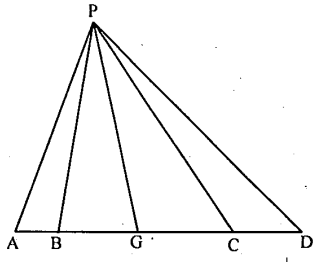
ΔBDC là tam giác vuông, $EB = EC \Rightarrow \angle DEC = 2\angle DBC = 270^0 - 2\angle C - \angle A$

$\Rightarrow I, D, E$ thẳng hàng $\Rightarrow DI$ luôn đi qua trung điểm BC.

Ví dụ 5. Cho A, B, C, D trên một đường thẳng theo thứ tự đó, P là điểm thoả mãn $\angle APB = \angle CPD$, gọi PG là phân giác góc $\angle BPC$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}$. (IberoAmerican 2015).

Giải:



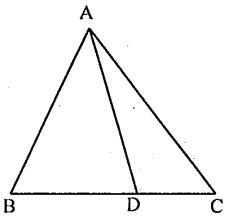
Nhận xét PB, PC là đường đẳng giác của ΔPAD, do đó coi ví dụ này như là tính chất của đường đẳng giác trong tam giác.

Đặt $AB = a, BG = b, CG = c, CD = d$

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c+d}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(c+d)b = (c+b+d)(a+b)c.$$

Biến đổi rút gọn đẳng thức $\Leftrightarrow bd(a+b) = ac(c+d)$.



Bổ đề. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm D

Ta luôn có $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\angle BAD.\sin\angle ACB}{\sin\angle ADC.\sin\angle ABC}$.

Chứng minh:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{dt(ABD)}{dt(ADC)} = \frac{AB.AD\sin\angle BAD}{AD.AC\sin\angle DAC} = \frac{\sin\angle BAD.\sin\angle ACB}{\sin\angle ADC.\sin\angle ABC}.$$

Đặt $\angle APB = \angle CPD = \alpha$, $\angle BPG = \angle GPC = \beta$.

$\angle PAD = \varphi$, $\angle PDA = \gamma$, $\angle PGA = \delta$.

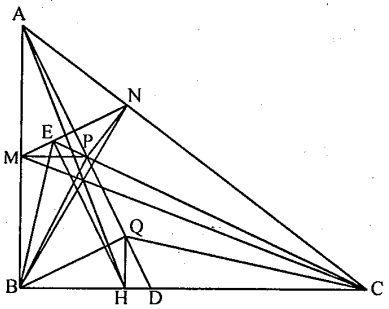
Trở lại bài toán: ΔPAG, ΔPDG, ΔPAD theo bổ đề:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin\beta\sin\varphi},\ \frac{c}{d}=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\delta\sin\alpha},\ \frac{c+d}{a+b}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}=\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac(c+d)}{bd(a+b)}=\frac{\sin\alpha\sin\delta\sin\beta\sin\gamma\sin\varphi}{\sin\beta\sin\varphi\sin\delta\sin\alpha\sin\gamma}=1\Leftrightarrow bd(a+b)=ac(c+d).$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD (D thuộc BC), P và Q trên AD thỏa mãn $\angle PBA=\angle QBC=\angle BAD$. Gọi M, N là hình chiếu của P trên AB, AC và H là hình chiếu của Q trên BC, E là hình chiếu của H trên MN. Chứng minh rằng AH, BN, CM đồng quy.

Giải:



Theo giả thiết $\angle PBA=\angle QBC=\angle BAD$

$\Rightarrow BP$, BQ là đường đẳng giác của tam giác ABD, theo định lí Steiner ta có:

$$\frac{QD}{QA}\frac{PD}{PA}=\frac{BD^2}{AB^2}.$$

AD là phân giác góc $\angle A$, ta có: $\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}$

$$\Rightarrow \frac{QD}{QA}\frac{PD}{PA}=\frac{DC^2}{CA^2}\Rightarrow$$ theo định lí Steiner đảo CQ, CP là đường đẳng giác của

$$\Delta CAD\Rightarrow\angle DCQ=\angle PCA\Rightarrow \frac{BH}{HC}\frac{CN}{NA}\frac{AM}{MB}=\frac{\cot\angle QBC}{\cot\angle QCB}\frac{\cot\angle PCA}{\cot\angle PAC}\frac{\cot\angle PAB}{\cot\angle PBA}=1.$$

Theo định lí Ceva thì AH, BN, CM đồng quy.

II. ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG

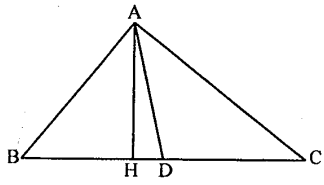
1. Định nghĩa

Đường thẳng và đường trung tuyến của tam giác xuất phát từ một đỉnh, đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc đó, được gọi là *đường đối trung.*

(Đường đối trung là trường hợp đặc biệt của đường đẳng giác).

Ví dụ. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH là đường đối trung.

Chứng minh:



$AH \perp BC \Rightarrow \angle BAH = \angle ACB;$

AD là trung tuyến $\Rightarrow DB = DC = AD$

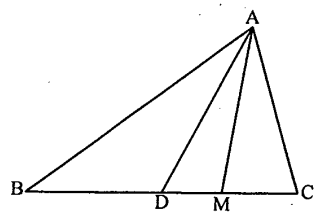
$\Rightarrow \angle DAC = \angle DCA \Rightarrow \angle BAH = \angle CAD$

$\Rightarrow AH$ và AD đối xứng qua phân giác góc A.

2. Định lí

M là điểm trên cạnh BC của tam giác ABC, AM là đường đối trung khi và chỉ khi $\frac{MB}{MC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Chứng minh:



AM là đường đối trung $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAM$

$\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACM}} = \frac{AB.AD}{AC.AM}$, mặt khác $\frac{S_{ABD}}{S_{ACM}} = \frac{DB}{MC}$

$\Rightarrow \frac{AB.AD}{AC.AM} = \frac{DB}{MC}$ (1)

$\angle BAD = \angle CAM \Rightarrow \angle BAM = \angle CAD$

$\Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACD}} = \frac{AB.AM}{AC.AD}$ và $\frac{S_{ABM}}{S_{ACD}} = \frac{MB}{DC} \Rightarrow \frac{AB.AM}{AC.AD} = \frac{MB}{DC}$ (2)

Nhân hai vế của (1) và (2) với nhau $\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Đảo lại. Giả sử AM không là đường đối trung, ta kẻ đường đối trung AN, theo chứng minh trên ta có:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} \Rightarrow \frac{MB + MC}{MC} = \frac{NB + NC}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{MC} = \frac{BC}{NC} \Rightarrow M \equiv N.$$

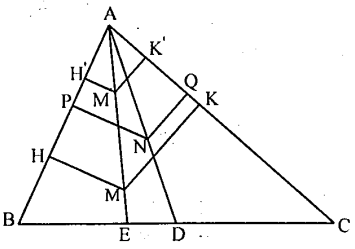
Định lí này mang tên nhà toán học Steiner Jakob (1796-1863)- Nhà toán học Thụy sĩ, Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Berlin 1834. Năm 1832 ông xuất bản tác phẩm "Nghiên cứu một cách hệ thống sự phụ thuộc lẫn nhau của các ảnh hình học".

3. Tính chất

Tính chất 1. Đường đối trung của tam giác là quỹ tích của những điểm mà khoảng cách từ đó đến hai cạnh tam giác tỉ lệ với hai cạnh ấy.

Chứng minh:

Phần thuận: Gọi M là điểm trên đường thẳng AE, kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC \Rightarrow MH$ và MK là khoảng cách từ M đến hai cạnh AB và AC.



Theo giả thiết: $\frac{MH}{MK} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.

Từ điểm N bất kì trên trung tuyến AD kẻ $NP \perp AB$, $NQ \perp AC$, AD là trung tuyến

$\Rightarrow S_{ABD} = S_{ACD}$

$\Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{NQ}{AC} \Rightarrow \frac{NP}{NQ} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{MH}{MK} = \frac{NP}{NQ}$

$\Rightarrow MH.NQ = MK.NP$

$\Rightarrow AE$ là đường đối trung của ΔABC.

Phần đảo: Lấy M' trên AE kẻ $M'H' \perp AB$, $M'K' \perp AC$, N trên AD

$\Rightarrow M'H'.NQ = M'K'.NP \Rightarrow \frac{M'H'}{M'K'} = \frac{NP}{NQ} = \frac{c}{b} \Rightarrow$ (đpcm).

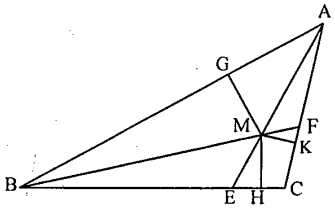
Tính chất 2. Trong một tam giác các đường đối trung cắt nhau tại một điểm.

(Điểm đó được gọi là *điểm Lemoine*).

Lemoine (1840-1912) - Nhà toán học Pháp. Tính chất này Lemoine chứng minh năm 1873.

Chứng minh:

Giả sử AE, BF là hai đường đối trung cắt nhau tại M, từ M hạ $MH \perp BC$, $MK \perp CA$, $MG \perp AB$.



Theo *tính chất 1* $\Rightarrow \dfrac{MG}{MK} = \dfrac{AB}{AC}$ và $\dfrac{MH}{MG} = \dfrac{BC}{BA}$.

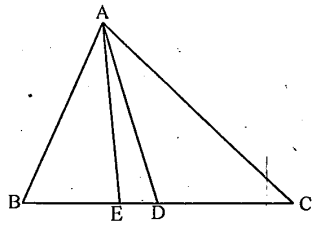
Nhân hai đẳng thức với nhau ta được:

$\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{CB}{CA} \Rightarrow$ CM là đường đối trung của tam giác ABC.

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD và đường đối trung AE. Chứng minh rằng $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{2AB.AC}{AB^2 + AC^2}$. Từ đó suy ra $AD = \dfrac{bc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{b^2+c^2}$.

Giải:



AE là đường đối trung $\Rightarrow \angle BAE = \angle CAD$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{ACD}} = \frac{BE}{CD} = \frac{AB.AE}{AC.AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}\frac{BE}{CD} = \frac{2AC.BE}{AB.BC}.$$

Mặt khác $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \dfrac{BE}{BE+CE} = \dfrac{AB^2}{AB^2+AC^2} = \dfrac{BE}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{2AB.AC}{AB^2+AC^2} \Rightarrow AE = AD.\frac{2AB.AC}{AB^2+AC^2}.$$

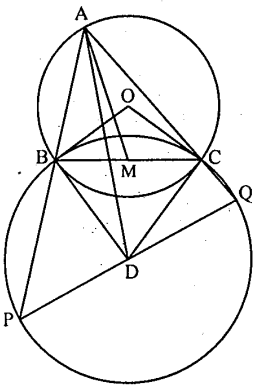
Theo công thức đường trung tuyến ta có: $AD^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

$$\Rightarrow AD = \frac{bc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{b^2+c^2}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại B, C với đường tròn (O) cắt nhau tại D. Chứng minh rằng AD là đường đối trung của tam giác ABC.

Giải:

Dựng đường tròn tâm D bán kính DB, đường thẳng AB, AC cắt đường tròn này tại P và $Q \Rightarrow$ tứ giác $BCQP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle PBC + \angle PQC = 180^0$.



$\angle PDB + \angle BDC + \angle CDQ = (180^0 - 2\angle PBD) + (180^0 - 2\angle DBC) + (180^0 - 2\angle DQC)$

$= 540^0 - 2(\angle PBD + \angle DBC + \angle DQC) = 180^0$

$\Rightarrow P$, D, Q thẳng hàng, ΔABC và ΔAQP đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \angle CAM = \angle PAD$ (Đường thẳng đối xứng với AD qua đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại M);

Mặt khác $DP = DQ \Rightarrow AD$ là trung tuyến ΔAPQ

$\Rightarrow AM$ là trung tuyến $\Delta ACB \Rightarrow AD$ là đường đối trung.

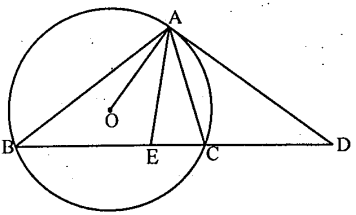
Nhận xét: Ví dụ như một tính chất nhưng không đưa vào phần tính chất, vì khi làm bài học sinh phải chứng minh. Giúp cách xây dựng đường tròn ngoại tiếp để tạo ra đường đối trung.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A cắt cạnh BC tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{b^2}{c^2}$.

Giải:

AD là tiếp tuyến $\Rightarrow \angle ABC = \angle DAC$ (chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta DAC$ và ΔDBA đồng dạng (g.g).



$$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{DA^2}{DB^2} = \frac{b^2}{c^2} \qquad (1)$$

Mặt khác $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DA} \Rightarrow DC.DB = DA^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\frac{DC.DB}{DB^2}=\frac{b^2}{c^2}\Rightarrow \frac{DC}{DB}=\frac{b^2}{c^2}$.

AE là đường đối trung của $\Delta ABC \Rightarrow \frac{EC}{EB}=\frac{b^2}{c^2}\Rightarrow \frac{EC}{EB}=\frac{DC}{DB}$

$\Rightarrow D$ và E chia trong và ngoài đoạn BC những đoạn thẳng tỉ lệ.

Do đó, AD còn gọi là *đường đối trung ngoài* của tam giác ABC.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A cắt cạnh BC tại E. Đường tròn qua A, E, O cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng AD là đường đối trung của tam giác ABC.

Giải:

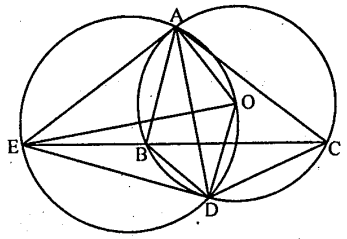
AE là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow OA\perp AE$, đường tròn qua A, E, O cắt (O) tại D

$\Rightarrow \angle EDO = 90^0 \Rightarrow OD\perp DE$

$\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow DE$ là đường đối trung của ΔDBC

$\Rightarrow AD$ là đường đối trung của ΔABC.



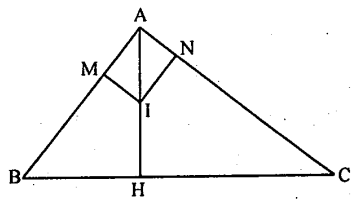
Chú ý: Ví dụ tuy đơn giản nhưng thường xuyên được áp dụng để đưa về xác định đường đối trung để giải.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, điểm Lemoine là trung điểm của đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông.

Giải:

Theo tính chất $AH\perp BC \Rightarrow AH$ là đường đối trung của tam giác vuông ABC. Gọi I là điểm Lemoine trên AH.

Từ I hạ $IM\perp AB$, $IN\perp AC$ theo tính chất của đường đối trung $\Rightarrow \frac{IH}{IM}=\frac{BC}{AB}, \frac{IH}{IN}=\frac{BC}{CA}$.

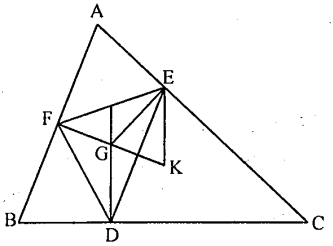


$$\Rightarrow \frac{IH}{BC}=\frac{IM}{AB}=\frac{IN}{AC}=\frac{IH.BC}{BC^2}=\frac{IM.AB}{AB^2}=\frac{IN.AC}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{IH.BC}{BC^2}=\frac{IM.AB}{AB^2}=\frac{IN.AC}{AC^2}=\frac{IH.BC+IM.AB+INAC}{BC^2+CA^2+AB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2S_{ABC}}{2BC^2}=\frac{AH.BC}{2BC^2}=\frac{AH}{2BC}\Rightarrow IH=\frac{AH}{2}.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, G là điểm Lemoine của tam giác. Gọi D, E, F là hình chiếu của G trên ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác DEF.



Giải:

Kéo dài FG lấy điểm K sao cho $GK = GF$.

$GF \perp AB$, $GE \perp AC \Rightarrow$ tứ giác $AFGE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle FAE = \angle EGK$.

G là điểm Lemoine của tam giác $\Rightarrow \frac{GF}{AB}=\frac{GE}{AC}\Rightarrow \frac{GF}{GE}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{GK}{GE}=\frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \Delta GKE$ và ΔABC đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \angle GKE = \angle ABC$, $GD \perp BC \Rightarrow$ tứ giác $BFGD$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle DGK = \angle ABC \Rightarrow \angle GKE = \angle DGK \Rightarrow GD // EK$.

$GF = GK \Rightarrow DG$ đi qua trung điểm EF, tương tự EG đi qua trung điểm của DF

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔDEF.

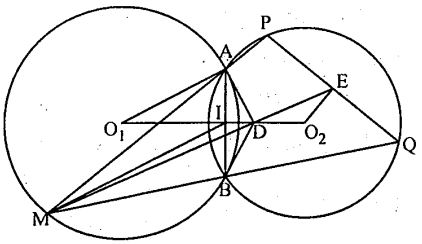
Ví dụ 7. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến tại A, B với đường tròn (O_1) cắt nhau tại D, M là điểm tùy ý trên đường tròn (O_1), MA, MB cắt đường tròn (O_2) tại P và Q. Chứng minh rằng MD đi qua trung điểm của PQ. (Russian 1997).

Giải:

Từ giả thiết $\Rightarrow DM$ là đường đối trung của ΔMAB; gọi I là trung điểm của AB

$\Rightarrow AI$ là đường trung tuyến của ΔMAB

$\Rightarrow \angle AMI = \angle BMD$.



Theo giả thiết, $APQB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle MAB = \angle BQP = \angle MQP$

$\Rightarrow \Delta MAB$ và ΔMQB đồng dạng (g.g)

Đường thẳng MD cắt PQ tại E, MI là trung tuyến của ΔMAB.

Do tính chất của tam giác đồng dạng $\Rightarrow ME$ là trung tuyến của ΔMQB

$\Rightarrow E$ là trung điểm PQ.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, AD cắt EF tại P. Từ P kẻ các đường thẳng song song DE cắt FD tại M, song song với FD cắt DE tại N. Chứng minh tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

Giải:

Tam giác DEF có cạnh AE, AF là tiếp với đường tròn ngoại tiếp và cắt nhau tại A theo *Ví dụ 2* $\Rightarrow DA$ là đường đối trung của ΔDEF.

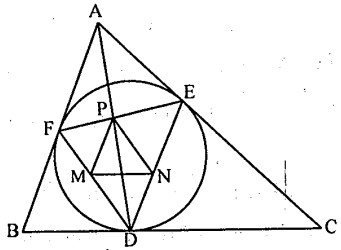
Theo tính chất đường đối trung $\Rightarrow \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{DE^2}{DF^2} \Rightarrow PE.DF^2 = PF.DE^2$ (1)

Với giả thiết $PM//DE$, $PN//DF$, theo định lí Thales ta có:

$\dfrac{DM}{DF} = \dfrac{EP}{EF} \Rightarrow DM.EF = EP.DF$

$\Rightarrow DM.DF = \dfrac{EP.DF^2}{EF} = \dfrac{EP}{EF}DF^2$

Tương tự $DN.DE = \dfrac{FP}{EF}DE^2$.



Kết hợp (1) $\Rightarrow DM.DF = DN.DE \Rightarrow$ tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

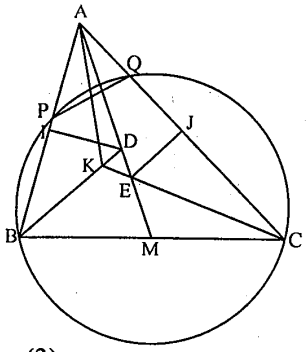
Ví dụ 9. Cho tam giác ABC không cân, M là trung điểm BC. Trên AM lấy hai điểm D và E sao cho $AD = BD$ và $AE = CE$, đường thẳng CE cắt BD tại K. Đường tròn qua B, C cắt cạnh AB, AC tại P và Q. Chứng minh rằng AK đi qua trung điểm PQ.

Giải:

Áp dụng định lí sin cho ΔKAB và ΔKAC:

$\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{\sin\angle AKB}{\sin\angle ABK}, \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{\sin\angle AKC}{\sin\angle ACK}.$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\angle AKB.\sin\angle ACK}{\sin\angle ABK.\sin\angle AKC} \quad (1)$$



Áp dụng định lí sin cho ΔBAM và ΔCAM:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin\angle AMB}{\sin\angle BAM}, \frac{AC}{CM} = \frac{\sin\angle AMC}{\sin\angle CAM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle BAM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{\sin\angle AKB.\sin\angle ACK}{\sin\angle ABK.\sin\angle AKC} = \frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle BAM}$ (3)

Gọi I, J là trung điểm AB, $AC \Rightarrow DI \perp AB$ và $EJ \perp AC \Rightarrow \Delta ADB$ và ΔAEC cân

$\Rightarrow \angle ABK = \angle BAM$, $\angle CAM = \angle ACK$.

Kết hợp (3) $\Rightarrow \sin\angle AKB = \sin\angle AKC \Rightarrow \angle AKB = \angle AKC$

$\Rightarrow \angle ABK + \angle BAK = \angle ACK + \angle CAK$

$\Rightarrow \angle BAK + \angle KAD + \angle BAK = \angle CAD + \angle CAD + \angle KAD \Rightarrow \angle BAK = \angle CAM$

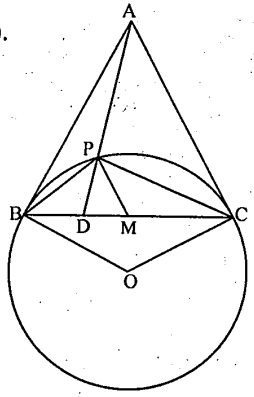
$\Rightarrow AK$ là đường đối trung của $\Delta ABC \Rightarrow \angle CAM = \angle BAK$ (4)

Đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại P và $Q \Rightarrow \Delta ABC$ và ΔAQP đồng dạng (g.g). Từ (4) $\Rightarrow$ trung tuyến của ΔAQP nằm trên AK.

$\Rightarrow AK$ đi qua trung điểm PQ.

Ví dụ 10. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), M là trung điểm cạnh BC. P là điểm trong tam giác sao cho $\angle PBC = \angle PCA$.

Chứng minh rằng $\angle BPM + \angle APC = 180^0$. (Poland 2000).



Giải:

Theo giả thiết $\angle PBC = \angle PCA \Rightarrow P$ nằm trên cung tròn qua B, C và AC là tiếp tuyến.

Dựng cung tròn tâm O là giao điểm của trung trực BC với đường thẳng vuông góc với AC tại C, ΔABC cân $\Rightarrow AC$, AB là tiếp tuyến của cung tròn

$\Rightarrow AP$ là đường đối trung của ΔBPC

PA cắt BC tại $D \Rightarrow PD$ là đường đối trung của ΔBPC

$\Rightarrow \angle BPD = \angle CPM \Rightarrow \angle BPM = \angle CPD$

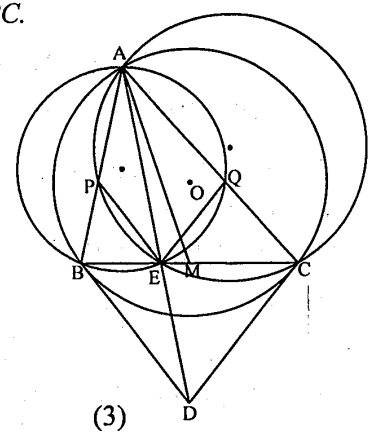
$\Rightarrow \angle BPM + \angle APC = \angle CPD + \angle APC = 180^0$.

Nhận xét. Đây là bài áp dụng đường đối trung quá hay với cách giải đơn giản, song để có được như vậy phải biết dựng đường tròn $(O;\ OB)$, đó chính là cội nguồn của *Ví dụ 2.*

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O), qua B và C kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt nhau tại D, AD cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt cạnh AC tại Q, đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh rằng $EP = EQ$.

Giải:

Theo *Ví dụ 2* $\Rightarrow AE$ là đường đối trung của ΔABC.



Tứ giác $APEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle BPE = \angle ACB$

$\Rightarrow \Delta BPE$ và ΔBCA đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{PE}{CA} \Rightarrow PE = \frac{CA}{BA}BE \quad (1)$$

Tương tự ΔCEQ, ΔCAB đồng dạng

$$\Rightarrow QE = \frac{BA}{CA}CE \qquad (2)$$

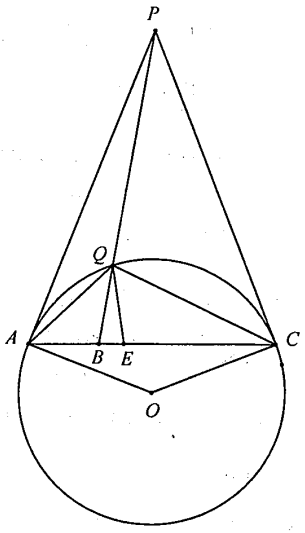
Mặt khác, AE là đường đối trung $\Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{PE}{QE} = \frac{CA.BE}{BA}\frac{CA}{CE.BA} = \frac{CA^2}{BA^2}\frac{BE}{CE} = \frac{CA^2}{BA^2}\frac{BA^2}{CA^2} = 1$

$\Rightarrow PE = QE.$

Ví dụ 12. Cho A, B, C thẳng hàng và theo thứ đó. Qua A, C dựng đường tron (O), tiếp tuyến tại A và C với đường tròn (O) cắt nhau tại P, đoạn thẳng PB cắt đường tròn (O) tại Q. Chứng minh rằng phân giác góc AQC luôn đi qua điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi. (IMO Shortlist 2003).

Giải:



Theo *Ví dụ 2* đường tròn (O) đi qua A, C và tiếp tuyến tại A, C cắt nhau tại P, đoạn PB cắt (O) tại Q $\Rightarrow QB$ là đường đối trung của ΔQAC.

Từ tính chất của đường đối trung $\Rightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{QA^2}{QC^2}$

$\Rightarrow \dfrac{QA}{QC} = \sqrt{\dfrac{BA}{BC}}$ (1), đường phân giác $\angle AQC$ cắt AC tại E, theo tính chất của đường phân giác

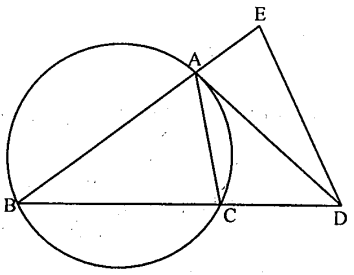
$\Rightarrow \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{QA}{QC}$ (2), từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{EA}{EC} = \sqrt{\dfrac{BA}{BC}}$,

theo giả thiết A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow \dfrac{BA}{BC}$ không đổi

$\Rightarrow E$ là điểm cố định $\Rightarrow$ phân giác góc $\angle AQC$ luôn đi qua điểm E cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A cắt cạnh BC tại D, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt cạnh AB kéo dài tại E. Chứng minh rằng tam giác ADE cân.

Giải:



Tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt cạnh BC kéo dài tại $D \Rightarrow AD$ là đường đối trung ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (1)

AD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle DAC$

$\Rightarrow \Delta BAD$, ΔACD đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{AD}{CD}$ (2)

Đường tròn ngoại tiếp ΔACD cắt cạnh AB tại $E \Rightarrow$ tứ giác $ACDE$ nội tiếp

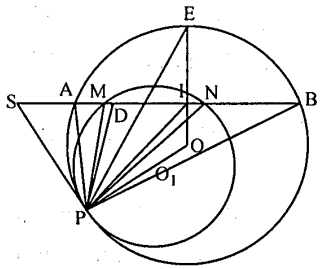
$\Rightarrow \angle BAC = \angle CDE \Rightarrow \Delta ABC$ và ΔDBE đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DE}$ (3), từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AD.DB}{CD.DE}$, kết hợp (1)

$\Rightarrow \frac{DB}{CD} = \frac{AD.DB}{CD.DE} \Rightarrow \frac{DA}{DE} = 1 \Rightarrow DA = DE \Rightarrow \Delta DAE$ cân.

Ví dụ 14. Cho dây AB thuộc đường tròn (O) và hai điểm M, N thay đổi trên đó, đường tròn qua M, N đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng phân giác góc $\widehat{MPN}$ luôn đi qua điểm cố định.

Giải:



Gọi đường tròn (O_1) thay đổi đi qua M, N trên AB và luôn tiếp xúc với (O). Gọi P là điểm tiếp xúc của hai đường tròn, từ P kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AB tại $S \Rightarrow PS$ cũng là tiếp tuyến của (O_1)

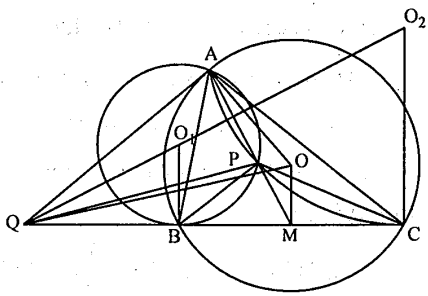
$\Rightarrow PS$ là đường đối trung ngoài của ΔPAB và $\Delta PMN \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{DA}{DB}$, trong đó D và trung điểm I của AB đối xứng qua phân giác $\angle APB$

$\Rightarrow D$, I cố định $\Rightarrow$ đường phân giác luôn đi qua điểm giữa cung AB

$\Rightarrow$ phân giác góc MPN đi qua điểm cố định.

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PAB = \angle PBC$ và $\angle PAC = \angle PCB$, tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt cạnh BC tại Q. Chứng minh rằng $\angle AQP = 2\angle OQB$. (USA TST 2005).

Giải:



Đường tròn tâm O_1 qua A, B tiếp xúc với $BC \Rightarrow \angle PAB = \angle PBC \Rightarrow P$ là giao điểm của hai đường tròn O_1, O_2, đường tròn tâm O_2 xác định tương tự như O_1. O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABP, và O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAPC, O_1O_2 cắt BC tại Q.

$\Rightarrow O_1B = \dfrac{AB}{2\cos\angle O_1BA} = \dfrac{AB}{2\cos(90-B)} = \dfrac{AB}{2\sin B}$, tương tự $O_2C = \dfrac{AC}{2\sin C}$.

Theo cách dựng $O_1B // O_2C \Rightarrow \dfrac{QB}{QC} = \dfrac{O_1B}{O_2C} = \dfrac{AB\sin C}{AC\sin B} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

$\Rightarrow QA$ là đường đối trung ngoài của ΔABC

$\Rightarrow QA$ là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow OA \perp AQ$

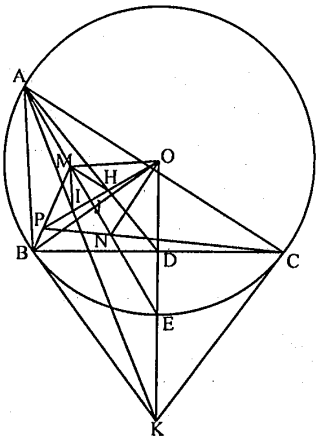
Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow$ tứ giác $QAOM$ nội tiếp đường tròn đường kính OQ.

Kết hợp $\angle APB = 180^0 - \angle BAP - \angle PBA = 180^0 - \angle ABC \Rightarrow A, P, M$ thẳng hàng, O_1O_2 đi qua trung điểm AP và vuông góc với AP

$\Rightarrow \angle AQO_1 = \dfrac{1}{2}\angle AQP = \angle OQB \Rightarrow \angle AQP = 2\angle OQB.$

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại K. Đường trung trực AB, AC cắt đường phân giác góc A tại M, N; đường thẳng BM, và CN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng AK đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác PMN.

Giải:



Với giả thiết đã cho $\Rightarrow AK$ là đường đối trung của ΔABC, KO cắt cung BC (không chứa A) và cạnh BC tại E và D

$\Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung BC và $DB = DC$

$\Rightarrow AE$ là phân giác của góc A, AD là trung tuyến của $\Delta ABC \Rightarrow AD$, AK đối xứng qua AE.

$OM \perp AB$, $ON \perp AC$, AE là phân giác góc A

$\Rightarrow \Delta OMN$ cân $\Rightarrow \Delta PMN$ cân.

Gọi H là trực tâm ΔOMN, I là tâm đường tròn nội tiếp ΔPMN

$\Rightarrow \angle IMN = \dfrac{1}{2}\angle BMN = \dfrac{1}{2}(\angle BAM + \angle ABM) = \dfrac{1}{2}\angle BAC$

$$\angle HMN = 90^0 - \angle ONM = \frac{1}{2}\angle BAC$$

$\Rightarrow I, H$ đối xứng nhau qua AE.

Để A, I, K thẳng hàng ta cần chứng minh A, H, D thẳng hàng.

Gọi J là giao điểm OP và AE, với ΔJOE ta có:

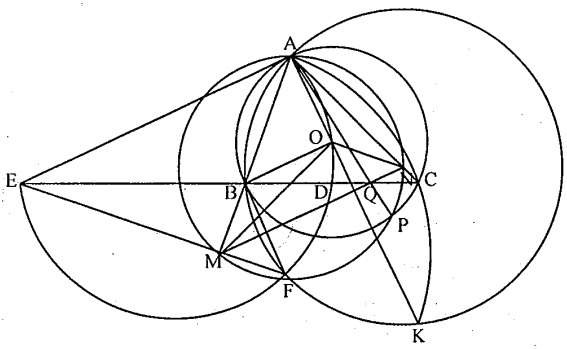
$\frac{AJ}{AE}\frac{DE}{DO}\frac{HO}{HJ} = 1$ (Bạn đọc tự chứng minh) $\Rightarrow$ (đpcm).

Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), hai điểm B, C cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và (O) cắt nhau tại P (khác A). Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại Q.

1) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

2) Gọi D là trung điểm của BC. Các đường tròn có tâm M, N và cùng đi qua A cắt nhau tại K. Đường thẳng qua A vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại F. Chứng minh đường thẳng EF đi qua một điểm cố định. (IMO 2014).

Giải:



1) Bốn điểm B, M, C, N nằm trên một đường tròn $\Rightarrow QB.QC = QM.QN$

$\Rightarrow Q$ nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (AMN)

$\Rightarrow A, P, Q$ thẳng hàng.

2) Theo giả thiết $MA = MC \Rightarrow M$ nằm trên trung trực $AC \Rightarrow MO \perp AC$.

Tương tự $NO \perp AB \Rightarrow O$ là trực tâm của $\Delta AMN \Rightarrow AO \perp MN$ (1)

Mặt khác M, N là tâm hai đường tròn qua A cắt nhau tại $K \Rightarrow MN \perp AK$, kết hợp với (1) $\Rightarrow A$, O,K thẳng hàng $\Rightarrow OA \perp AE$, theo Ví dụ 4 $\Rightarrow O$ thuộc đường tròn $(AED) \Rightarrow EF$ đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O).

Ví dụ 18. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), B và C cố định, A thay đổi. Dựng ra phía ngoài hai hình vuông $ABDE$ và $ACGF$, FA cắt BD tại M, EA cắt CG tại M, đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF cắt đường tròn ngoại tiếp ENG tại P và Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định.

Giải:

Giả sử DE và GF cắt nhau tại $P' \Rightarrow \angle P'DM = \angle P'FM = 90^0$

$\Rightarrow P'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF, tương tự $\angle P'EN = \angle P'GN = 90^0$

$\Rightarrow P'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $ENG \Rightarrow P' \equiv P$.

$\angle EAM = \angle FAN$ (đối đỉnh),

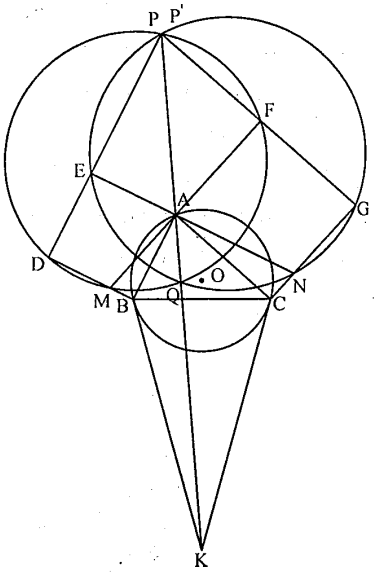
$\Rightarrow \angle EAM + \angle MAB = \angle FAN + \angle NAC = 90^0$

$\Rightarrow \angle MAB = \angle NAC$

$\Rightarrow \Delta ABM$, ΔACN đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM.AC = AN.AB$$

$\Rightarrow AM.AF = AN.AE \Rightarrow A$ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (DMF) và đường tròn $(ENG) \Rightarrow P$, A, Q thẳng hàng.



$ABDE$ là hình vuông $\Rightarrow DE // AB \Rightarrow$ khoảng cách từ P đến AB chính là độ dài cạnh hình vuông $ABDE$.

Tương tự khoảng cách từ P đến AC là độ dài cạnh hình vuông $ACGF$, mặt khác $\frac{EA}{AB} = \frac{FA}{AC}$, theo tính chất $\Rightarrow AP$ là đường đối trung của ΔABC.

$\Rightarrow PQ$ đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C; theo giả thiết B, C cố định $\Rightarrow K$ cố định.

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

1. Cho đường tròn O và hai điểm B, C cố định trên O (BC không là đường kính). Một điểm A thay đổi trên O sao cho tam giác ABC nhọn, E và F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Cho đường tròn (I) thay đổi qua E, F. Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại T. Gọi S là điểm thuộc đường thẳng BC sao cho AS vuông góc với AT. B_1, C_1 nằm trên ST (C_1 nằm giữa B_1 và S) sao cho $B_1T = BT = C_1T$. Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác AB_1C_1.

3. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại hai điểm B và C. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho A khác B và C. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AB, AC với đường tròn (O'). Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường thẳng BN và CM cắt nhau tại P. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại điểm thứ hai Q. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh ba điểm A, Q, K cùng thuộc đường thẳng d và d luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên (O).

4. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Xét đường tròn (Ω) đi qua A, C và không có tâm nằm trên đường thẳng AC. Các tiếp tuyến của tại A và C cắt nhau tại P, đoạn BP cắt (Ω) tại Q. Chứng minh rằng phân giác góc AQC đi qua một điểm cố định.

5. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2), với P là tiếp điểm của (O_1), Q là tiếp điểm của (O_2). Tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn (APQ) cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua đường thẳng PQ. Chứng minh rằng S, A, H thẳng hàng (VN TST 2001).

6. Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm trong tam giác thỏa mãn $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1 \text{ (IMO Shortlist 1988).}$$

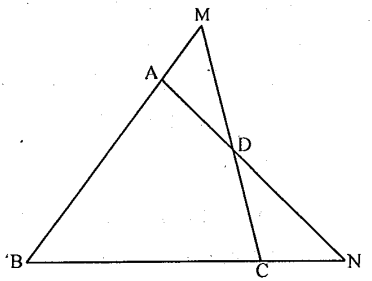
Chương 8

CÁC ĐỊNH LÍ LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC. TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

I. TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

1. Định nghĩa

Cho tứ giác $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD cắt nhau tại M, cạnh AD và cạnh BC cắt nhau tại N, hình gồm tứ giác $ABCD$ và AB cắt CD, AD cắt BC được gọi là *tứ giác toàn phần.*



2. Tính chất

Tính chất 1. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm.

Chứng minh:

Giả sử đường ngoại tiếp ΔMAD và ΔCDN cắt nhau tại E (E khác D).

Tứ giác $DCNE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MDE = \angle CNE$.

Tứ giác $ADEM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MAE = \angle MDE$.

$\Rightarrow \angle MAE = \angle CNE \Rightarrow$ tứ giác $ABNE$ nội tiếp

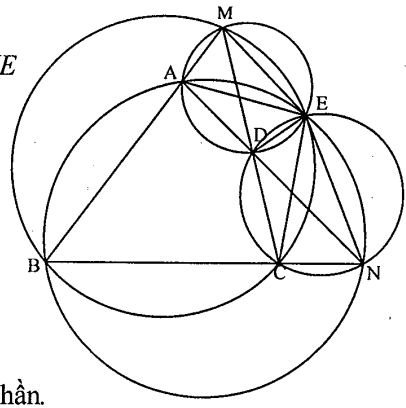
$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABN.

Mặt khác $\angle ECN = \angle EDN$ và $\angle EDN = \angle AME$

$\Rightarrow \angle AME = \angle ECN \Rightarrow$ tứ giác $BMEC$ nội tiếp.

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔBCM

$\Rightarrow$ bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua điểm E.



Điểm E gọi là *điểm Miquel* của tứ giác toàn phần.

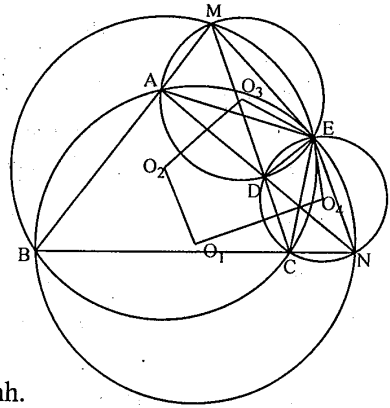
Miquel là nhà toán học Pháp (1840-1926) ít người biết đến ông. Sinh thời ông ông là giáo sư toán, thành viên Viện hàn lâm Luxembourg, ông có định lí mang tên ông được giới thiệu ở phần cuối.

Tính chất 2. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD khi đó O_1, O_2, O_3, O_4 và điểm Miquel cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh:

Áp dụng định lí đảo của định lí đường thẳng Simson để chứng minh (Bạn đọc tự chứng minh).

Đường tròn này có tên *đường tròn Miquel.*

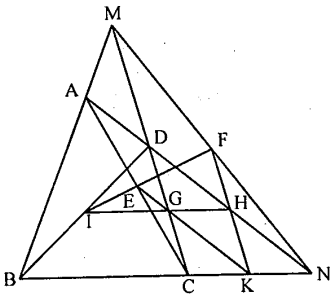


Tính chất 3. Chân các đường vuông góc hạ từ điểm Miquel lên các đường thẳng AB, BC, CD, DA cùng nằm trên một đường thẳng (*Đường thẳng Simson*).

Tính chất 4. Các trực tâm của các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD nằm trên một đường thẳng (*Đường thẳng Steiner của tứ giác*).

Tính chất 3, Tính chất 4 bạn đọc tự chứng minh.

Tính chất 5. Các trung điểm các đoạn thẳng *AC, BD, MN* nằm trên một đường thẳng.



Chứng minh:

Gọi *I, E, F* lần lượt là trung điểm *BD, AC, MN* và *K, G, H* là trung điểm của *CN, CD, DN*

$\Rightarrow$ *F, II, K* thẳng hàng; *I, G, H* thẳng hàng, *E, G, K* thẳng hàng và *FK//MC, IH//BC, EK//DN*

$$\Rightarrow \frac{IG}{IH}=\frac{BC}{BN}, \frac{FH}{FK}=\frac{MD}{MC}, \frac{EK}{EG}=\frac{AN}{AD}$$

Nhân ba đẳng thức ta được: $\frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=\frac{BC}{BN}.\frac{MD}{MC}.\frac{AN}{AD}.$

Áp dụng định lí Menelaus với ΔCDN với ba điểm *B, A, M* ta có:

$$\frac{BC}{BN}.\frac{AN}{AD}.\frac{MD}{MC}=1 \Rightarrow \frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=1$$

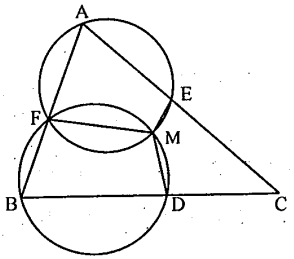
$\Rightarrow$ *I, E, F* thẳng hàng.

Đường thẳng qua *I, E, F* được gọi là *đường thẳng Gauss.*

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) - Nhà toán học Đức, tác phẩm nổi tiếng của ông là "Nghiên cứu số học", trong đó có phương trình đường tròn $x^n - 1 = 0$, ông đã tìm được các giá trị n sao cho n - đa giác đều dựng được bằng thước và compa, đặc biệt $x^{17} - 1 = 0$, trên mộ chí của ông có khắc hình đa giác đều 17 cạnh.

Tính chất 6. Đường thẳng Steiner và đường thẳng Gauss vuông góc với nhau.

Định lí Miquel đối với tam giác: *Trên các cạnh của tam giác lấy ba điểm, khi đó ba đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi bởi đỉnh và hai điểm trện hai cạnh xuất phát từ đỉnh đó giao nhau tại một điểm.*



Chứng minh:

Ba điểm *D, E, F* trên cạnh *BC, CA, AB.* Giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔAEF và ΔBDF cắt nhau tại *M*

$\Rightarrow \angle A + \angle EMF = 180^0$, $\angle B + \angle FMD = 180^0$.

$\Rightarrow \angle A + \angle EMF + \angle B + \angle FMD = 360^0$

$\Rightarrow 180^0 - \angle C + 360^0 - \angle EMD = 360^0$

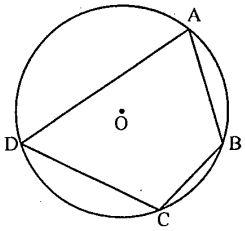
$\Rightarrow \angle C + \angle EMD = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $EMDC$ nội tiếp $\Rightarrow$ ba đường tròn cắt nhau tại M.

Điểm M cũng gọi là *điểm Miquel* trong tam giác.

II. TỨ GIÁC ĐIỀU HOÀ

1. Định nghĩa



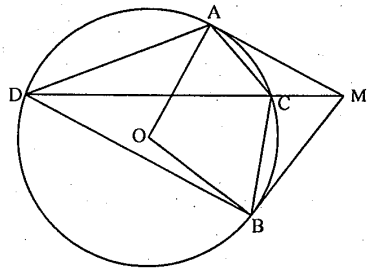
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đồng thời thoả mãn $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ được gọi là *tứ giác điều hoà.*

Ví dụ. Cho đường tròn (O) và điểm M. Từ M kẻ tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD ($MC < MD$) với đường tròn (O). Chứng minh tứ giác $ADBC$ là tứ giác điều hoà.

Giải:

MA, MB là tiếp tuyến với đường tròn (O)

$\Rightarrow \angle ADC = \angle MAC \Rightarrow \Delta MAC$ và ΔMDA đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{DA}$.



Tương tự ΔMBC, ΔMDB đồng dạng

$\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{DB}$, $MA = MB \Rightarrow \frac{AC}{DA} = \frac{BC}{DB}$

$\Rightarrow$ tứ giác $ADBC$ là tứ giác điều hoà.

Nhận xét: Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hoà khi tiếp tuyến tại A và C và đường thẳng BD đồng quy, hoặc tiếp tuyến tại A và C cùng song song với đường thẳng BD.

2. Tính chất

Tính chất 1. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hoà thì $AC.BD = 2AB.CD = 2BC.AD$.

Chứng minh:

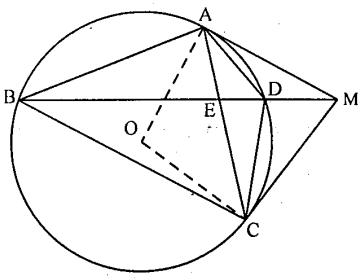
$ABCD$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow AB.CD = CB.AD.$

Mặt khác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, theo định lí Ptolemy ta có:

$AC.BD = AB.CD + BC.AD \Rightarrow AC.BD = 2AB.CD = 2BC.AD.$

Tính chất 2. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hoà nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A và C cắt nhau tại M, AC cắt BD tại E thì $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ED}{EB}$.

Chứng minh:



$$\frac{MD}{MB} = \frac{S_{MCD}}{S_{MCB}} = \frac{CD\sin\angle DCM}{CB\sin\angle BCM}.$$

$$\frac{ED}{EB} = \frac{S_{AED}}{S_{ABE}} = \frac{AD\sin\angle DAE}{AB\sin\angle BAE}.$$

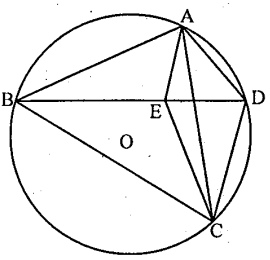
$ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và MA, MC là tiếp tuyến.

$\Rightarrow \sin\angle BCM = \sin\angle BAC = \sin\angle BAE$, $\sin\angle DCM = \sin\angle DAE$.

$ABCD$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ED}{EB}$.

Đặt: (MEDB) = $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ED}{EB}$.

Tính chất 3. Tứ giác điều hoà $ABCD$, đường phân giác các góc $\angle BAD$, $\angle BCD$ và đường thẳng BD đồng quy.



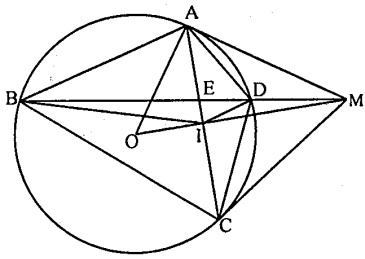
Chứng minh:

Giả sử đường phân giác góc $\angle BAD$ cắt BD tại E, theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{AD}$.

$ABCD$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{CB}{CD}\Rightarrow \dfrac{CB}{CD}=\dfrac{BE}{ED}$

$\Rightarrow CE$ là phân giác của góc $\angle BCD \Rightarrow$ (đpcm).

Tính chất 4. *ABCD* là tứ giác điều hoà, *M* là giao điểm tiếp tuyến tại *A* và *C*, *MO* cắt *AC* tại *I* thì *AI* là phân giác góc $\angle BID$.

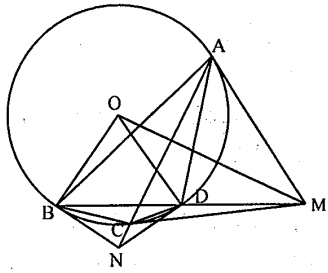


Chứng minh:

AC, *BD* cắt nhau tại $E \Rightarrow \dfrac{EB}{ED}=\dfrac{MB}{MD}$

$\Rightarrow I(MEBD)$ là chùm điều hoà, $IM \perp AC \Rightarrow IA$ là phân giác góc $\angle BID$.

Tính chất 5. Cho tứ giác *ABCD*, tiếp tuyến tại *A* và *C* cắt nhau tại điểm *M* thuộc *BD* thì tiếp tuyến tại *B* và *D* gặp nhau trên *AC*.



Chứng minh:

Với giả thiết đã cho tứ giác *ABCD* là tứ giác điều hoà $\Rightarrow$ (đpcm).

Tính chất 6. *ABCD* là tứ giác điều hoà, *AC*, *BD* cắt nhau tại *E*, khi đó:

$\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{AB^2}{AD^2}$.

Tính chất 7. *ABCD* là tứ giác điều hoà, *M* là trung điểm *AC* thì $\angle ADB = \angle MDC$.

Chứng minh:

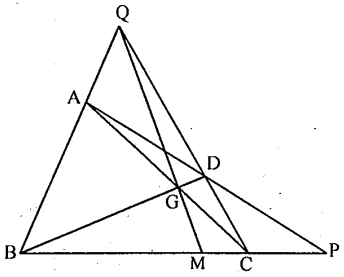
Hai tính chất này cho thấy *ABCD* là tứ giác điều hoà $\Rightarrow$ *AD* là đường đối trung của tam giác *ABC*, do đó bạn đọc tự chứng minh.

Qua đó cho thấy đường đối trung của tam giác và tứ giác điều hoà liên quan mật thiết với nhau.

III. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ giác toàn phần $ABCD$, AB cắt CD tại Q, AD cắt BC tại P, AC cắt BD tại G, QG cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PC}$.

Giải:



Theo định lí Menelaus với ΔQBC, với A, D, P thẳng hàng $\Rightarrow \frac{AQ}{AB}\frac{PB}{PC}\frac{DC}{DQ} = 1$ (1)

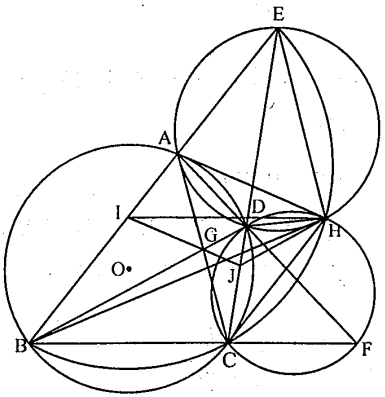
Áp dụng định lí Ceva với ΔQBC, các đường QM, BD, CA đồng quy $\Rightarrow \frac{AQ}{AB}\frac{MB}{MC}\frac{DC}{DQ} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\frac{AQ}{AB}\frac{PB}{PC}\frac{DC}{DQ} = \frac{AQ}{AB}\frac{MB}{MC}\frac{DC}{DQ} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PC}$.

Nhận xét: Đây là một tính chất của tứ giác toàn phần. Bạn đọc hãy viết những đẳng thức tương tự.

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AB, CD cắt nhau tại E, AD, BC cắt nhau tại F, AC, BD cắt nhau tại G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE và tam giác DCF cắt nhau tại H, đường phân giác góc AHB cắt AB tại I, đường phân giác DHC cắt DC tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

Giải:



Theo giả thiết H chính là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD \Rightarrow EHCB$ nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \angle ADH + \angle AEH = 180^0$,

$\angle BCH + \angle AEH = 180^0$

$\Rightarrow \angle ADH = \angle BCH$,

$\angle DAH = \angle DEH = \angle CEH = \angle HBC$

$\Rightarrow \Delta ADH$ và ΔBCH đồng dạng (g.g).

$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{BC} = \frac{DH}{CH}$ (1)

ΔAGD, ΔBGC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{AG}{BG} = \frac{AD}{BC}$ (2)

Giả thiết HI là phân giác $\angle AHB$, HJ là phân giác $\angle DHC$

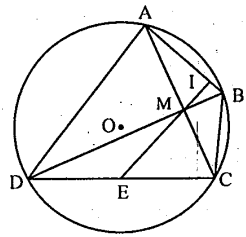
$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AI}{BI}, \frac{DH}{CH} = \frac{DJ}{CJ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AG}{BG} = \frac{AI}{BI} = \frac{DJ}{CJ} \Rightarrow GI$ là phân giác $\angle AGB$, GJ là phân giác góc $\angle DGC$, mặt khác $\angle AGB = \angle DGC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow I, G, J$ thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M. Khi đó đoạn thẳng nối trung điểm một cạnh với M vuông góc cạnh đối diện và ngược lại. (*Định lí Brahmagupta*).

Brahmagupta là nhà toán học, nhà thiên văn học người Ấn độ (598-660). Tác phẩm chính của ông phần lớn nghiên cứu đại số và số học, trong đó có phép giải phương trình bậc hai có nghiệm thực.

Giải:



Giả sử MI là đường cao ΔAMB, MI cắt CD tại E;

Theo giả thiết $AC \perp BD \Rightarrow \angle ABM = \angle AMI$

$\angle AMI = \angle CME$ (đđ), mặt khác $ABCD$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle ABM = \angle ABD = \angle ACD$

$\Rightarrow \angle EMC = \angle MCD \Rightarrow \Delta EMC$ cân $\Rightarrow EC = EM \Rightarrow EM = ED \Rightarrow ED = EC$.

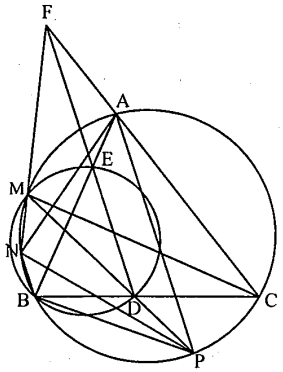
Ngược lại $ED = EC$, EM cắt AB tại $I \Rightarrow \angle BMI = \angle DME = \angle MDE = \angle MAI$

$\Rightarrow \angle AMI + \angle MAI = 90^0 \Rightarrow MI \perp AB$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là điểm tùy ý trên BC, đường thẳng qua D cắt AB tại E và AC kéo dài tại F. Đường tròn qua B, D, E cắt đường tròn (O) tại M, đường thẳng MF, MD cắt đường tròn (O) tại N và P.

Chứng minh rằng $PN = AB$.

Giải:



Đường tròn qua *B, D, E* và đường tròn qua *A, B, C* cắt nhau tại *M,* theo tính chất của tứ giác toàn phần *AEDC* ⇒ điểm *M* là điểm Miquel ⇒ đường tròn qua *C, D, F* sẽ qua *M* ⇒ tứ giác *CDMF* nội tiếp ⇒ $\angle FMC = \angle FDC$ (chắn cung *FC*).

Do *M, N, B, C* thuộc đường tròn (O)

⇒ $\angle FMC = \angle NBC$

⇒ $\angle FDC = \angle NBC$ ⇒ *BN//FD.*

CDMF nội tiếp ⇒ $\angle DMC = \angle DFC$ (chắn cung *DC*).

Mặt khác $\angle DMC = \angle PMC = \angle PAC$ ⇒ $\angle PAC = \angle DFC$

⇒ *AP//FD* ⇒ *AP//BN*

⇒ tứ giác *BNAP* là hình thang cân (tứ giác nội tiếp đường tròn)

⇒ hai đường chéo bằng nhau ⇒ *PN = AB.*

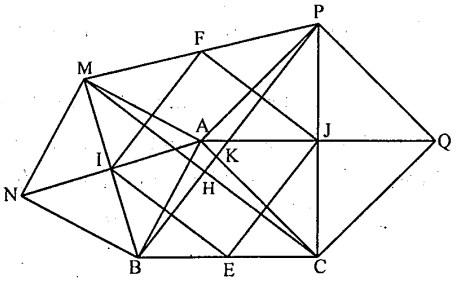
Ví dụ 5. Cho tứ giác *ABCD,* dựng ra phía ngoài các hình vuông *ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL* với các tâm tương ứng là *M, N, P, Q* khi đó *MP* và *PQ* vuông góc với nhau và bằng nhau.(Định lí Van Aubel).

H. van Aubel là người đã công bố bài toán này năm 1878.

Giải:

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ:

Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các hình vuông AMNB và APQC, gọi I, J là tâm của hai hình vuông đó và E là trung điểm BC, F là trung điểm MP. Chứng minh tam giác IEJ là tam giác vuông cân, từ đó suy ra tứ giác EIFJ là hình vuông.



Chứng minh:

Xét hai tam giác ΔAMC và ΔAPB:

$AM = AB$, $AP = AC$ (cạnh hình vuông)

$\angle MAC = 90^0 + \angle BAC = \angle PAB.$

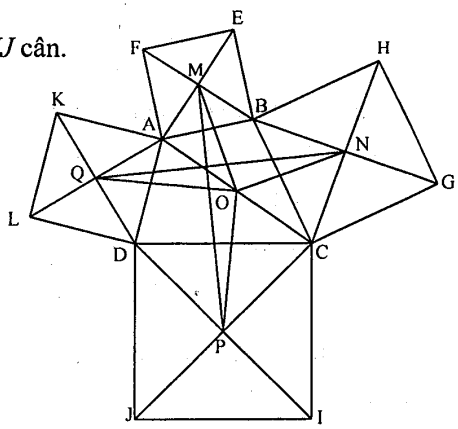
$\Rightarrow \Delta AMC$ và ΔABP bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow MC = BP$ và $\angle ACM = \angle APB$.

Theo giả thiết $FM = FP$, $IM = IB$

$\Rightarrow IF$ là đường trung bình của $\Delta MBP \Rightarrow IF // BP$, $IF = \frac{1}{2}BP$.

Tương tự $FJ = \frac{1}{2}CM \Rightarrow IF = JF \Rightarrow \Delta FIJ$ cân.



Gọi H là giao điểm MC và PB, K là giao điểm PB với AC.

Tam giác APK và HCK có:

$\angle MCA = \angle APB$, $\angle AKP = \angle HKC$ (đđ)

$\Rightarrow \angle CHK = \angle PAK \Rightarrow \angle IFJ = 90^0$

$\Rightarrow \Delta FIJ$ vuông cân.

Trở lại bài toán:

Gọi trung điểm AC là O;

Theo chứng minh trên ta có $OM \perp ON$, $OM = ON$ và $OP \perp OQ$, $OP = OQ$

$\Rightarrow \Delta OMP$ và ΔONQ bằng nhau $\Rightarrow MP = QN$ và $MP \perp QN$

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) và dây AD, gọi I là điểm đối xứng của A qua D, kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O), từ A dựng tiếp tuyến với (O) cắt IB tại C, CD cắt đường (O) tại E. Chứng minh rằng EB song song với AD.

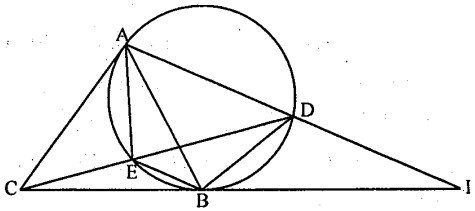
Giải:

Với giả thiết $\Rightarrow CA$, CB là tiếp tuyến

$\Rightarrow$ tứ giác $AEBD$ là tứ giác điều hoà

$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB}$, mặt khác $AD = DI$

$\Rightarrow \frac{DI}{DB} = \frac{EA}{EB}$, $ADBE$ nội tiếp

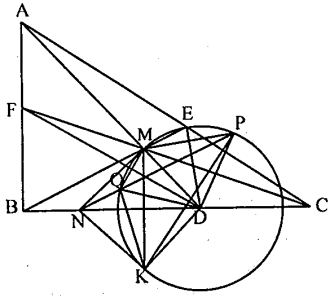


$\Rightarrow \angle BDI = \angle BEA \Rightarrow \Delta BDI$, ΔBEA đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow \angle CBE = \angle EAB = \angle BID \Rightarrow BE // AD$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác sao cho AM, BM, CM cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. N là điểm trên BC sao cho AM vuông góc với MN; gọi P và Q là điểm đối xứng của M qua DE và DF.

Chứng minh rằng P, Q, N thẳng hàng.



Giải:

Theo giả thiết P và Q đối xứng với M qua DE và $DF \Rightarrow DP = DM = DQ \Rightarrow Q$, M, P nằm trên đường tròn tâm D bán kính DM.

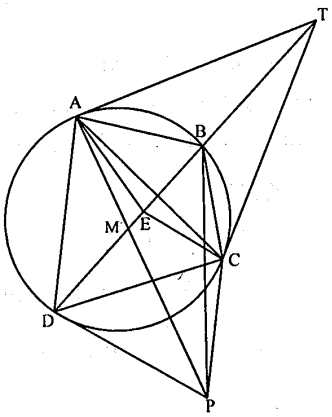
Mặt khác $AM \perp MN \Rightarrow NM$ là tiếp tuyến của đường tròn (D).

Gọi K là điểm đối xứng của M qua $BC \Rightarrow K$ thuộc đường tròn $(D) \Rightarrow NK$ là tiếp tuyến của $(D) \Rightarrow MQKP$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow N$, P, Q thẳng hàng.

Ví dụ 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, đường phân giác góc $\angle BAD$, $\angle BCD$ gặp nhau trên đường chéo BD. Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường thẳng đi qua A và trung điểm BD tại P. Chứng minh rằng tam giác PCD là tam giác cân. (Moldova 2014).

Giải:

Theo giả thiết đường phân giác các góc $\angle BAD$, $\angle BCD$ cắt nhau trên BD, gọi E là giao điểm hai đường phân giác đó trên BD, theo tính chất của đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{CB}{CD}$.



$\Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa, theo định nghĩa tứ giác điều hòa $\Rightarrow$ tiếp tuyến tại A và C cắt nhau trên BD, gọi giao điểm của hai tiếp tuyến là T, giả sử M là trung điểm BD, từ đó suy ra AC là đường đối trung của giác ABD.

Kết hợp $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CDT = \angle CDB = \angle CAB = \angle MAD$.

$CP // AD \Rightarrow \angle DAP = \angle APC$, $\angle PCD = \angle ADC$.

TC là tiếp tuyến $\Rightarrow \angle ACT = \angle ADC$ (cùng chắn cung AC).

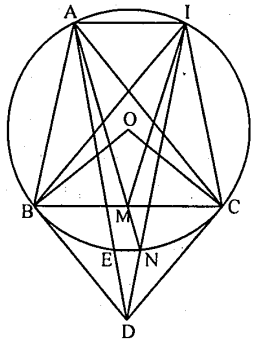
$\Rightarrow \angle ACT = \angle PCD = \angle DCP \Rightarrow \angle DCT = \angle PCA$

$\Rightarrow \Delta DCT$ và ΔPCA đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CT}{CA} = \dfrac{CD}{CP}$

$\Rightarrow \Delta TAC$ và ΔDCP đồng dạng (c.g.c).

ΔTAC là tam giác cân $\Rightarrow \Delta DCP$ là tam giác cân.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), A cố định B, C thay đổi và BC song song với đường thẳng cho trước. Tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng DN luôn đi qua điểm cố định.



Giải:

Tiếp tuyến tại B, C với đường tròn $(O) \Rightarrow AD$ là đường đối trung của ΔABC.

$MB = MC \Rightarrow \angle BAD = \angle CAM$.

Đường thẳng DN cắt đường tròn (O) tại $I \Rightarrow ID$ là đường đối trung của $\Delta BIC \Rightarrow \angle NIC = \angle MIB$, nhưng $\angle NIC = \angle CAN \Rightarrow \angle NIC = \angle DAB$.

Gọi AD cắt BC đường tròn (O) tại $E \Rightarrow EN // BC$

$\Rightarrow AI // BC$, BC song song với đường thẳng cho trước, A cố định $\Rightarrow I$ cố định.

Ngoài ra, ta còn cách dùng tính chất: Tứ giác $ABEC$, $ANCI$ là tứ giác điều hoà từ đó suy ra I cố định.

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, AC và BD cắt nhau tại E, AB và CD cắt nhau tại F. Gọi I, J là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác EIJ.

Giải:

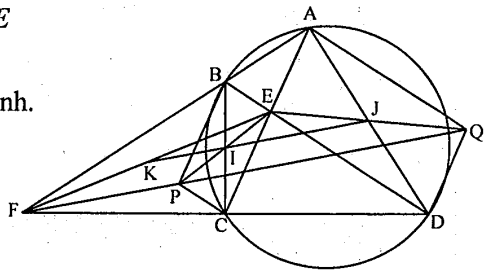
Kéo dài EI lấy điểm P sao cho $IP = IE$

$\Rightarrow BECP$ là hình bình hành.

Tương tự dựng $AEDQ$ là hình bình hành.

Xét tứ giác toàn phần $BFCE$, gọi K là trung điểm $EF \Rightarrow K$, I, J thẳng hàng (Đường thẳng Gauss)

$\Rightarrow F$, P, Q thẳng hàng.



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \Delta FBC$ và ΔFDA đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{FB}{FD}=\dfrac{BC}{DA}$;

ΔBEC, ΔAED đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{BC}{BE}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AD}{DQ}$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{AD}=\dfrac{BE}{DQ}\Rightarrow \dfrac{FB}{FD}=\dfrac{BE}{DQ}$;

$\angle FBE=\angle FDQ \Rightarrow \Delta BFE$ và ΔDFQ đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \angle BEF=\angle DQF$.

Mặt khác $\angle BEP=\angle DQE \Rightarrow \angle FEP=\angle EQF=\angle EJK$.

$\Rightarrow KE$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔEIJ.

Ví dụ 11. Cho đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, một tiếp tuyến chung PQ (P thuộc O_1 và Q thuộc O_2). Tiếp tuyến tại P và Q với đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt nhau tại E, gọi D là điểm đối xứng với B qua PQ. Chứng minh rằng A, D, E thẳng hàng. (STS 2001).

Giải:

PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) và (O_2)

$\Rightarrow \angle PAB=\angle BPQ, \angle QAB=\angle BQP \Rightarrow \angle BPQ+\angle BQP=\angle PAQ$.

Theo giả thiết D đối xứng với B qua PQ

$\Rightarrow \angle PDQ=\angle PBQ=180^0-\angle BPQ-\angle BQP=180^0-\angle PAQ$

$\Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp.

AB cắt PQ tại $M \Rightarrow MP=MQ$

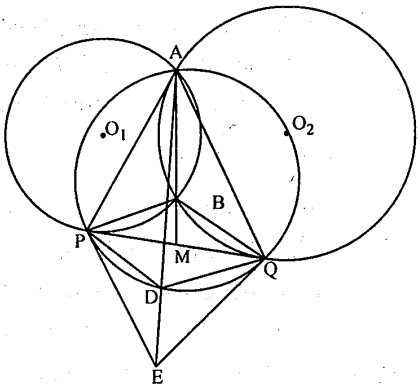
$\Rightarrow \Delta PBM$ và ΔAPM đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BP}{AP}=\dfrac{MB}{MP}$.

Tương tự $\dfrac{BQ}{AQ}=\dfrac{MB}{MQ}\Rightarrow \dfrac{BP}{BQ}=\dfrac{AP}{AQ}$.

Theo giả thiết $PB=PD$, $BQ=DQ$

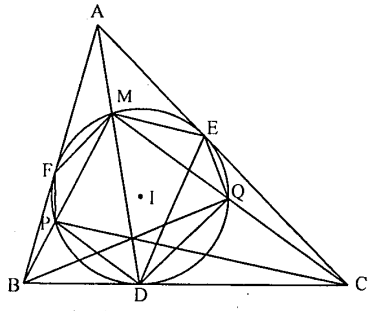
$\Rightarrow \dfrac{DP}{DQ}=\dfrac{AP}{AQ}\Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow E$, D, A thẳng hàng.



Ví dụ 12. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là M, BM, CM cắt đường tròn (I) tại P và Q. Chứng minh rằng AD, BQ, CP đồng quy.

Giải:

BC, AC tiếp xúc với đường tròn (I) tại $D, E \Rightarrow$ tứ giác $MEQD$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow ME.DQ = DM.EQ$.



$MEQD$ nội tiếp $\Rightarrow MQ.DE = ME.DQ + MD.EQ$

$$\Rightarrow MQ.DE = 2ME.DQ \Rightarrow \frac{MQ}{QC} = \frac{2ME.DQ}{DE.QC}.$$

Tương tự $MFPD$ là tứ giác điều hoà

$$\Rightarrow \frac{BP}{PM} = \frac{BP.DF}{2MF.PD}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{DB}\frac{MQ}{QC}\frac{BP}{PM} = \frac{DC}{DB}.\frac{2ME.DQ}{DE.QC}\frac{BP.DF}{2MF.PD} \quad (1)$$

Tứ giác $MEDF$ cũng là tứ giác điều hoà $\Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{DE}{DF}$ (2)

ΔCDQ và ΔCMD đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{CQ}{DQ} = \frac{CD}{DM}$, tương tự $\frac{BP}{BD} = \frac{DP}{DM}$ (3)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{DC}{DB}\frac{MQ}{QC}\frac{BP}{PM} = \frac{DC}{DB}.\frac{DQ}{DP}\frac{BP}{CQ}$, kết hợp (3) $\Rightarrow \frac{DC}{DB}\frac{MQ}{QC}\frac{BP}{PM} = 1$.

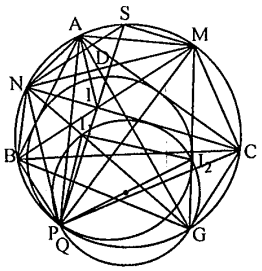
Theo định lí Ceva $\Rightarrow MD, BQ, CP$ đồng quy.

Ví dụ 13. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác góc $\angle B, \angle C$ cắt đường tròn (O) tại M và N. G là điểm trên cung nhỏ BC, I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABG và ACG, gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác GI_1I_2, D là trung điểm MN. Chứng minh rằng P, I, D thẳng hàng.

Giải:

Theo giả thiết I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp ΔABG và ΔACG và M, N là giao điểm của phân giác góc $\angle AGC, \angle AGB$ với đường tròn (O),

$\Rightarrow MA = MC = MI_2$ và $NA = NB = NI_1$ (1)



Xét ΔPMI_2, ΔPNI_1 có:

$\angle PNI_1 = \angle PNG = \angle PMG = \angle PMI_2$

$\angle PI_2G = \angle PI_1G \Rightarrow \angle MI_2P = \angle NI_1P$

$\Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{MI_2}{NI_1} = \dfrac{MA}{NA} \Rightarrow$ tứ giác $AMPN$ là tứ giác điều hoà.

Gọi Q là tiếp điểm của đường tròn tiếp xúc với (O) đồng thời tiếp xúc với cạnh AB, $AC \Rightarrow \Delta NBQ$ và ΔMIQ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{QN}{NB} = \dfrac{QM}{MI}$.

Mặt khác $NB = NI = NA$, $MI = MA = MC \Rightarrow \dfrac{QM}{QN} = \dfrac{AM}{AN}$

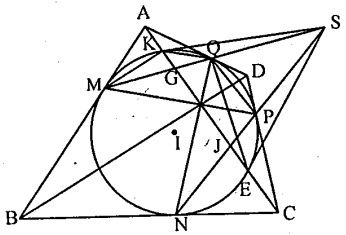
$\Rightarrow$ tứ giác $AMQN$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow P \equiv Q$

$\Rightarrow PI$ đi qua điểm chính giữa S của cung $BAC \Rightarrow SM//NI$ và $SN//MI$

$\Rightarrow$ tứ giác $SMIN$ là hình bình hành, $DM = DN \Rightarrow S, D, I$ thẳng hàng

$\Rightarrow P, I, D$ thẳng hàng.

Ví dụ 14. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), gọi M, N, P, Q là tiếp điểm của (I) với cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy.



Giải:

TH1: AC, BD đi qua $I \Rightarrow AC, BD, MP, NQ$ đồng quy.

TH2: AC, BD không qua I: Gọi K, E là giao điểm AC với (I)

$\Rightarrow KE$ không qua I, tiếp tuyến tại K và E cắt nhau tại $S \Rightarrow MKQE$ là tứ giác điều hoà $\Rightarrow MQ, NP$ đi qua S.

Gọi G, J là giao điểm MS, NP với $AC \Rightarrow \dfrac{GM}{GQ} = \dfrac{SM}{SQ}$.

$\frac{JN}{JP} = \frac{SN}{SP} \Rightarrow GE, MP, NQ$ đồng quy (bạn đọc tự chứng minh).

$\Rightarrow AC, MP, NQ$ đồng quy, tương tự BD, MP, NQ đồng quy

$\Rightarrow AC, BD, MP, NQ$ đồng quy.

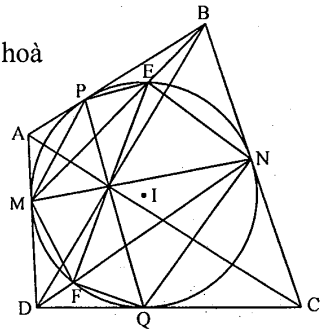
Ví dụ 15. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), gọi M, N là tiếp điểm của (I) với cạnh AD, BC, đường thẳng BM, DN cắt (I) tại E và F. Chứng minh rằng EF, MN, BD đồng quy.

Giải:

Gọi P, Q là tiếp điểm của (I) với cạnh AB, CD.

Theo ví dụ trên $\Rightarrow AC, BD, MN, PQ$ đồng quy.

Mặt khác các tứ giác $MPEN, NQFM$ là tứ giác điều hoà



$$\Rightarrow \frac{MP}{EP} = \frac{MN}{EN}, \frac{QF}{QN} = \frac{MF}{MN}$$

$$\Rightarrow \frac{MP.EN.QF}{PE.NQ.FM} = \frac{MP}{EP}\frac{QF}{QN}\frac{EN}{FM}$$

$$= \frac{MN}{EN}\frac{MF}{MN}\frac{EN}{FM} = 1$$

Do MN, PQ, EF đồng quy $\Rightarrow EF, MN, BD$ đồng quy.

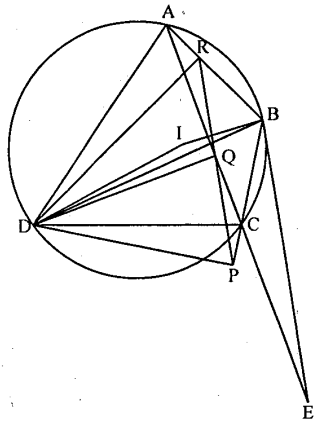
Ví dụ 16. Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R là chân các đường vuông góc hạ từ D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác các góc ABC, ADC cắt nhau trên AC. (IMO 2003).

Giải:

Bài này đã giải áp dụng định lí đường thẳng Simson, ở đây giới thiệu một cách áp dụng tứ giác điều hoà.

Theo giả thiết $\Rightarrow P, Q, R$ nằm trên đường thẳng Simson.

Từ B kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AC tại E, đường phân giác $\angle ABC, \angle ADC$ cắt nhau tại I.



Vậy $PQ = QR$ khi và chỉ khi I thuộc AC.

Điều này $\Leftrightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hoà.

$ABCD$ là tứ giác điều hoà $\Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$, do tính chất chùm điều hoà $\Rightarrow ABCD$ điều hoà $\Leftrightarrow \frac{AE}{AQ} = \frac{CE}{CQ}$.

ΔDAR và ΔDCP là hai tam giác vuông và $\angle DAB = \angle DCP \Rightarrow$ hai tam giác đồng dạng $\Rightarrow \frac{AR}{CP} = \frac{DA}{DC}$.

$$\frac{AE}{AQ} = \frac{CE}{CQ} \Leftrightarrow \frac{AB}{AR} = \frac{CB}{CP} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AR}{CP} \Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}.$$

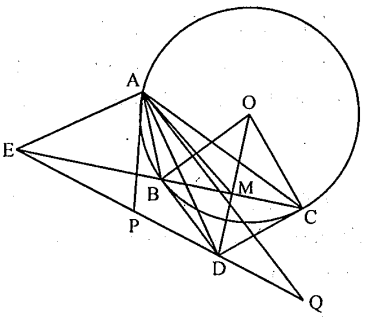
Ví dụ 17. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt BC tại E,trên DE lấy P và Q sao cho $DP = DQ = DB$. Chứng minh tam giác ABC và tam giác APQ đồng dạng.

Giải:

Theo giả thiết $\angle CBD = \angle CAB \Rightarrow \angle DBA = \angle CBD + \angle ABC = \angle CAB + \angle ABC$

$= 180^0 - \angle BCA$.

Gọi M là giao điểm BC và $OD \Rightarrow AD$ là đường đối trung $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAM$.



Áp dụng định lí hàm số sin cho ΔBAD, ΔCAM ta có:

$$\frac{DB}{DA} = \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DBA} = \frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle BCA} = \frac{MC}{MA}.$$

$DB = DC$, $OB = OC \Rightarrow \angle DME = \angle DAE = 90^0$

$\Rightarrow E, M, A, D$ nằm trên đường tròn

$\Rightarrow \angle AMC = \angle ADQ \Rightarrow \Delta MAC$ và ΔDAQ đồng dạng $\Rightarrow \frac{BC}{PQ} = \frac{MC}{DQ} = \frac{AC}{AQ}$,

$\angle ACB = \angle AQP \Rightarrow \Delta ABC$ và ΔAPQ đồng dạng.

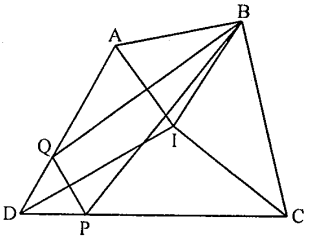
Ví dụ 18. Tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi

$AB + CD = BC + DA$.

(Có sách gọi tính chất này là *Định lí Pittot* vì ông là người đưa ra cách chứng minh đầu tiên).

Henri Pittot là kĩ sư người Pháp, nhiều định lí hình học mang tên ông, định lí này ông công bố năm 1725, sau đó nhà toán học Thụy Sĩ Jakob Steiner năm 1846 cũng đã chứng minh.

Giải:



Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường đường tròn (I), các tiếp điểm thứ tự với các cạnh AB, BC, CD, DA là M, N, P, $Q \Rightarrow AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$.

Cộng các vế lại ta có $AB + CD = BC + DA$.

Ngược lại $AB + CD = BC + DA$.

Giả sử $AB \le AD$, do $AB + CD = BC + DA \Rightarrow BC \le DC$.

Khi đó tồn tại Q, P trên AD và DC sao cho $AB = AQ$ và $CB = CP \Rightarrow DP = DQ$

$\Rightarrow$ các tam giác ABQ, CBP và DPQ là những tam giác cân

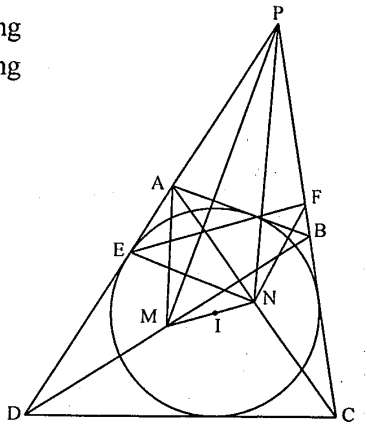
$\Rightarrow$ các đường cao từ ba đỉnh A, C, D là ba đường trung trực của tam giác BPQ.

$\Rightarrow$ các đường ấy đồng quy tại $I \Rightarrow I$ cách đều các cạnh của tứ giác $ABCD$

$\Rightarrow$ tồn tại đường tròn tâm I tiếp xúc với các cạnh tứ giác.

Ví dụ 19. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), gọi M, N là trung điểm BD và AC. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng (*Định lí Newton*).

Giải:



Kéo dài AD và BC cắt nhau tại P, trên PD lấy E sao cho $PE = AD$, trên PC lấy điểm F sao cho $PF = BC$.

M, N là trung điểm BD và AC, ta có:

$$S_{MAD} + S_{MBC} = S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD};$$

$S_{NAD} + S_{NBC} = S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$;

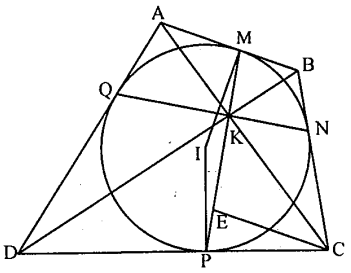
Với cách xác định E và $F \Rightarrow S_{MPE} + S_{MPF} = S_{NPE} + S_{NPF}$

$\Rightarrow S_{MEPF} = S_{NEPF}$, $S_{MEF} = S_{NEF} \Rightarrow MN // EF \Rightarrow M, I, N$ thẳng hàng.

Isaac Newton (1643-1727) - Nhà vật lí học và toán học người Anh, ông khám phá ra định luật nổi tiếng - Định luật vạn vật hấp dẫn.

Ví dụ 20. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Giải:



Theo giả thiết $IM \perp AB$, $IP \perp CD$ và $IM = IP$

$\Rightarrow \Delta IMP$ là tam giác cân $\Rightarrow \angle IMP = \angle IPM$

$\Rightarrow \angle BMP = \angle CPM$.

Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt MP tại $E \Rightarrow \angle CEP = \angle BMP = \angle CPM$

$\Rightarrow \Delta CPE$ là tam giác cân $\Rightarrow CP = CE$.

Giả sử AC cắt MP tại K, theo định lí Thales $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AM}{CE} = \frac{AM}{CP}$ (1)

Gọi H là giao điểm của AC với NQ chứng minh tương tự $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AQ}{CN}$ (2),

mặt khác $AM = AQ$, $CP = CN$ từ (1) và (2)

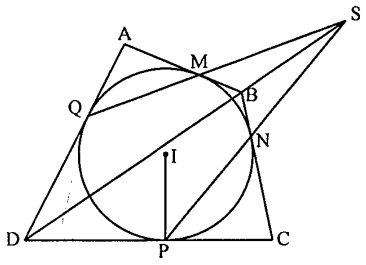
$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AH}{HC}$, K và H nằm trên $AC \Rightarrow K \equiv H$.

Hoàn toàn tương tự BD, MP, NQ đồng quy $\Rightarrow AC, BD, MP, NQ$ đồng quy.

Ví dụ 21. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng BD, MQ, NP đồng quy.

Giải:

Gọi S là giao điểm của MQ và BD, áp dụng định lí Menelaus với ΔABD và cát tuyến Q, M, S ta được: $\frac{MA}{MB}\frac{SB}{SD}\frac{QD}{QA}=1$ (1)



Mặt khác $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{MA}{MB}\frac{SB}{SD}\frac{QD}{QA}=\frac{SB.DP}{BN.SD}=1$

$\Rightarrow \frac{SB.DP.NC}{BN.SD.PC}=\frac{SB}{SD}\frac{PD}{PC}\frac{NC}{NB}=1.$

Theo định lí Menelaus đảo $\Rightarrow$ P, N, S thẳng hàng

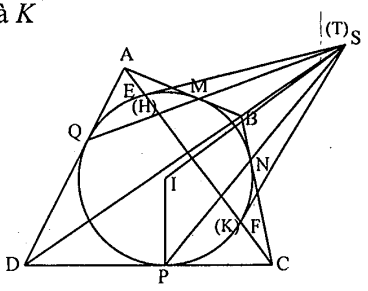
$\Rightarrow$ BD, MQ, NP đồng quy.

Ví dụ 22. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm với các cạnh AB, BC, CD, DA. MQ và NP cắt nhau tại S, từ S kẻ tiếp tuyến SE, SF với đường tròn (I). Chứng minh rằng A, E, F, C thẳng hàng và SI vuông góc với AC.

Giải:

Gọi giao điểm của đường tròn (I) với AC là H và K

Tiếp tuyến tại H, K với (I) cắt nhau tại T, BM là tiếp tuyến và MQ là cát tuyến của (I), do tính chất tứ giác điều hoà $\Rightarrow S \equiv T$



$\Rightarrow E \equiv H$ và $F \equiv K$

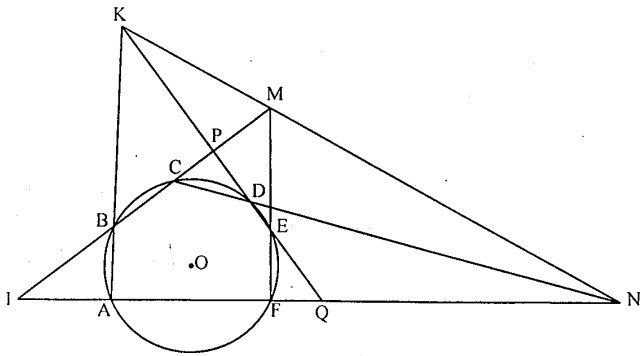
$\Rightarrow A, E, F, C$ thẳng hàng.

SE, SF là tiếp tuyến với đường tròn (I)

$\Rightarrow SI \perp EF$, do A, E, F, C thẳng hàng $\Rightarrow SI \perp AC$.

Ví dụ 23. Cho sáu điểm bất kỳ A, B, C, D, E, F nằm trên một đường tròn. Gọi K, M, N theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng (AB, DE), (BC, EF), (CD, FA). Khi đó ba điểm K, M, N thẳng hàng. (*Định lí Pascal*).

Giải:



Giả sử DE cắt BC tại P cắt AF tại Q, BC cắt AF tại I

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔIPQ cát tuyến ABK ta được:

$$\frac{KP}{KQ}\frac{AQ}{AI}\frac{BI}{BP}=1 \Rightarrow \frac{KP}{KQ}=\frac{AI}{AQ}\frac{BP}{BI}(1)$$

ΔIPQ với cát tuyến CDN: $\frac{NQ}{NI}\frac{CI}{CP}\frac{DP}{DQ}=1 \Rightarrow \frac{NQ}{NI}=\frac{CP}{CI}\frac{DQ}{DP}$ (2)

ΔIPQ với cát tuyến EFM: $\frac{MP}{MI}\frac{FI}{FQ}\frac{EQ}{EP}=1 \Rightarrow \frac{MI}{MP}=\frac{FI}{FQ}\frac{EQ}{EP}$ (3)

Áp dụng hệ thức trong đường tròn:

$IA.IF = IB.IC$, $PC.PB = PD.PE$ và $QF.QA = QE.QD$ (4)

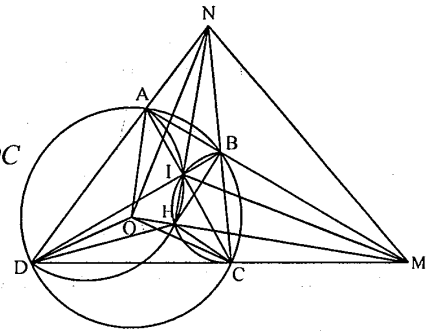
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \frac{KP}{KQ}\frac{NQ}{NI}\frac{MI}{MP}=\frac{AI}{AQ}\frac{BP}{BI}\frac{CP}{CI}\frac{DQ}{DP}\frac{FI}{FQ}\frac{EQ}{EP}$

$\Rightarrow \frac{KP}{KQ}\frac{NQ}{NI}\frac{MI}{MP}=1$, theo định lí đảo Menelaus $\Rightarrow$ *K, M, N* thẳng hàng.

Chú ý: Định lí Pascal không chỉ đúng với 6 điểm trên đường tròn mà còn đúng cho cả đường conic.

Pascal (1623-1662) - Nhà triết học, nhà văn, nhà toán học. Ông sớm thể hiện khả năng toán học xuất chúng như một thiên tài thời niên thiếu. Cuốn chuyên luận đầu tiên của Pascal "Thử nghiệm về các thiết diện conic", ông nghiên cứu rộng với các môn số học, hình học, xác suất, mọi người nhớ đến ông qua tam giác Pascal.

Ví dụ 24. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AB và CD cắt nhau tại M, BC và DA cắt nhau tại N, AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MIN. (*Định lí Brocard*).



Giải:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow \angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC$ và $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DOC$

$\Rightarrow \angle DAC + \angle DBC = \angle DOC$.

Gọi H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔAID và ΔBIC

$\Rightarrow \angle DHI = 180^0 - \angle DAI = 180^0 - \angle DAC$

Tương tự $\angle CHI = 180^0 - \angle DBC \Rightarrow \angle DHC = 360^0 - \angle DHI - \angle CHI = \angle DOC$

$\Rightarrow$ tứ giác $DOHC$ là tứ giác nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự, tứ giác $AOHB$ nội tiếp.

Theo hệ thức trong đường tròn $\Rightarrow NA.ND = NB.NC$ và $MB.MA = MC.MD$

$\Rightarrow N$ nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ($AIHD$) và ($BIHC$)

$\Rightarrow N, H, I$ thẳng hàng. Tứ giác $DOHC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle OHD = \angle OCD$,

$AIHD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle IHD = 180^0 - \angle DAI = \angle ADC + \angle ACD$

$\Rightarrow \angle IHO = \angle IHD - \angle OHD = \angle ADC + \angle ACD - \angle OCD = \angle ADC + \angle OCA = 90^0$

$\Rightarrow NH \perp OM$.

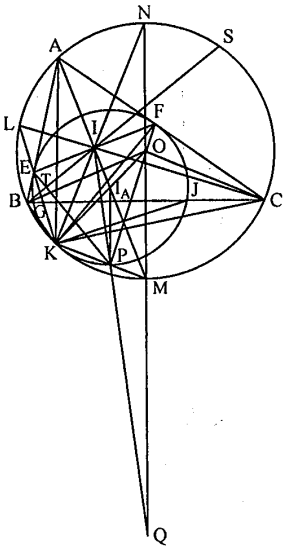
Tương tự $MI \perp NO \Rightarrow O$ là trực tâm của tam giác MIN.

Ví dụ 25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó B và C cố định, A thay đổi trên cung lớn BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn tâm I_A tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt tại E và F, tiếp xúc với đường tròn (O) tại K. Đường thẳng qua E và vuông góc với IB, cắt đường thẳng qua F vuông góc với IC cắt nhau tại P. Chứng minh rằng IP luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Giải:

Trước hết theo bổ đề Sawayama-Thebault ta dựng đường tròn (I_A), và có kết quả E, I, F thẳng hàng, $IE = IF$, CI cắt đường tròn (O) tại $L \Rightarrow K, E, L$ thẳng hàng, tương tự K, F, S thẳng hàng.

Gọi M là giao điểm của AI với (O) $\Rightarrow$ M là điểm chính giữa cung BC, MO cắt (O) tại $N \Rightarrow$ N là điểm chính giữa cung lớn BC, ta có:



$$\angle EFK = \angle BEK = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BK} + \overset{\frown}{AL}) = \angle LCK = \angle ICK$$

$\Rightarrow$ tứ giác $KIFC$ nội tiếp, tương tự $KIEB$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $\angle IKC = \angle AFE$ và $\angle BKI = \angle AEF$

$\Rightarrow$ $\angle BKI = \angle IKC \Rightarrow KI$ là phân giác góc BKC

$\Rightarrow$ KI cắt cung BAC tại điểm chính giữa

$\Rightarrow$ K, I, N thẳng hàng.

$$\angle EKF = \angle EKA + \angle AKF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$$

Giả thiết $PE \perp BI$, $PF \perp CI \Rightarrow \angle EPF = 180^0 - \angle BIC = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$

$\Rightarrow$ E, K, P, F nằm trên một đường tròn $\Rightarrow$ P nằm trên đường tròn (I_A).

Mặt khác $\angle BIK = \angle BEK = \angle EFK = \angle EPK$

$\Rightarrow$ T, I, P, K nằm trên một đường tròn (T là giao điểm BI và EP), $BI \perp EP \Rightarrow IP$ là đường kính.

$\Rightarrow$ $IK \perp KP$ (1), NM là đường kính của (O) $\Rightarrow$ $KM \perp IK$, kết hợp (1) $\Rightarrow$ K, P, M thẳng hàng.

ΔBEI và ΔIFC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{BE}{IF} = \frac{BI}{IC} = \frac{EI}{FC} \Rightarrow \frac{BE}{FC} = \frac{BI^2}{CI^2}$.

ΔKIB và ΔKCI đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{KI}{KC} = \frac{KB}{KI} = \frac{IB}{CI}$

$\Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{IB^2}{IC^2} \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{KB}{KC}$.

Gọi giao điểm của đường tròn (I_A) với cạnh BC là G, J, BE, CF là tiếp tuyến của (I_A) $\Rightarrow$ $BE^2 = BG.BJ$ và $CF^2 = CJ.CG \Rightarrow \frac{BE^2}{CF^2} = \frac{BG.BJ}{CJ.CG} = \frac{KB^2}{KC^2}$.

$\Rightarrow$ theo định lí Steiner $\Rightarrow$ KG, KJ là đường đẳng giác của ΔBKC, KI là phân giác góc $\angle BKC \Rightarrow KI$ là phân giác $\angle GKJ$.

$KI \perp KP \Rightarrow I_AP$ là đường thẳng chứa đường kính $\Rightarrow I_AP \perp BC$.

Gọi Q là giao điểm IP và MN, $I_AP \perp BC \Rightarrow I_AP // MN \Rightarrow \dfrac{I_AK}{I_AO} = \dfrac{PK}{PM}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔNKO cát tuyến I, I_A $M \Rightarrow \dfrac{IN}{IK}\dfrac{I_AK}{I_AO}\dfrac{MO}{MN} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{IN}{IK}\dfrac{I_AK}{I_AO} = 2$. Áp dụng định lí Menelaus cho ΔNKM cát tuyến I, P, Q

$\Rightarrow \dfrac{IN}{IK}\dfrac{PK}{PM}\dfrac{QM}{QN} = 1 \Rightarrow \dfrac{IN}{IK}\dfrac{I_AK}{I_AO}\dfrac{QM}{QN} = 1 \Rightarrow \dfrac{QM}{QN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow QN = 2QM \Rightarrow Q$ là điểm cố định $\Rightarrow IP$ luôn đi qua điểm cố định Q khi A thay đổi.

Ví dụ 26. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác. Gọi các tiếp điểm với đường tròn nội tiếp lần lượt là M, P, N, Q.

Chứng minh MN vuông góc với PQ.

Giải:

$MPNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle AMP = \angle MQP$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MP}$)

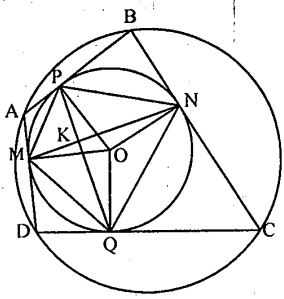
$\angle NQC = \angle NMQ$ (chắn cung $\overset{\frown}{QN}$), $AM = AP \Rightarrow$ tam giác AMP cân

$\Rightarrow \angle AMB = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle A \Rightarrow \angle MQP = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle A$

$CN = CQ \Rightarrow$ tam giác CNQ cân

$\Rightarrow \angle NQC = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle C \Rightarrow \angle NMQ = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle MQP + \angle NMQ = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle A + 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle C$



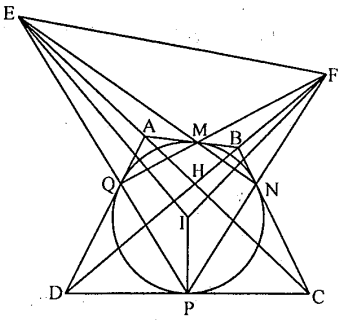
$\angle MQP + \angle NMQ = 180^0 - \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle C)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^0 \Rightarrow \angle MQP + \angle NMQ = 90^0 \Rightarrow \angle MKQ = 90^0$

$\Rightarrow MN$ vuông góc với PQ.

Ví dụ này giúp ta chỉ ra tồn tại tứ giác vừa là tứ giác nội và ngoại tiếp. Từ đó suy ra tính chất MN vuông góc với PQ khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp và ngoại tiếp.

Ví dụ 27. Cho tứ giác *ABCD* ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là các tiếp điểm với các cạnh *AB, BC, CD, DA*. Gọi *E, F* và *H* thứ tự là giao điểm của *MN* và *PQ, MQ* và *NP, AC* và *BD*. Chứng minh rằng *IH* vuông góc với *EF*.



Giải:

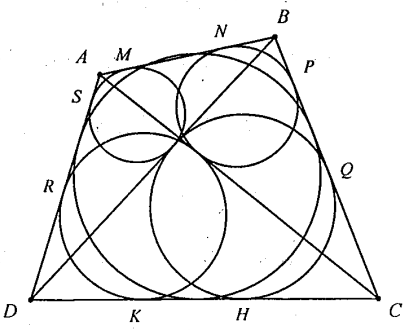
Theo ví dụ trên $\Rightarrow EI \perp BD, FI \perp AC$

Mặt khác ta có *E, A, C* và *F, B, D* thẳng hàng

$\Rightarrow FD \perp IE$ và $EC \perp IF$, *AC* cắt *BD* tại $H \Rightarrow FH \perp IE$ và $EH \perp IF \Rightarrow IH \perp EF$.

Ví dụ 28. Cho tứ giác *ABCD*, đường tròn nội tiếp *ABC* tiếp xúc với *AB, BC* tại *N* và P, đường tròn nội tiếp *BCD* tiếp xúc với *BC, CD* tại *Q* và *H*, đường tròn nội tiếp *CDA* tiếp xúc với *CD, DA* tại *K* và *R*, đường tròn nội tiếp *DAB* tiếp xúc với *DA, AB* tại *S* và *M*. Chứng minh rằng tứ giác *ABCD* ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi $MN + HK = PQ + RS$.

Giải:



Do các đường tròn nội tiếp *ABC* tiếp xúc với *AB, BC* tại *N* và *P*, đường tròn nội tiếp *BCD* tiếp xúc với *BC, CD* tại *Q* và *H*, đường tròn nội tiếp *CDA* tiếp xúc với *CD, DA* tại *K* và *R*, đường tròn nội tiếp *DAB* tiếp xúc với *DA, AB* tại *S* và *M* suy ra:

$AM = AS, BN = BP, CQ = CH, DK = DR$

Tứ giác *ABCD* ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi:

$AB + CD = BC + DA$

$\Leftrightarrow AM + MN + NB + CH + HK + KD = BP + PQ + QC + DR + RS + SA$

$\Leftrightarrow MN + HK = PQ + RS.$

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

1. Cho tứ giác lồi $ABCD$, có $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90^0$. Điểm H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BD. Các điểm S và T tương ứng nằm trên AB, AD sao cho H nằm trong tam giác SCT và $\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90^0$, $\widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác TSH. (IMO 2014).

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, P là điểm nằm trên đường thẳng AB (không thuộc đoạn AB). Gọi M, N là trung điểm của AD và BC, đường thẳng PM cắt BD tại K. Chứng minh rằng MN là đường phân giác PNK.

3. Cho tứ giác $ABCD$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$, M trên AB sao cho $AM = AD$, đường thẳng DM cắt BC tại N. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, và K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$. (Mỹ 2009).

4. Cho tứ giác $ABCD$, đường phân giác ngoài của góc $\widehat{CAD}$ và $\widehat{DBC}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng $AD + AC = BC + BD$ khi và chỉ khi $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$.

5. Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi nào? (IMO 2005).

Chương 9

ĐỊNH LÍ SIN, ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐIỂM BROCARD

I. ĐỊNH LÍ SIN, ĐỊNH LÍ CÔSIN

1. Định lí sin

Trong tam giác ABC, ta có: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

2. Định lí côsin

Trong tam giác ABC, ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Hai định lí này đã đưa vào sách giáo khoa lớp 10.

3. Một số công thức tính diện tích tam giác thường dùng

1. $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

2. $S=\frac{abc}{4R}.$

3. $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

4. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(công thức Heron).*

Heron là người xứ Alexandria – Nhà bác học cổ Hi Lạp, công trình của ông là tập "Bách khoa toán ứng dụng, quy tắc giải phương trình bậc hai và khai căn bậc hai, bậc ba". Công thức tính diện tích tam giác khi biết độ dài ba cạnh được mang tên ông.

4. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Giải:

Từ định lí côsin $\Rightarrow \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, kết hợp công thức tính diện tích $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow bc = \dfrac{2S}{\sin A} \Rightarrow \cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$;

Tương tự $\cot B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{4S}$, $\text{cotC} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, trung tuyến từ đỉnh B và C vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng $\cot A \geq \dfrac{4}{3}$ và $\cot B + \cot C \geq \dfrac{2}{3}$.

Giải:

Gọi G là trọng tâm ΔABC, theo giả thiết $\Rightarrow GB \perp GC \Rightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2$.

Mặt khác $GB = \dfrac{2}{3}m_b \Rightarrow GB^2 = \dfrac{4}{9}m_b^2$, tương tự $GC^2 = \dfrac{4}{9}m_c^2$.

Thay công thức đường trung tuyến $m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

$\Rightarrow b^2+c^2 = 5a^2$, theo công thức $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2(b^2+c^2)}{5bc} \geq \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \angle A < 90^0 \Rightarrow \cos^2 A \geq \frac{16}{25}$, mặt khác $\cot A = \frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} \geq \frac{4}{3}$.

Từ công thức $\Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{a^2}{2S} = \frac{1}{2}\frac{b^2+c^2-a^2}{4S} = \frac{1}{2}\cot A \geq \frac{2}{3}$.

Ví dụ 3. Cho x, y là các số thực thoả mãn $x, y > 1$.

Đặt $a = x^2+1$, $b = y^2+1$, $c = x^2+y^2+1$.

Chứng minh rằng tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c và tam giác đó là tam giác tù.

Giải:

Trước hết chứng minh tồn tại tam giác:

$a+b>c \Leftrightarrow x^2+1+y^2+1>x^2+y^2+1$ (hiển nhiên).

$b+c>a \Leftrightarrow y^2+1+x^2+y^2+1>x^2+1 \Leftrightarrow 2y^2+1>0$ (hiển nhiên).

$c+a>b \Leftrightarrow x^2+1+x^2+y^2+1>y^2+1$ (luôn thoả mãn).

Trong ba cạnh a, b, c ta thấy c là cạnh lớn nhất vì:

$x^2+y^2+1>x^2+1$ và $x^2+y^2+1>y^2+1$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(x^2+1)^2+(y^2+1)^2-(x^2+y^2+1)^2}{2(x^2+1)(y^2+1)}$.

Khai triển tử số:

$x^4+2x^2+1+y^4+2y^2+1-x^4-y^4-1-2x^2y^2-2x^2-2y^2 = 1-2x^2y^2 < 0.$

Với $x, y > 1 \Rightarrow \cos C < 0 \Rightarrow C > 90^0$.

Ví dụ 4. Cho hai tam giác ABC và AMC được sắp xếp sao cho đoạn MC cắt đoạn AB tại D và $AM + MC = AB + BC$.

Chứng minh rằng nếu $AB = BC$ thì $DB > DM$.

Giải:

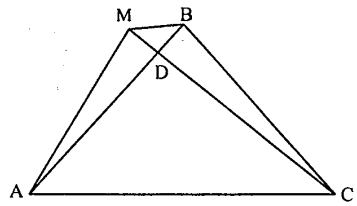
Đặt $\angle MBA = \alpha$, $\angle BMC = \beta$

Theo giả thiết: $\angle MCA < \angle BCA = \angle BAC < BAC + \angle BAM = \angle MAC$

$\Rightarrow MC > MA$

$\Rightarrow 2MC > MC + MA = AB + BC = 2AB$

$\Rightarrow MC > AB$ (1)



Áp dụng định lí hàm số côsin cho ΔMBA, ΔMCB ta có:

$$\cos\alpha = \frac{MB^2 + AB^2 - AM^2}{2MB.AB},\ \cos\beta = \frac{MB^2 + MC^2 - AB^2}{2MB.MC}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \frac{MB^2(MC - AB) - AB(MC^2 - AB^2) + MC(AB^2 - AM^2)}{2AB.MC.MB}$$

$AM + MC = AB + BC \Rightarrow AB - AM = MC - AB$, kết hợp (1) suy ra

$$\cos\alpha - \cos\beta = \frac{(MC - AB)(MB^2 - AB^2 + MC.MA)}{2AB.MC.MB}$$

$$= \frac{(MC - MA)\left[MB^2 - AB^2 + MC(2AB - MC)\right]}{2AB.MC.MB}$$

$$= \frac{(MC - AB)\left[MB^2 - (AB - MC)^2\right]}{2AB.MC.MB}$$

$$= \frac{(MC - AB)(MB + AB - MC)(MB - AB + MC)}{2AB.MC.MB} > 0$$

$\Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta \Rightarrow \alpha < \beta \Rightarrow DB > DM.$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC thoả mãn $BC = 2(AC - AB)$, D là điểm trên BC. Chứng minh rằng $\angle ABD = 2\angle ADB$ khi và chỉ khi $BD = 3CD$.

Giải:

Đặt $\angle ADB = \alpha$, $AB = c$, $CA = b$, $AD = d$, $CD = x$, $BD = y$.

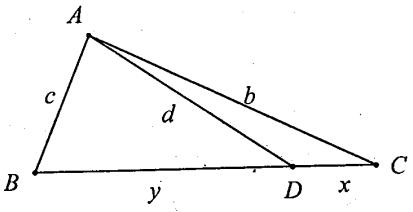
Áp dụng định lí sin với ΔABD: $\frac{d}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow d = 2c\cos\alpha.$

Áp dụng định lí côsin với ΔABD: $4c^2\cos^2\alpha = d^2 = c^2 + y^2 - 2cy\cos 2\alpha$

$\Rightarrow 0 = y^2 - (2c\cos 2\alpha)y + c^2(1-4\cos^2\alpha) = y^2 - (2c\cos 2\alpha)y - c^2(2\cos 2\alpha + 1)$

$= [y+c][y - c(2\cos 2\alpha + 1)] \Rightarrow y = (2\cos 2\alpha + 1)c$;

Áp dụng định lí côsin với ΔACD:



$b^2 = d^2 + x^2 + 2xd\cos\alpha$

$\Rightarrow 4[x^2 + (2d\cos\alpha)x + (d^2 - b^2)] = 0.$

Theo giả thiết: $x + y = 2(b-c)$

$\Rightarrow 2b = x + y + 2c = x + (2\cos 2\alpha + 3)c$

Bây giờ $2d\cos\alpha = 4c\cos^2\alpha = 2c\cos 2\alpha + 2c$ và

$4d^2 - 4b^2 = 16c^2\cos^2\alpha - x^2 - 2c(2\cos 2\alpha + 3)x - (2\cos 2\alpha + 3)^2c^2$

$\Rightarrow 0 = 4x^2 + (8\cos 2\alpha + 8)cx + 16c^2\cos^2\alpha - x^2 - (4\cos 2\alpha + 6)cx -$

$-(4\cos^2 2\alpha + 12\cos 2\alpha + 9)c^2 =$

$= 3x^2 + (4\cos 2\alpha + 2)cx + [(8\cos 2\alpha + 8) - (4\cos^2 2\alpha + 12\cos 2\alpha + 9)]c^2$

$= 3x^2 + (4\cos 2\alpha + 2)cx - [4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1]c^2$

$= 3x^2 + (4\cos 2\alpha + 2)cx - (2\cos 2\alpha + 1)^2c^2$

$= [3x - (2\cos 2\alpha + 1)c][x + (2\cos 2\alpha + 1)c] = [3x - y][x + y] = a(3x - y)$

$\Rightarrow y = 3x \Rightarrow BD = 3CD.$

Ngược lại $BD = 3CD \Rightarrow y = 3x$, đặt $\angle ADB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$.

Từ giả thiết $BC = 4x = 2(b-c)$, áp dụng định lí côsin cho ΔABC

$\Rightarrow b^2 = c^2 + 16x^2 - 8cx\cos\beta$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{16x^2 + c^2 - b^2}{8cx} = \frac{4(b-c)^2 + (c^2 - b^2)}{4c(b-c)} = \frac{4(b-c) - (c+b)}{4c} = \frac{3b - 5c}{4c}.$$

Áp dụng định lí Stewarts $b^2 3x + c^2 x = 4x[d^2 + (3x)x]$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{3b^2 + c^2 - 12x^2}{4} = \frac{3b^2 + c^2 - 3(b-c)^2}{4} = \frac{6bc - 2c^2}{4} = \frac{(3b-c)c}{2}.$$

ΔABD: $c^2 = d^2 + 9x^2 - 6dx\cos\alpha.$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{9x^2 + d^2 - c^2}{6dx} = \frac{(3x-c)(3x+c)+d^2}{6dx} = \frac{(6x-2c)(6x+2c)+4d^2}{24dx}$$

$$= \frac{(3b-5c)(3b-c)+2(3b-c)c}{12d(b-c)} = \frac{(3b-c)(3b-3c)}{12d(b-c)} = \frac{3b-c}{4d}.$$

Mặt khác $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2(3b-c)^2}{16d^2} - 1 = \frac{2(3b-c)^2 - 8(3b-c)c}{8(3b-c)c} =$

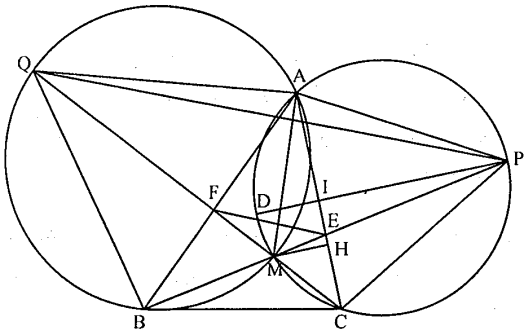
$$= \frac{2(3b-c)-8c}{8c} = \frac{3b-5c}{4c} = \cos\beta \Rightarrow 2\alpha = \beta \text{ hoặc } 2\alpha = 360^0 - \beta$$

$$\Rightarrow \beta + \alpha = 360^0 - \alpha = 180^0 + \frac{1}{2}\beta > 180^0.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác sao cho $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$

BM cắt AC tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng $AB + AC \geq 4EF$.

Giải:



Theo giả thiết $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$.

Mặt khác $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMA = 360^0$

$\Rightarrow \angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^0$.

Dựng ra phía ngoài ΔABC tam giác đều ΔQAB và $\Delta PAC \Rightarrow QAMB$ và $PAMC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle AMQ = \angle ABQ = 60^0$.

Tương tự $\angle AMP = \angle PMC = 60^0 \Rightarrow Q, M, C$ thẳng hàng.

Tương tự B, M, P thẳng hàng.

Ta chứng minh bổ đề sau: $PM \geq kEM$ và $QM \geq kFM$, với $k > 0$

Nếu $\angle PMQ \geq 90^0$ thì $PQ \geq kEF$.

Chứng minh:

Đặt $\angle PMQ = \alpha$, $\alpha \geq 90^0 \Rightarrow -\cos\alpha \geq 0$.

Áp dụng định lí côsin với ΔPQM ta có:

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2 - 2PM.QM\cos\alpha$$
$$\geq (kEM)^2 + (kFM)^2 - 2(kEM)(kFM)\cos\alpha = (kEF)^2$$

$\Rightarrow PQ \geq kEF$.

Trở lại bài toán:

Kẻ $PI \perp AC$ cắt đường tròn AMC tại D, $MH \perp AC \Rightarrow \Delta PIE$, ΔMHE đồng dạng;

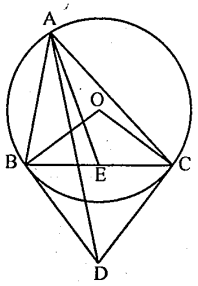
$ID \geq HM$, $PD = 4ID \Rightarrow \dfrac{PE}{EM} = \dfrac{PI}{MH} \geq \dfrac{PI}{ID} = 3 \Rightarrow PM \geq 4EM$.

Tương tự $QM \geq 4FM$; Mặt khác $AB + AC = AP + AQ \geq 4EF$.

Điểm M thoả mãn $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^0$ *có tên là điểm Torricelli Evangelista (1608-1647) - nhà vật lí, nhà toán học người Italia. Trong toán học, ông phát triển phương pháp bất khả phân, mô tả một đường cong sau này quen gọi là đường xoắn ốc logarit.*

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại B và C cắt nhau ở D. Gọi E là điểm trên BC thoả mãn $\angle BAD = \angle CAE$. Chứng minh rằng E là trung điểm BC.

Giải:



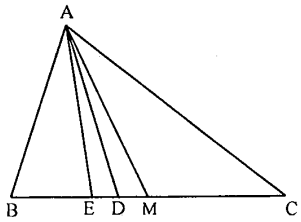
Theo giả thiết $\angle BAD = \angle CAE$;

Áp dụng định lí sin đối với ΔABE và ΔACE:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AE\sin\angle BAE.\sin\angle C}{AE.\sin\angle CAE.\sin\angle B} = \frac{\sin\angle BAE.\sin\angle ABD}{\sin\angle CAE.\sin\angle ACD}$$
$$= \frac{\sin\angle CAD.\sin\angle ABD}{\sin\angle BAD.\sin\angle ACD} = \frac{CD.AD}{AD.BD} = 1 \text{ (do } DB = DC)$$

$\Rightarrow BE = CE \Rightarrow AE$ là trung tuyến kẻ từ đỉnh A.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. AM, AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác của góc tam giác. Gọi AE là đường đối xứng của AM qua AD (E trên BC). Chứng minh rằng $\frac{EB}{EC}=\frac{AB^2}{AC^2}$ (*Định lí Steiner*).



Giải:

Theo giả thiết $\angle EAD=\angle MAD \Rightarrow \angle BAE=\angle CAM$

Áp dụng công thức tỉ số diện tích:

$$\frac{EB}{EC}=\frac{S_{BAE}}{S_{CAE}}=\frac{AB\sin\angle MAC}{AC\sin\angle MAB} \quad (1)$$

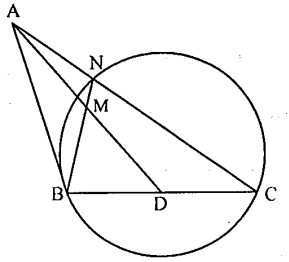
AM là trung tuyến $\Rightarrow S_{ABM}=S_{ACM} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle MAB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{EB}{EC}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

Tính chất này đã được chứng minh bằng phương pháp diện tích, nay chứng minh bằng phương pháp lượng giác.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. M là trung điểm của đường trung tuyến AD, đường thẳng BM cắt AC tại N. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN khi và chỉ khi $\frac{BM}{MN}=\frac{AC^2}{AB^2}$.

Giải:



Giả sử AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCN \Rightarrow \angle ABN=\angle ACB \Leftrightarrow \Delta ABC$ và ΔANB đồng dạng $\Leftrightarrow \frac{BC^2}{BN^2}=\frac{AC^2}{AB^2} \Rightarrow$ ta cần chứng minh AB tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCN \Leftrightarrow \frac{BM}{MN}=\frac{BC^2}{BN^2}$.

Áp dụng định lí sin trong ΔABM và ΔAMN:

$\frac{BM}{MN}=\frac{\sin\angle MAB.\sin\angle MNA}{\sin\angle ABM.\sin\angle NAM}$, tương tự cho ΔABD và ΔADC:

$$\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle NAM}=\frac{BD\sin\angle ABD}{DC\sin\angle DCA}, \text{ trong } \Delta NBC: \frac{BC^2}{BN^2}=\frac{\sin^2\angle BNC}{\sin^2\angle BCN}$$

$$\frac{BM}{MN}=\frac{\sin\angle ABD.\sin\angle MNA}{\sin\angle ABM.\sin\angle DCA}=\frac{\sin^2\angle MNA}{\sin^2\angle BCN}=\frac{\sin^2\angle BNC}{\sin^2\angle BCN}=\frac{BC^2}{BN^2}.$$

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác góc A cắt đường tròn (O) tại D. Gọi M, N là trung điểm của AB, AC, đường thẳng OM, ON cắt AD tại P và Q. Chứng minh rằng tam giác MPD và NQD có diện tích bằng nhau. (IMO 2004).

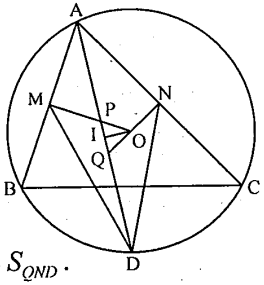
Giải:

Tam giác ABC cân tại A bài toán chứng minh dễ dàng.

Giả sử $AC > AB$, AD là phân giác góc $A \Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$

$MA = MB \Rightarrow OM \perp AB$, tương tự $ON \perp AC \Rightarrow \angle APM = \angle AQN$

$\Rightarrow \Delta AMP$ và ΔANQ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{PM}{QN}=\frac{AP}{AQ} \Rightarrow PM.AQ = AP.QN$ (1)



Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow OI \perp AD$

$\Rightarrow QD = PA$, $QA = PD$;

$$\frac{S_{PMD}}{S_{QND}}=\frac{PM.PD\sin\angle MPD}{QN.QD\sin\angle NQD}=\frac{PM.PD}{QN.QD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{S_{PMD}}{S_{QND}}=\frac{PM.PD}{QN.QD}=\frac{PM.AQ}{QN.AP}=1 \Rightarrow S_{PMD}=S_{QND}$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC thoả mãn $2\cot A=\cot B+\cot C$. Chứng minh rằng $\angle A \le 60^0$.

Giải:

Theo công thức ta suy ra:

$$\frac{2(b^2+c^2-a^2)}{4S}=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S} \Rightarrow b^2+c^2=2a^2.$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2}{4bc}\ge\frac{1}{2} \Rightarrow \angle A \le 60^0.$$

II. ĐIỂM BROCARD

1. Định nghĩa

Trong tam giác ABC, tồn tại điểm P sao cho $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Điểm P được gọi là *điểm Brocard*. Đặt $\angle PAB = \varphi$, góc φ được gọi là *góc Brocard*.

Điểm Brocard được công bố bởi Henri Brocard, một sĩ quan quân đội Pháp, vào năm 1825. Mặc dù vậy nó đã được tìm ra trước đó bởi nhà hình học Jacobi vào năm 1816.

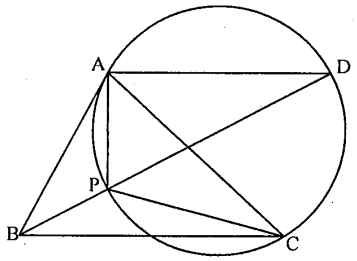
Bài toán. Cho tam giác ABC. Xác định điểm P thoả mãn

$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$.

Phân tích: Giả sử điểm P dựng được thoả mãn $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$

$\Rightarrow \angle BPC = 180^0 - \angle PBC - \angle PCB$

$= 180^0 - \angle PCA - \angle PCB = 180^0 - \angle C$;



Tương tự ta có $\angle CPA = 180^0 - \angle B$

$\Rightarrow$ giao điểm của P là hai cung trên.

Cách dựng: Dựng đường tròn qua A và C đồng thời tiếp xúc với AB;

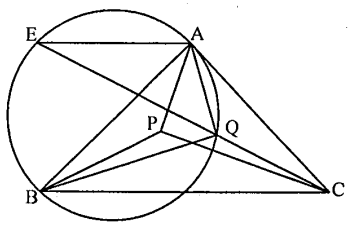
Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn vừa dựng tại D; DB cắt đường tròn tại P.

Chứng minh:

Đặt $\angle PAB = \varphi \Rightarrow \angle ADP = \angle BAP = \varphi$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle ACP = \varphi$, $AD // BC$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle DBC = \angle PBC = \varphi$.



Giả sử có điểm Q thoả mãn

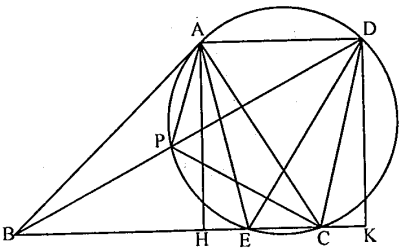
$\angle QBA = \angle QAC = \angle QCB$

$\Rightarrow$ điểm Q cũng là điểm Brocard

Vậy trong tam giác ABC tồn tại hai điểm Brocard.

Với cách dựng như trên $\Rightarrow$ hai điểm này là hai điểm đẳng giác của tam giác.

2. Tính góc Brocard



a. Theo ba góc của tam giác

Với cách dựng điểm Brocard P ta xác định độ lớn của góc. Từ A hạ $AH \perp BC$ và $DK \perp BC$, đường tròn cắt cạnh BC tại điểm thứ hai là E (khác C)

$\Rightarrow ADCE$ là hình thang cân $\Rightarrow HC = EK \Rightarrow BK = BH + HE + EK$

$\Rightarrow BK = BH + HE + HC$, chia đẳng thức cho AH

$$\Rightarrow \frac{BK}{AH} = \frac{BH}{AH} + \frac{HE}{AH} + \frac{HC}{AH}$$

Đặt $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi \Rightarrow \cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$

b. Theo ba cạnh tam giác

$$\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{R}{abc}(2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C)$$

$$= \frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng góc Brocard $0 < \varphi \le 30^0$.

Giải:

Theo cách chứng minh trên $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

$a^2 + b^2 + c^2 > 0 \Rightarrow \cot\varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0.$

Mặt khác, trong mọi tam giác $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (Bạn đọc tự chứng minh)

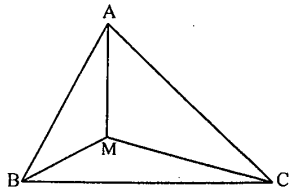
$\Rightarrow \cot\varphi \geq \sqrt{3} \Rightarrow \varphi \leq 30^0$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, φ là góc Brocard ta luôn có:

$\sin^3\varphi = \sin(A-\varphi)\sin(B-\varphi)\sin(C-\varphi)$.

Giải:

Gọi M là điểm Brocard, ta có: $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA = \varphi$,



$S_{MCA} = \frac{1}{2}MC.CA.\sin\varphi$

$S_{MCA} = \frac{1}{2}MA.AC\sin\angle MAC = \frac{1}{2}MA.AC.\sin(A-\varphi)$

$\Rightarrow \frac{\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{MC}{MA}$, tương tự ta có:

$\frac{\sin(B-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{MA}{MB}$, $\frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{MB}{MC}$, nhân ba đẳng thức

$\Rightarrow \frac{\sin(A-\varphi)\sin(B-\varphi)\sin(C-\varphi)}{\sin^3\varphi} = 1$

$\Rightarrow \sin^3\varphi = \sin(A-\varphi)\sin(B-\varphi)\sin(C-\varphi)$.

Ví dụ 3. Trong mọi tam giác ABC, φ là góc Brocard ta luôn có:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}.$$

Giải:

Từ $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$

$\Rightarrow \cot^2\varphi = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$.

Vì $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$ với mọi tam giác

$\Rightarrow 1+\cot^2\varphi = 1+\cot^2 A + 1+\cot^2 B + 1+\cot^2 C$,

$1+\cot^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$.

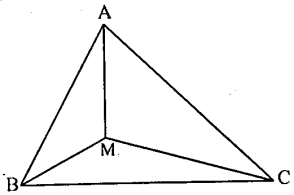
Ví dụ 4. Trong mọi tam giác ABC, M là điểm Brocard của tam giác ta luôn có:

$$\frac{S_{MAB}}{a^2}=\frac{S_{MBC}}{b^2}=\frac{S_{MCA}}{c^2}.$$

Giải:

Ta có $\angle BMC=180^0-\angle MBC-\angle MCB=180^0-\angle\varphi-(\angle C-\angle\varphi)=180^0-\angle C.$

Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác: $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}=\frac{MB.MC.\sin\angle BMC}{CA.CB\sin\angle C}=\frac{MB.MC}{a.b}.$



Tương tự $\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}=\frac{MA.MC}{b.c}$, $\frac{S_{MBA}}{S_{ABC}}=\frac{MB.MA}{a.c}$

$$\Rightarrow \frac{S_{MAC}}{a.MC.MA}=\frac{S_{MBA}}{b.MA.MB}=\frac{S_{MCB}}{c.MC.MB}.$$

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác AMC: $MA=\frac{b\sin\varphi}{\sin A}$

$$\Rightarrow \frac{S_{MAC}}{a^2b\sin B}=\frac{S_{MBA}}{b^2c\sin C}=\frac{S_{MCB}}{c^2a\sin A}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MAC}}{a^2b^2}=\frac{S_{MBA}}{b^2c^2}=\frac{S_{MCB}}{c^2a^2}\Rightarrow \frac{S_{MAB}}{a^2}=\frac{S_{MBC}}{b^2}=\frac{S_{MCA}}{c^2}.$$

III. BỔ ĐỀ

1. Bài toán. Cho tam giác ABC không cân, M là điểm trên cạnh BC thoả mãn $\frac{BM}{CM}=\frac{m}{n}$, $\angle BAM=\alpha$, $\angle AMB=\beta$.

Chứng minh rằng:

1. $(m+n)\cot\beta=m\cot\angle C-n\cot\angle B$
2. $m\cot\alpha=(m+n)\cot A+n\cot B$

Chứng minh:

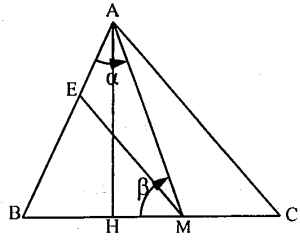
1. Hạ $AH\perp BC$, giả sử $H\in BM\Rightarrow BM=BH+HM=AH(\cot B+\cot\beta)$

$MC=HC-HM=AH(\cot C-\cot\beta)$ chia hai vế cho nhau ta được:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{\cot B+\cot\beta}{\cot C-\cot\beta}=\frac{m}{n}$$

$\Rightarrow n\cot B+n\cot\beta=m\cot C-m\cot\beta$

$\Rightarrow (m+n)\cot\beta=m\cot C-n\cot B$



2. Từ M kẻ $ME//AC$ suy ra $\angle BEM=\angle A$,
xét ΔAMB với kết quả của 1 ta có:

$(m+n)\cot\angle MEB=m\cot\alpha-n\cot B \Leftrightarrow (m+n)\cot A=m\cot\alpha-n\cot B$

$\Leftrightarrow m\cot\alpha=(m+n)\cot A+n\cot B$.

Hệ quả. AM là trung tuyến của tam giác ABC ta có: $2\cot\alpha=\cot C-\cot B$.

Chứng minh:

AM là trung tuyến $\Rightarrow m=n\Rightarrow 2\cot\alpha=\cot C-\cot B$.

2. Các ví dụ

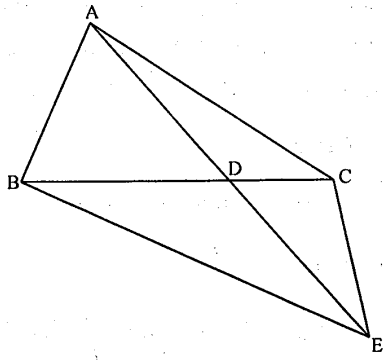
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, $\angle B=2\angle C$. Trên BC lấy điểm D sao cho $BD=2DC$, lấy E trên AD kéo dài về phía D thoả mãn $AD=DE$.

Chứng minh rằng $2\angle BCE-\angle CBE=180^0$. (IMO 2001).

Giải:

Đặt $\angle BAD=\angle A_1$, $\angle DAC=\angle A_2$, $\angle CBE=\angle B_1$, $\angle BCE=\angle C_1$, $\angle AEB=\angle E_1$,

$\angle AEC=\angle E_2$, $\angle ADB=\angle D_1$, $\angle CDE=\angle D_2$.



Trong ΔABC, $BD=2DC$, theo công thức của *Bài toán* trên ta có:

$3\cot D_1=2\cot C-\cot B=3\cot D_2$ (1)

Trong ΔABE, BD là trung tuyến:

$\cot B_1=\cot B+\cot E_1-\cot A_1$ (2)

$2\cot D_1=\cot E_1-\cot A_1$ (3)

Tương tự trong tam giác ACE:

$$\cot C_1 = \cot C + \cot E_2 - \cot A_2 \qquad (4)$$

$$2\cot D_2 = \cot A_2 - \cot E_2 \qquad (5)$$

Từ (1) và (3) thay vào (2) ta có:

$$\cot B_1 = \cot B + \frac{2}{3}(2\cot C - \cot B) = \frac{1}{3}(\cot B + 4\cot C).$$

Theo giả thiết $\angle B = 2\angle C \Rightarrow \cot B = \dfrac{\cot^2 C - 1}{2\cot C} \Rightarrow \cot B_1 = \dfrac{9\cot^2 C - 1}{6\cot C}$ (6)

Từ (1) và (5) thay vào (4) ta có:

$$\cot C_1 = \cot C - \frac{2}{3}(2\cot C - \cot B) = -\frac{1}{3\cot C} \qquad (7)$$

Để chứng minh $2\angle BCE - \angle CBE = 180^0$ ta cần chứng minh $\cot 2C_1 = \cot B_1$

$$\Rightarrow \cot 2C_1 = \frac{\cot^2 C_1 - 1}{2\cot C_1} \quad (8)$$

Thay (7) vào (8) Ta có: $\cot 2C_1 = \dfrac{9\cot^2 C_1 - 1}{6\cot C}$ (9)

Từ (8) và (9) $\Rightarrow 2\angle BCE - \angle CBE = 180^0$.

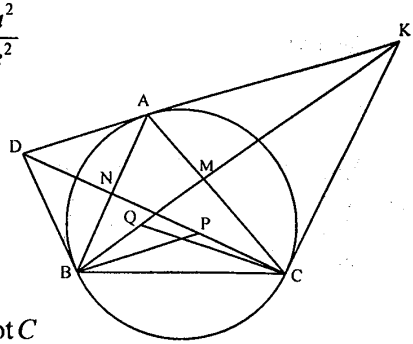
Ví dụ 2. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt tiếp tuyến tại A thứ tự tại D và K. Đường thẳng BK cắt AC tại M, đường thẳng CD cắt cạnh AB tại N, gọi Q là trung điểm BM, P là trung điểm CN. Chứng minh rằng $\angle PBC = \angle QCB$ .Xác định tỉ số các cạnh của tam giác ABC khi hai góc đó đạt giá trị lớn nhất. (IMO Shortlist 2000).

Giải:

Theo giả thiết BK là đường đối trung của ΔABC, theo tính chất của đường đối trung ta có $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{a^2}{c^2}$.

Song ta chứng minh trực tiếp để đúng với nội dung của áp dụng lượng giác.

$$\frac{CM}{AM}=\frac{S_{CBK}}{S_{ABK}}=\frac{BC\sin\angle BCK}{AB\sin\angle BAK}=\frac{BC\sin A}{AB\sin C}=\frac{a^2}{c^2}$$



Áp dụng công thức của *Bài toán* trên ta có:

$a^2\cot\angle CBM=(a^2+c^2)\cot B+c^2\cot C.$

Trong tam giác BCM, CQ là trung tuyến $\Rightarrow \cot\angle BCQ=2\cot C+\cot\angle CBM$

$$\Rightarrow \cot\angle BCQ=2\cot C+\frac{a^2+c^2}{a^2}\cot B+\frac{c^2}{a^2}\cot C$$

$$=2\cot C+\cot B+\frac{c^2}{a^2}(\cot B+\cot C)=2(\cot B+\cot C)+\cot A.$$

Tương tự ta có: $\cot\angle CBP=2(\cot B+\cot C)+\cot A.$

Từ đó $\Rightarrow \angle PBC=\angle QCB.$

Đặt $\angle PBC=\alpha$ và $\angle PCB=\beta$.

Xét tam giác BCN, P là trung điểm CN, theo công thức của *Bài toán*

$\Rightarrow \cot\alpha=2\cot B+\cot\beta$ (1)

Vì BD là tiếp tuyến $\Rightarrow \angle ABD=\angle C.$

Xét tam giác BCD và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

$BC=2R\sin A$, $BD=\dfrac{AB}{2\cos C}=\dfrac{2R}{2\cos C}=R\cot C$ từ đó ta có:

$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sin(B+C+\beta)}{\sin\beta}$, do đó $\dfrac{2\sin A}{\tan C}=\dfrac{\sin(\pi-A+\beta)}{\sin\beta}=\dfrac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta}.$

Hay $2\sin A\cot C=\sin A\cot\beta-\cos A$ suy ra $\cot\beta=2\cot C+\cot A$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có:

$$\cot\alpha=2\cot B+2\cot C+\cot A=\frac{2\sin A}{\cos B\cos C}+\cot A$$

$$=\frac{4\sin A}{\cos(B-C)+\cos(B+C)}+\cot A$$

$$\geq\frac{4\sin A}{1+\cos(B+C)}+\cot A=4\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{2\tan\dfrac{A}{2}}-\frac{1}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

Mặt khác ta có: $\frac{7}{2}\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{2\tan\frac{A}{2}}\geq 2\sqrt{\frac{7}{2}\tan\frac{A}{2}\frac{1}{2\tan\frac{A}{2}}}=\sqrt{7}$.

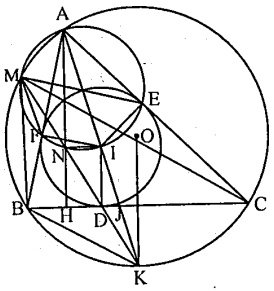
Vậy góc α lớn nhất khi $\cot\alpha=\sqrt{7}$, dấu bằng khi $B=C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ và

$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1}{7}\Rightarrow\cot^2\frac{A}{2}=\frac{7}{8}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Áp dụng định lí sin $\Rightarrow b:c:a=\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với cạnh BC tại D, H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác A), và cắt AH tại N. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Giải:



Gọi E và F là giao điểm của đường tròn đường kính AI cắt cạnh AC tại E và cạnh AB tại $F\Rightarrow IE\perp AC$, $IF\perp AB\Rightarrow I$ là tiếp điểm của đường tròn (I) với cạnh AC, AB.

A, M, F, E thuộc đường tròn $\Rightarrow\angle AEM=\angle AFM$

$\Rightarrow\angle MFB=180^0-\angle MFA=180^0-\angle MEA=\angle MEC$

$\Rightarrow\angle MFB=\angle MEC$, mặt khác $\angle MBA=\angle MCA$

$\Rightarrow\Delta MFB$ và ΔMEC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow\frac{BF}{CE}=\frac{MB}{MC}$.

Ta lại có $BD=BF$ và $CE=CD\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{MB}{MC}$ theo định lí đảo đường phân giác $\Rightarrow MD$ là phân giác của góc $\angle BMC$.

Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại $K\Rightarrow M$, D, K thẳng hàng.

$ID\perp BC$, $AH\perp BC\Rightarrow ID//AH\Rightarrow\frac{AK}{IK}=\frac{AN}{ID}$.

Mặt khác $KI=KB$, $AN=AI\sin\angle AIN\Leftrightarrow\frac{AK}{KB}=\frac{AI\sin\angle AIN}{ID}$.

Áp dụng định lí sin với ΔABK: $\frac{AK}{KB}=\frac{\sin\angle ABK}{\sin\angle BAK}$.

$ID=IF=\sin\angle BAK \Leftrightarrow \frac{\sin\angle ABK}{\sin\angle BAK}=\frac{\sin\angle AIN}{\sin\angle BAK}$.

Gọi J là giao điểm AK và $BC \Rightarrow \sin\angle ABK=\sin\angle AJB$

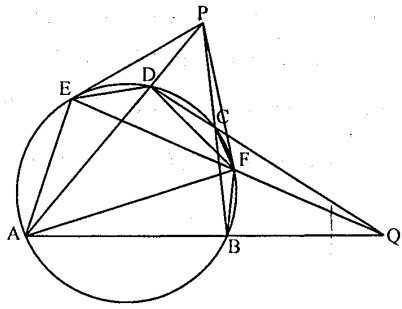
$\Leftrightarrow \angle ABK=180^0-\angle BAK-\angle BKA=180^0-\frac{1}{2}\angle A-\angle C$.

ΔAJC: $\angle AJB=\angle C+\frac{1}{2}\angle A \Leftrightarrow \sin\angle ABK=\sin\angle AJB$.

Ví dụ 4. Cho các điểm *A, E, D, C, F, B* theo thứ tự theo chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O), *AD* cắt *BC* tại *P* thoả mãn *PE, PF* là tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh rằng *AB, EF, CD* đồng quy.

Giải:

Giải sử *AB, CD* cắt nhau tại *Q*, giả thiết *E, D, F, A* nằm trên đường tròn, ta có:



$\angle AFE=\angle ADE=180^0-\angle PDE$ (1)

$\angle EFD=\angle PED$ (*PE* là tiếp tuyến) (2)

$\angle FDQ=\angle PFC$ (*PF* là tiếp tuyến) (3)

$\angle QAF=\angle FCB=180^0-\angle PCF$ (4)

$\angle DAQ=\angle DCP$ (*ADCB* nội tiếp) (5)

$\angle QDA=180^0-\angle PDC$ (6)

$\Rightarrow \frac{\sin\angle AFE}{\sin\angle EFD}=\frac{\sin\angle PDE}{\sin\angle PED}=\frac{PE}{PD}, \frac{\sin\angle FDQ}{\sin\angle QAF}=\frac{\sin\angle PFC}{\sin\angle PCF}=\frac{PC}{PF}$,

$\frac{\sin\angle DAQ}{\sin\angle QDA}=\frac{\sin\angle DCP}{\sin\angle PDC}=\frac{PD}{PC}$.

PE, PF là tiếp tuyến $\Rightarrow PE=PF$

$\Rightarrow \frac{\sin\angle AFE}{\sin\angle EFD}\frac{\sin\angle FDQ}{\sin\angle QAF}\frac{\sin\angle DAQ}{\sin\angle QDA}=\frac{PE}{PD}\frac{PC}{PF}\frac{PD}{PC}=1$.

Theo định lí Ceva $\Rightarrow$ *AB, EF, CD* đồng quy.

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

1. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại I. Từ hai điểm A và E trên (O_1) kẻ tiếp tuyến AB và ED với (O_2), AE và DB cắt nhau tại P.

   Chứng minh rằng $\frac{AB}{AI} = \frac{ED}{EI}$ và $\widehat{AIP} + \widehat{EIP} = 180^0$.

2. Một đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và hai cạnh AB, AC tương ứng là M, N. Chứng minh rằng tam đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC nằm trên đoạn MN.

3. Cho điểm P trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $PC = 2BP$ và $\angle ABC = 45^0$, $\angle APC = 60^0$. Tính góc $\angle ACB$.

4. Cho tam giác ABC có $BC = 2(AC - AB)$, D là điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $\angle ABD = 2\angle ADB$ khi và chỉ khi $BD = 3CD$.

5. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Giả sử đường phân giác góc B cắt cạnh AC tại D thoả mãn $BC = BD + AD$. Tính góc $\angle BAC$. (Hong Kong 1998).

6. Cho tam giác ABC có: $3\angle ABC = \angle BAC$.

   Chứng minh $(BC + AC)(BC - AC)^2 = AC.AB^2$. (Malaysia 2000).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Bá Đang, *279 bài toán hình học phẳng Olympic các nước*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2013.

[2]. Nguyễn Bá Đang, *Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán lớp 9 tập 2*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2014.

[3]. Nguyễn Thủy Thanh, *Lịch sử toán học giản yếu*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2012.

[4]. Đoàn Quỳnh (CB), *Tài liệu chuyên toán Hình học 10*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010.

[5]. *Tạp chí Mathematical Excalibur*, Hongkong.

[6]. *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*, 2000-2010.

[7]. *Topics in Elementary Geometry*, Second Edition, 1980.

[8]. А.В. ШИА ПОВАЛЮВА, МАТЕМАТИКА В ЗАДАЦАХ, МНМО, 2009.

[9]. A.Y.Akopyan, *Geometry in Figures*, 2011.

[10]. *Crux Mathematiorum*, 1988-2007.

[11]. Martin Josfsson, *More Characterizations of Tangential Quadrilaterals*, 2008.

[12]. Nathan Altshiller Court, *College Geometry*, Dover Puplications, Inc, New York, 1995.

[13]. Paul Yiu, *Euclidean Geometry*, 2007.

[14]. Sotirios E.Louridas - Michael Th.Rassias, *Problem – Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry,* 2013.

[15]. Viktor Prasolov, *Problems in Palane and Solid Geometry*, 1989.

[16]. X.I Dechen, *Hình học mới của tam giác*, NXB Giáo dục, 1996.

[17]. Квант, математический журнал, 1986-2015.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3
Chương 1. Định lí Thales 5
Bài tập chương 1 35
Chương 2. Định lí Pythagoras 37
Bài tập chương 2 52
Chương 3. Định lí Ptolemy 53
Bài tập chương 3 74
Chương 4. Các định lí liên quan đến đường tròn Mixtilinear 75
Bài tập chương 4 87
Chương 5. Định lí Euler 88
Bài tập chương 5 108
Chương 6. Các định lí liên quan đến đường tròn nội tiếp, bàng tiếp 109
Bài tập chương 6 142
Chương 7. Các định lí liên quan đến đường đẳng giác, đường đối trung 143
Bài tập chương 7 163
Chương 8. Các định lí liên quan đến tứ giác. Tứ giác toàn phần 164
Bài tập chương 8 189
Chương 9. Định lí sin, định lí côsin và điểm Brocard 190
Bài tập chương 9 208
Tài liệu tham khảo 209

INDEX

bất đẳng thức Ptolemy, 54
Bổ đề Sawayama - Thebault, 77

công thức Heron, 191

điểm Brocard, 199
  Euler, 88
  Gergaune, 29
  Jacobi, 34
  Lemoine, 150
  Miquel, 165
  Torricelli Evangelista, 196
Định lí Brahmagupta, 171
  Brocard, 185
  Carnot, 49
  Casey, 67
  Ceva dưới dạng sin, 32
  Ceva mở rộng, 33
  Ceva, 28
  cosin, 190
  Desargues, 20
  Euler, 88
  Feuerbach, 90
  Hamilton, 90
  Menelaus, 18
  Newton, 181
  Pascal, 183
  Pittot, 181
  Ptolemy, 53
  Pythagoras, 38
Định lí Sawayama-Thebault, 77
  côsin, 190
  sin, 190
  Steiner, 144, 197
  Stewart, 100
  Thales, 6
  Van Aubel, 30
đường đẳng giác, 143
đường đối trung ngoài, 153
đường đối trung, 148
Đường thẳng Euler, 89
  Gauss, 166
  Simson, 130
  Steiner của tứ giác, 165
  Steiner, 133
đường tròn Apollonius, 103
  Euler, 88
  Miquel, 165

góc Brocard, 199

Hệ thức Feuerbach, 56

tứ giác điều hoà, 167
tứ giác toàn phần, 164

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên MẠC VĂN THIỆN
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập NGUYỄN THÀNH ANH
Giám đốc Công ty cổ phần Sách Giáo dục tại TP. Hà Nội CẤN HỮU HẢI

Biên tập nội dung và sửa bản in:
NGUYỄN HỌC THỨC

Trình bày bìa:
ĐỖ TRƯỜNG SƠN

Chế bản:
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH GIÁO DỤC TẠI TP. HÀ NỘI

Công ty Cổ phần Sách Giáo dục tại TP. Hà Nội – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

NHỮNG ĐỊNH LÍ CHỌN LỌC TRONG HÌNH HỌC PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Mã số: 8I648S6 – TTS

In 3.000 bản (QĐ: 06TK) khổ 17 x 24 cm
Đơn vị in: Công ty CP in & Truyền thông Kết Thành
Địa chỉ: Số 81, Tổ 6, Phường Phú Diễn, Quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội
Cơ sở in: Xóm 5A, ngõ 6, Phường Đông Ngạc, Quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội
Số ĐKXB: 214- 2016/CXBIPH/22-122/GD
Số QĐXB: 324/QĐ - GD - HN ngày 01/02/2016
In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2016