PHẠM MINH PHƯƠNG

Một số chuyên đề
TOÁN TỔ HỢP
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

575-2010/CXB/39-924/GD **Mã số : C3T09H0 - CPD**

Mục lục

Lời nói đầu

Toán học là môn học quan trọng trong chương trình phổ thông ở nước ta cũng như các nước trên thế giới. Việc giảng dạy và học tập môn Toán trong trường phổ thông không chỉ trang bị cho học sinh những kiến thức cụ thể áp dụng trong cuộc sống và trong các môn học khác mà quan trọng hơn là rèn luyện cho các em phương pháp tư duy lôgic, các kĩ năng làm việc hiệu quả, khả năng độc lập và năng lực sáng tạo. Điều đó sẽ giúp ích cho các em trong cả cuộc đời.

Việc phát hiện và bồi dưỡng học sinh năng khiếu môn Toán luôn là mối quan tâm lớn của mỗi quốc gia. Ở nước ta, ngay từ những năm 60 của thế kỉ XX, các lớp toán đặc biệt đã được thành lập nhằm bồi dưỡng những học sinh có năng khiếu toán học, phục vụ cho đất nước.

Bộ sách ***Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông*** (THPT) gồm các chuyên đề tự chọn đặc sắc theo chương trình dành cho chuyên Toán mà Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Bộ sách là kết tinh từ kinh nghiệm giảng dạy và bồi dưỡng học sinh năng khiếu của các thầy cô giáo ở Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, Trường THPT Chuyên Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội và Trường THPT Chuyên Bắc Giang, nhằm cung cấp cho các em học sinh một số kiến thức bổ sung, giúp các em hiểu sâu hơn sách giáo khoa, chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào đại học và thi học sinh giỏi THPT. Bộ sách gồm năm cuốn:

Một số chuyên đề Hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;
Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;
Một số chuyên đề Toán Tổ hợp bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;
Một số chuyên đề Giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;
Một số chuyên đề Hình học không gian bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.

Cuốn sách ***Một số chuyên đề Toán Tổ hợp bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*** gồm 10 chuyên đề và phần Bài tập tổng hợp. Các chuyên đề được tác giả sử dụng để giảng dạy chuyên đề cho học sinh lớp 10 toán và bồi dưỡng cho đội tuyển toán của Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm hằng năm. Trong mỗi chuyên đề, chúng tôi đều nhắc lại những phần lí thuyết thiết yếu, bổ sung những kiến thức không có hoặc được nhắc đến một cách sơ sài trong các sách giáo khoa phổ thông. Tiếp theo là các ví dụ minh hoạ cho phần lí thuyết. Chúng tôi cố gắng chọn lọc các ví dụ điển hình, dễ hiểu và đặc trưng nhất cho phần lí thuyết đó. Phần bài tập được chia thành hai phần: Bài tập luyện tập, có hướng dẫn giải hoặc có lời giải chi tiết để các bạn có thể so sánh, đối chiếu, rút kinh nghiệm và củng cố, đào sâu lí thuyết. Bài tập tự giải, gồm

một số bài toán tương tự như trong phần ví dụ và trong phần bài tập luyện tập, ngoài ra còn có những bài toán khó và rất khó dành cho những bạn có khả năng có thể tìm hiểu sâu hơn và có điều kiện phát triển tốt nhất khả năng của mình.
Phần Bài tập tổng hợp gồm những bài toán hay được chọn lọc, đòi hỏi những thao tác tư duy phức hợp, những quan sát tinh tế, khả năng phán đoán tốt và kĩ năng xử lí vấn đề cao để các bạn thử sức. Qua đó, chúng tôi hi vọng các bạn phần nào có thể thấy được vẻ đẹp của toán học và những thú vị của việc chinh phục các bài toán khó, từ đó tăng thêm tình yêu với môn thể thao trí tuệ bậc nhất này.

Cuốn sách sẽ là tài liệu bổ ích cho các bạn học sinh yêu thích môn toán, tự bồi dưỡng kiến thức môn Toán và cho các bạn ôn luyện chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp, tuyển sinh đại học và các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, quốc gia và cả quốc tế nữa. Cuốn sách cũng sẽ là tài liệu bổ ích cho các thầy cô giáo trong việc định hướng và bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.
Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để bộ sách được hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về Ban Toán - Tin Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

Các kí hiệu sử dụng trong sách

$\mathbb{N}$:	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$:	Tập các số tự nhiên khác 0
$\mathbb{Z}$:	Tập các số nguyên
$\mathbb{Q}$:	Tập các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$:	Tập các số thực
$\mathbb{E}^2$:	Tập các điểm của mặt phẳng
$\in$:	Thuộc
$\notin$:	Không thuộc
$\subset$:	Chứa trong
$\supset$:	Chứa
$\cup$:	Hợp
$\cap$:	Giao
$\sum_{i=1}^{n} a_i$:	Tổng của n phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$.
$\prod_{i=1}^{n} a_i$:	Tích của n phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$.
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$:	Hợp của họ n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$:	Giao của họ n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$

Chuyên đề 1

Tập hợp

Tập hợp là khái niệm nền tảng của toán học và nhiều ngành khoa học khác. Sử dụng lí thuyết tập hợp ta có thể diễn tả các khái niệm, các bài toán, đặc biệt là các bài toán rời rạc một cách sáng sủa, giúp cho việc tiếp cận và giải quyết các bài toán trở nên đơn giản hơn.

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm, tính chất và quy tắc của lí thuyết tập hợp, đồng thời đưa ra hệ thống bài tập củng cố các khái niệm, tính chất và các quy tắc đó nhằm giúp ta tiếp cận các chuyên đề sau hiệu quả, dễ dàng.

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.1 Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa. Thông thường người ta dùng khái niệm tập hợp để chỉ một nhóm các đối tượng đã được chọn ra, hay đã được quy định từ trước. Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng chữ in hay chữ viết hoa:

$$A, B, C, X, Y, Z...$$

Cho tập A. Một đối tượng x được nói đến trong A gọi là một phần tử của A. Kí hiệu: $x \in A$.

Quy ước: Tập rỗng $\varnothing$ là tập hợp không gồm phần tử nào cả. Tập $\varnothing$ là duy nhất.

Khi tập A có hữu hạn phần tử thì số phần tử của A kí hiệu là $|A|$ hay card$A$ (cardinal).

1.1.2 Các cách xác định tập hợp

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp

Ví dụ. Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10 là:

$$T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Quy ước, viết $T = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$.

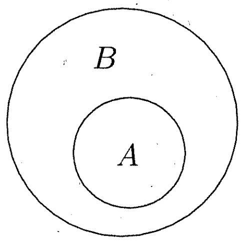
b) Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp

Ví dụ. Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10 là: $T = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$.

1.1.3 Tập con

Cho hai tập hợp A, B. Khi đó:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$



Tính chất

- $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- $A \subset A, \forall A$
- $\varnothing \subset A, \forall A$

1.1.4 Tập hợp bằng nhau

Cho hai tập hợp A, B. Khi đó:

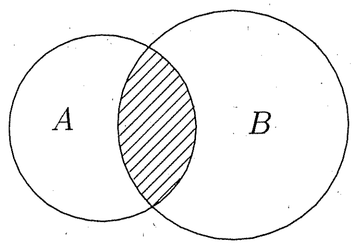
$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

Tính chất

(a) $A = A, \forall A$
(b) $A = B \Rightarrow B = A$
(c) $A = B, B = C \Rightarrow A = C$
(d) Cho A, B là hai tập cùng có n phần tử. Khi đó, nếu $A \subset B$ thì $A = B$

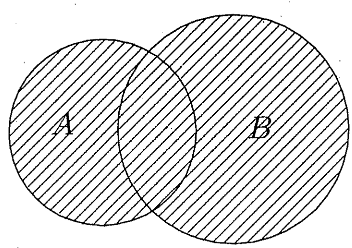
1.1.5 Giao của hai tập hợp

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}.$$



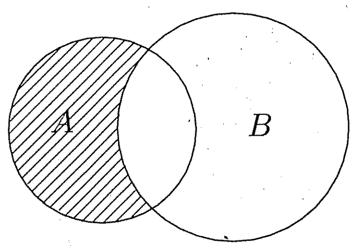
1.1.6 Hợp của hai tập hợp

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$



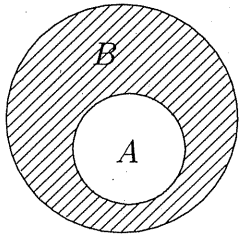
1.1.7 Hiệu của hai tập hợp

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$



1.1.8 Phần bù của hai tập hợp

Cho $A \subset B$. Phần bù của A trong B là tập $\overline{A} = B \setminus A$ hay $C_B^A = B \setminus A$.



1.1.9 Tích Đề-các

Định nghĩa: Cho n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét tập hợp A gồm tất cả các bộ n phần tử sắp thứ tự $(a_1, ..., a_n)$ trong đó $a_i \in A_i, \forall i = \overline{1, n}$. Tập A gọi là tích Đề các của n tập hợp $A_1, ..., A_n$ và kí hiệu là:

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n,$$

hay viết tắt là

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Như vậy

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \left\{(a_1, ..., a_n) | a_i \in A_i, \forall i = \overline{1, n}\right\}.$$

Tính chất

(a) $A \times B \neq B \times A, \forall A \neq B$.

(b) Giả sử $|A_i| = k_i, \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó: $\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} k_i$

1.1.10 Một số tính chất

(a) $(B \cap A) \subset B \subset (A \cup B)$ và $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Từ tính chất kết hợp nói trên cho phép ta định nghĩa giao của một họ các tập hợp:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n.$$

(d) $A \cup B = B \cup A$
(e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Từ tính chất kết hợp nói trên cho phép ta định nghĩa hợp của một họ các tập hợp:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n.$$

(f) Luật phân phối:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(g) $A \setminus A = \varnothing; A \setminus \varnothing = A$
(h) Công thức D'morgan:

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(B \setminus A_i\right) \text{ và } B \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B \setminus A_i\right)$$

Ví dụ 1. Chứng minh công thức D'morgan

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(B \setminus A_i\right) \text{ và } B \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B \setminus A_i\right)$$

Lời giải. Bài toán yêu cầu chứng minh hai tập hợp bằng nhau, ta sử dụng tính chất

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

- Chứng minh

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(B \setminus A_i\right).$$

Xét $x \in B \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$, ta có

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Suy ra

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin A_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

hay

$$x \in B \setminus A_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Do đó

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big).$$

Suy ra

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big). \quad (1)$$

Xét $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big)$, ta có

$$x \in B \setminus A_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Suy ra

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin A_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

hay

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Do đó

$$x \in B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Suy ra

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big).$$

• Chứng minh

$$B \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big).$$

Xét $x \in B \setminus \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\Big)$, ta có

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Suy ra $x \in B$ và tồn tại $1 \leq k \leq n$ sao cho $x \notin A_k$, hay $x \in B \setminus A_k$. Do đó

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big).$$

Suy ra

$$B \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big). \quad (3)$$

Xét $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big)$, khi đó tồn tại $1 \leq k \leq n$ sao cho $x \in B \setminus A_k$. Suy ra

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin A_k.$$

hay

$$x \in B \quad \text{và} \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Do đó

$$x \in B \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big).$$

Suy ra

$$B \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \supset \bigcup_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có

$$B \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(B \setminus A_i\Big).$$

Ví dụ 2.(Nguyên lí thêm bớt) Cho A, B là hai tập hợp hữu hạn. Chứng minh rằng

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Lời giải. Để chứng minh công thức trên ta sử dụng phương pháp liệt kê, xuất phát từ phần giao của hai tập hợp A và B. Giả sử $A \cap B = \{c_1; c_2; ...; c_p\}$ và

$$A = \{c_1; c_2; ...; c_p; a_1; a_2; ...; a_n\},\ B = \{c_1; c_2; ...; c_p; b_1; b_2; ...; b_m\}.$$

Khi đó

$$A \cup B = \{c_1; c_2; ...; c_p; a_1 a_2; ...; a_n; b_1; b_2; ...; b_m\}.$$

Suy ra

$$|A| = n + p, \quad |B| = m + p, \quad |A \cup B| = m + n + p.$$

Vậy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tổng quát. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được công thức sau đây

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|,$$

trong đó $n \geq 2$ và $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hữu hạn.

Ví dụ 3. Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $a + b$ là một số lẻ. Chia tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thành hai tập rời nhau A và B. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai phần tử x, y thuộc cùng một tập sao cho

$$|x - y| \in \{a; b\}.$$

Lời giải. Do các đối tượng trong A và B không xác định nên không thể xét tính chất của các phần tử của hai tập hợp này. Để giải bài toán này ta sử dụng phương pháp phản chứng. Với giả thiết phản chứng và điều kiện ban đầu nào đó ta sẽ liệt kê các phần tử thuộc A và B.
Giả sử phản chứng, không tồn tại hai phần tử x, y nào thuộc cùng một tập sao cho

$$|x - y| \in \{a; b\}.$$

Giả sử được $1 \in A$, ta có

$$1 + a,\ 1 + b \in B.$$

Suy ra

$$1 + 2a,\ 1 + 2b \in A.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{cases} 1+2ka,\ 1+2kb \in A \\ 1+(2k+1)a,\ 1+(2k+1)b \in B. \end{cases}$$

Do a, b khác tính chẵn lẻ nên

$$1+ab \in A \quad \text{và} \quad 1+ab \in B,$$

trái với giả thiết A, B là hai tập rời nhau.

Ví dụ 4. (MOSP - 1997) Chia tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thành hai tập rời nhau A và B. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại các số nguyên dương a, b khác nhau, lớn hơn n sao cho

$$\{a; b; a+b\} \subset A \quad \text{hoặc} \quad \{a; b; a+b\} \subset B.$$

Tương tự như ví dụ 3, để giải bài toán này ta sử dụng phương pháp phản chứng.

Lời giải 1. Nếu một trong hai tập A, B chứa ít hơn 2 phần tử lớn hơn n thì bài toán bài toán hiển nhiên đúng. Giả sử mỗi tập đều chứa không ít hơn 2 phần tử lớn hơn n và không có hai phần tử $a, b > n$ nào thoả mãn

$$\{a; b; a+b\} \subset A \quad \text{hoặc} \quad \{a; b; a+b\} \subset B.$$

Xét

$$a, b \in A \quad \text{và} \quad c, d \in B \quad (a, b, c, d > n).$$

Khi đó

$$c+d \in A \quad \text{và} \quad a+b \in B.$$

Ta có

$$a, b, c+d \in A \quad \text{và} \quad c, d, a+b \in B$$

nên

$$\begin{cases} a+b+c, a+b+d \in A \\ a+c+d, b+c+d \in B. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} (a+c+d)+(b+c+d) = a+b+2c+2d \in A \\ (a+b+c)+(a+b+d) = c+d+2a+2b \in B. \end{cases}$$

Do

$$\begin{cases} a+b+2c+2d = (a+b+c+d)+(c+d) \in A \\ c+d+2a+2b = (a+b+c+d)+(a+b) \in B \end{cases}$$

nên

$$a+b+c+d \in A \quad \text{và} \quad a+b+c+d \in B.$$

Suy ra $A \cap B \neq \varnothing$, vô lí.

Lời giải 2. Ta cũng giả thiết phản chứng rằng không tồn tại $a, b > n$ khác nhau sao cho

$$\{a; b; a+b\} \subset A \quad \text{hoặc} \quad \{a; b; a+b\} \subset B.$$

Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1. $|A| < +\infty$: Gọi m là phần tử lớn nhất của A thì

$$a+1, a+2, 2a+3 \in B, \forall a \geq m,$$

vô lí.
Trường hợp 2. $|A| = +\infty$, $B = +\infty$: Xét $x, y, z \in A$ sao cho $x > y > z > n$ và $y - z > n$. Khi đó

$$x+y, y+z, z+x \in B.$$

Suy ra $y - z \in A$, vô lí.

Lời giải 3. Giả thiết phản chứng rằng không tồn tại $a, b > n$ khác nhau sao cho

$$\{a; b; a+b\} \subset A \quad \text{hoặc} \quad \{a; b; a+b\} \subset B.$$

Một trong hai tập A hoặc B chứa phần tử $m > n$. Giả sử $m \in A$. Xét tập

$$X = \{2m; 3m; 4m; \ldots\}$$

Do $X \not\subset B$ nên tồn tại $a > 1$ sao cho $am \in A$. Khi đó

$$(a-1)m \in B \quad \text{và} \quad (a+1)m \in B.$$

Suy ra

$$2m = (a+1)m - (a-1)m \in A \quad \text{và} \quad 3m = m + 2m \in B.$$

Do đó $\{2m, am, (a+2)m\} \subset A$, vô lí.

Ví dụ 5. Cho tập $X = \{1; 2; 3; ...; 15\}$ và M là tập con của X sao cho tích của ba phần tử khác nhau bất kì của M đều không là số chính phương.

a) Hãy chỉ ra một tập M gồm 10 phần tử.

b) Hãy xác định số phần tử lớn nhất của M.

Lời giải.

a) Tập $M = \{1; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13; 14\}$ thoả mãn.

b) Ta chứng minh số phần tử lớn nhất của M là 10. Để đánh giá số phần tử của M, ta liệt kê các bộ ba phần tử của X có tích là số chính phương. Ta có các bộ ba phần tử có tích là số chính phương là:

$$(1; 4; 9), (2; 6; 12), (3; 5; 15), (7; 8; 14).$$

Mỗi bộ nói trên có ít nhất một phần tử không thuộc M nên $|M| \leq 11$. Giả sử tồn tại tập M có 11 phần tử. Khi đó, ta có $10 \in M$. Do đó, trong mỗi tập

$$\{2; 5\},\ \{6; 15\},\ \{1; 4; 9\},\ \{7; 8; 14\}$$

có ít nhất một phần tử không thuộc M. Suy ra: $3; 12 \in M$. Do đó, trong mỗi tập

$$\{1\},\ \{4\},\ \{9\},\ \{2; 6\},\ \{5; 15\},\ \{7; 8; 14\}$$

có ít nhất một phần tử không thuộc M. Suy ra: $|M| \leq 9$, vô lí.

1.2 Bài tập

1.2.1 Bài tập luyện tập

1. Chứng minh các tính chất sau của tập hợp

   a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

   b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

   c) $E \subset F \Leftrightarrow E \cap F = E \Leftrightarrow E \cup F = F$

   d) $E \setminus F = E \Leftrightarrow E \cap F = \varnothing$

   e) $E \setminus (E \setminus F) = F \Leftrightarrow F \subset E$

   f) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (A, B \subset X)$

   g) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ và $A \cap B = A$

   h) $A_i \subset A, \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$ và $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$.

2. Với mỗi tập X ta gọi $P(X)$ là tập tất cả các tập con của X. Chứng minh:
$$A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B).$$

3. Cho các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ sao cho $A_i \neq A_j, \forall i \neq j$. Chứng minh rằng có ít nhất một tập hợp A_i không chứa tập nào trong các tập còn lại.

4. Cho tập hợp $S \subset \mathbb{R}$ thoả mãn các tính chất sau:

   a) $S \supset \mathbb{Z}$;

   b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$;

   c) $\forall x, y \in S : x + y \in S,\ xy \in S$.

   Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

5. Cho $I = \{1, 2, ..., n\}$ và họ tập hợp $\{X_i\}_{i \in I}$. Với mỗi tập con H của I ta đặt
$$P_H = \bigcup_{i \in H} X_i, \quad Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i.$$
Đặt $H_k = \{M \subset I : |M| = k\}$ $(1 \leq k \leq n)$. Chứng minh:
$$\begin{cases} \bigcup\limits_{H \in H_k} Q_H \supset \bigcap\limits_{H \in H_k} P_H \text{ nếu } k \leq \dfrac{n+1}{2} \\ \bigcup\limits_{H \in H_k} Q_H \supset \bigcap\limits_{H \in H_k} P_H \text{ nếu } k \geq \dfrac{n+1}{2}. \end{cases}$$

6. Cho tập $X = \{1; 2; 3; ...; 9\}$. Chia tập X thành hai tập con rời nhau A và B. Chứng minh rằng với mọi cách chia, luôn tồn tại một tập chứa ba số lập thành một cấp số cộng.

7. Chứng minh rằng, có thể chia tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ thành hai tập con A, B có cùng lực lượng sao cho mọi số $n \in \mathbb{N}$ tồn tại duy nhất cặp số $(a, b) \in A \times B : n = a + b$.

8. (CHDC Đức, 1970). Cho tập M có 22222 phần tử. Hỏi M có hay không 50 tập con $M_i, i = \overline{1, 50}$ thoả mãn các điều kiện sau:

   a) Mỗi phần tử của M đều là phần tử của ít nhất một trong các tập con M_i.

   b) Mỗi tập M_i đều có đúng 1111 phần tử.

   c) Với hai tập $M_i,\ M_j$ bất kì $(i \neq j)$, giao $M_i \cap M_j$ có đúng 22 phần tử.

9. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; 16\}$. Tập con A của X gọi là có tính chất T nếu A không chứa ba phần tử nào đôi một nguyên tố cùng nhau.

   a) Hãy chỉ ra một tập con A của X gồm 10 phần tử và có tính chất T?

   b) Hãy tìm số phần tử lớn nhất của tập con A của X có tính chất T?

10. Cho n là số nguyên dương, $n > 5$. Tập $X = \{1; 2; 3; ...; n\}$ gọi là có tính chất T nếu có thể chia X thành hai tập con rời nhau A, B khác rỗng sao cho với ba phân tử bất kì thuộc cùng một tập thì tích của hai phần tử trong ba phần tử đó khác phần tử còn lại. Chẳng hạn, khi $n = 6$ thì X có tính chất T và $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{4; 5; 6\}$.

    a) Chứng minh rằng với mọi $7 \leq n \leq 41$, tập X có tính chất T.

    b) Chứng minh rằng với mọi $42 \leq n \leq 47$, tập X vẫn có tính chất T

    c) Hãy xác định n lớn nhất sao cho tập X có tính chất T?

11. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; ...; 3^n\}$ $(n \geq 2)$.

    a) Hãy chỉ ra một tập con B của A có 2^n phần tử sao cho không có ba phần tử nào của B lập thành một cấp số cộng khi $n = 2$.

    b) Chứng minh rằng, với mọi $n \geq 2$, tồn tại tập con B của A có 2^n phần tử sao cho không có ba phần tử nào của B lập thành một cấp số cộng.

12. Cho hai dãy tập hợp (A_n) và (B_n) thoả mãn:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \varnothing,\ B_1 = \{0\},\\
&A_{n+1} = \{x + 1 \mid x \in B_n\},\\
&B_{n+1} = (A_n \cup B_n) \setminus (A_n \cap B_n), \forall n \geq 1.
\end{aligned}
$$

    a) Xác định các tập A_n, B_n với $n = 2, 3, 4$.

    b) Xác định n sao cho $B_n = \{0\}$.

13. Cho tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2009\}$ và hai tập con A, B có tổng số phần tử lớn hơn 2010. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một phần tử của A và một phần tử của B có tổng bằng 2010.

14. Cho tập hữu hạn X. Ta chọn ra 50 tập con $A_1, A_2, ..., A_{50}$, mỗi tập đều chứa quá nửa số phần tử của X. Chứng minh rằng, tồn tại tập con A của X sao cho số phần tử của A không vượt quá 5 và $A \cap A_i \neq \varnothing, \forall i = \overline{1, 50}$.

15. Một lớp học có số học sinh được xếp loại Giỏi ở mỗi môn học (trong số 11 môn học) đều vượt qua 50%. Chứng minh rằng có ít nhất 3 học sinh được xếp loại Giỏi từ 2 môn trở lên (số học sinh của lớp không ít hơn 10).

16. Cho n nguyên dương. Xét tập
$$M = \{x = (x_1; x_2; ...; x_n) \mid x_i \in \{-1; 1\}, \forall i = \overline{1, n}\}.$$
Với hai phần tử $a = (a_1; a_2; ...; a_n)$ và $b = (b_1; b_2; ...; b_n)$ thuộc M, ta định nghĩa
$$ab = (a_1 b_1; a_2 b_2; ...; a_n b_n).$$
Với $a \in M$ và $X \subset M$, ta định nghĩa
$$aX = \{ax \mid x \in X\}.$$
Chứng minh rằng với mỗi tập con A gồm k phần tử của M đều tồn tại phần tử $a \in M$ sao cho
$$|A \cap aA| \leq \frac{k^2}{2^n}.$$

17. Cho tập $S_n = \{1; 2; ...; n\}$. Ta định nghĩa phép toán $(*)$ trên S_n thoả mãn các điều kiện sau:

    a) $\forall a, b \in S_n : a * b \in S_n$.

    b) Nếu $ab \leq n$ thì $a * b = ab$.

    c) $\forall a, b \in S_n : a * b = b * a$ (tính chất giao hoán).

    d) $a * (b * c) = (a * b) * c$ (tính chất kết hợp).

    e) Nếu $a * b = a * c$ thì $b = c$ (luật giản ước).

    Hãy xây dựng phép toán $(*)$ khi $n = 11$ và $n = 12$.

18. (VMO-2005) Tìm hiểu kết quả học tập ở một lớp học người ta thấy:

    a) Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lí.

    b) Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật lí cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Văn.

c) Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử.

d) Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán.

Chứng minh rằng trong lớp có ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn Toán, Vật lí, Văn và Lịch sử.

1.2.2 Bài tập tự giải

1. Cho A và B là các tập hợp khác rỗng và có hữu hạn phần tử. Biết rằng số phần tử nằm trong cả A và B bằng một phần ba số phần tử của A và hợp của A và B gồm 9 phần tử. Tìm số phần tử của mỗi tập?

2. Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 49\}$. Tìm số k lớn nhất sao cho tồn tại tập con M của X có k phần tử và không chứa sáu số liên tiếp nào.

3. Cho 2011 tập hợp $A_1, A_2, ..., A_{2011}$ các số nguyên thoả mãn các điều kiện sau:

   a) $|A_k| = 2010, \forall k = \overline{1; 2011}$.

   b) $A_k \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^{2011} A_i\right) \setminus A_k, \forall k = \overline{1; 2011}$.

   c) $|A_k \cap A_m| = 1, \forall k \neq m$.

   Chứng minh rằng với số nguyên x bất kì, hoặc x không nằm trong tập hợp A_i nào hoặc x nằm trong đúng hai tập.

4. (Tiệp Khắc - 1973). Có bao nhiêu cặp tập con không giao nhau của một tập hợp X gồm n phần tử.

   Đáp số : $\dfrac{3^n + 1}{2}$.

5. Cho tập X gồm n phần tử. Với mỗi cặp tập con A_1, A_2 của X ta tính số phần tử của $A_1 \cap A_2$. Chứng minh rằng tổng của tất cả các số nhận được bằng $n.4^{n-1}$.

6. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho với mỗi tập hợp tùy ý có n phần tử, luôn tìm được 2004 tập con đôi một không rời nhau.

7. Cho các số nguyên dương k và n thoả mãn $n > k^2 - k + 1$. Xét n tập $A_1, A_2, ..., A_n$ thoả mãn các điều kiện sau

   i) $|A_i| = k, \forall i = \overline{1, n}$.

   ii) $|A_i \cap A_j| = 2k - 1, \forall i \neq j$.

   a) Chứng minh rằng $|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = 1$.

   b) Tính số phần tử của $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

8. Cho P là một tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện:

   a) $\forall a, b \in P: \ a + b \in P$.

   b) $\forall q \in \mathbb{N}^*, q > 1, \exists c \in P$ sao cho c không chia hết cho q.

   Chứng minh rằng tập $\mathbb{N}^* \setminus P$ là một tập hữu hạn.

9. Cho 100 tập hợp đôi một khác nhau sao cho cứ 10 tập bất kì thì có hai tập A, B mà $A \subset B$ và với ba tập A, B, C bất kì thoả mãn $B \subset A$ và $C \subset A$ thì $B \subset C$ hoặc $C \subset A$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 12 tập $A_1, A_2, ..., A_{12}$ trong số các tập đã cho sao cho

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_{12}.$$

10. (MOSP 1999) Cho X là tập gồm hữu hạn số nguyên dương và A là tập con của X. Chứng minh rằng tồn tại tập con B của X sao cho mỗi phần tử của A đều chia hết cho một số lẻ phần tử thuộc B.

11. Xác định số nguyên dương k sao cho tập hợp

$$X = \{1990; 1991; 1992; ...; 1990 + k\}$$

   có thể chia thành hai tập rời nhau A và B sao cho tổng các phần tử của A bằng tổng các phần tử của B.

   Đáp số : $k \equiv 3 \pmod 4$ hoặc $k \equiv 0 \pmod 4$ và $k \geq 92$.

12. (AIME 1989) Cho tập $X = \{1; 2; 3; ...; 1989\}$. Xét tập $S \subset X$ thoả mãn: không có hai phần tử nào của S hơn kém nhau 4 hoặc 7 đơn vị. Hỏi số phần tử lớn nhất của S là bao nhiêu?

13. Cho n là số nguyên dương. Chia tập $X = \{1; 2; ...; 2n\}$ thành hai tập A, B rời nhau. Giả sử các phần tử của A là

$$a_1 < a_2 < ... < a_n$$

và các phần tử của B là

$$b_1 > b_2 > ... > b_n.$$

Chứng minh rằng

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = n^2.$$

14. (China 1996) Cho 11 tập hợp $M_1, M_2, ..., M_{11}$, mỗi tập có 5 phần tử và thoả mãn

$$M_i \cap M_j \neq \varnothing, \forall 1 \leq i < j \leq 11.$$

Gọi m là số lớn nhất sao cho tồn tại các tập

$$M_{i_1}, M_{i_2}, ..., M_{i_m}$$

trong số các tập đã cho sao cho

$$\bigcap_{k=1}^{m} M_{i_k} \neq \varnothing.$$

Hỏi giá trị nhỏ nhất của m là bao nhiêu?

Đáp số : $m = 4$.

15. Cho tập X gồm n phần tử ($n \geq 1$) và $A_1, A_2, ..., A_m$ là m tập con của X ($m \geq 1$) thoả mãn các điều kiện sau

a) $|A_i| = 3, \forall i = \overline{1, n}$.

b) $|A_i \cap A_j| \leq 1, \forall i \neq j$.

Chứng minh rằng tồn tại tập con A của X sao cho $|A| \geq [\sqrt{2n}]$ và A không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, ..., A_m$ đã cho.

16. Chứng minh rằng có thể chia tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thành hai tập rời nhau A và B sao cho A không chứa cấp số cộng gồm 3 phần tử nào và B không chứa cấp số cộng gồm vô hạn phần tử nào.

17. Cho n là số nguyên dương. Chia tập hợp $X = \{1; 2; 3; ...; 3n\}$ thành ba tập rời nhau A, B và C, mỗi tập có n phần tử. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ mỗi tập một phần tử sao cho trong ba phần tử đó, có một phần tử bằng tổng của hai phần tử còn lại.

18. (CZE 1994) Chia tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thành n tập rời nhau

$$\mathbb{N}^* = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

Chứng minh rằng tồn tại tập A_p trong số n tập A_i nói trên sao cho tồn tại số nguyên dương m và với mọi số nguyên dương k ta có thể tìm được k phần tử $a_1, a_2, ..., a_k$ thuộc A_p mà

$$0 < a_{i+1} - a_i \leq m, \forall i = \overline{1, k-1}.$$

19. (China 1999) Cho tập A gồm n phần tử và $A_1, A_2, ..., A_n$ là n tập con của A thoả mãn:

$$|A_i| \geq 2, \forall 1 \leq i \leq n$$

Biết rằng, với mọi tập con C của A gồm hai phần tử, tồn tại tập A_i sao cho $C \subset A_i$. Chứng minh rằng

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

20. (Iran 1999) Cho tập $S = \{1; 2; 3; ...; n\}$ $(n \geq 2)$ và $A_1, A_2, ..., A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1 \leq p, q, r, s \leq k$ ta có

$$|A_p \cup A_q \cup A_r \cup A_s| \leq n - 2.$$

Chứng minh rằng $k \leq 2^{n-2}$.

21. (IMO Shortlist 1996) Cho k, m, n là các số nguyên dương thoả mãn $1 < n \leq m - 1 \leq k$. Hãy xác định số phần tử nhiều nhất của tập con S của tập $X = \{1; 2; 3; ...; k\}$ sao cho không có n phần tử nào của S có tổng vượt quá m.

1.3 Hướng dẫn giải bài tập

1. a) Xét $x \in A \cup (B \setminus A)$, ta có

$$x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in B \setminus A.$$

Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup B$. Nếu $x \in B \setminus A$ thì $x \in B$ nên $x \in A \cup B$. Trong cả hai trường hợp ta đều có $x \in A \cup B$. Do đó

$$A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B. \quad (1)$$

Xét $x \in A \cup B$, ta có

$$x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in B.$$

Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup (B \setminus A)$. Nếu $x \notin A$ thì do $x \in B$ nên $x \in (B \setminus A)$. Do đó $x \in A \cup (B \setminus A)$. Suy ra

$$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

f) Xét $x \in \overline{A \cap B}$, ta có $x \notin A \cap B$. Suy ra $x \notin A$ hoặc $x \notin B$ hay $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$. Do đó, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Suy ra

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (1)$$

Xét $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, ta có $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$ hay $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Suy ra $x \notin A \cap B$ hay $x \in \overline{A \cap B}$. Do đó

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bạn đọc tự chứng minh các tính chất còn lại.

2. Giả sử $A \subset B$. Ta chứng minh $P(A) \subset P(B)$. Thật vậy, xét $M \in P(A)$, ta có

$$M \subset A \Rightarrow M \subset B \Rightarrow M \in P(B).$$

Do đó, $P(A) \subset P(B)$.

Giả sử $P(A) \subset P(B)$. Ta chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, xét $x \in A$, ta có

$$\{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow x \in B.$$

Do đó, $A \subset B$. $\square$

3. Giả sử $\forall i, \exists j : A_i \supset A_j$. Khi đó có thể đánh số lại các tập hợp sao cho:

$$A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset ... \supset A_{i_n} \supset ...$$

Suy ra, có nhiều hơn n tập hợp A_i, vô lí.

4. Ta có $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$ nên

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in S.$$

Suy ra $2\sqrt{6} \in S$ và

$$2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} \in S.$$

Suy ra

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}) \in S.$$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in S.$ □

5. Trường hợp $k \le \dfrac{n+1}{2}$: Xét $x \in \bigcap\limits_{H \in H_k} P_H$, ta có

$$x \in P_H, \forall H \in H_k.$$

Giả sử $x \notin \bigcup\limits_{H \in H_k} Q_H$. Khi đó, $x \notin Q_H, \forall H \in H_k$. Suy ra, không có k tập nào cùng chứa X và như vậy có ít nhất $n-(k-1)$ tập không chứa x.

Vì $n - (k-1) \ge \dfrac{n+1}{2} \ge k$ nên $\exists H \in H_k : X \notin P_H$: vô lí.

Trường hợp $k \ge \dfrac{n+1}{2}$: Xét $x \in \bigcup\limits_{H \in H_k} Q_H$. Khi đó, tồn tại $H^* \in H_k$ sao cho $x \in Q_{H^*}$. Do đó

$$X \subset X_i, \forall i \in H^*.$$

Ta chứng minh $x \in \bigcap\limits_{H \in H_k} P_H$. Điều đó tương đương với việc chứng minh

$$\forall H \in H_k, \exists i \in H : X \subset X_i.$$

Xét $H \in H_k$, vì $k \ge \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n}{2}$ nên $H \cap H^* \ne \varnothing$. Do đó, tồn tại $i \in H \cap H^*$ hay $X_i \supset X$. □

6. Giả sử phản chứng, không có tập nào chứa ba số lập thành một cấp số cộng. Giả sử được $3 \in A$. Xét ba cấp số cộng

$$(1;3;5),\ (3;4;5),\ (3;5;7)$$

ta suy ra $5 \in B$.

Xét ba cấp số cộng

$$(3;5;7),\ (5;6;7),\ (5;7;9)$$

ta suy ra $7 \in A$.

Xét ba cấp số cộng

$$(1;4;7),\ (2;3;4),\ (2;5;8),\ (7;8;9)$$

ta suy ra $4 \notin A$ và $4 \notin B$, vô lí. □

7. A là tập các số có chữ số tận cùng khác 0 và số 0, B là tập các số có chữ số tận cùng bằng 0

8. Giả sử M có 50 tập con M_i thoả mãn các yêu cầu bài toán. Ta có

$$M = \bigcup_{i=1}^{50} M_i.$$

Đặt $T_k = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$, ta có

$$\begin{aligned} |T_2| &= |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = 1111.2 - 22 \\ |T_3| &= |T_2| + |M_3| - |T_2 \cap M_3| \\ &= |T_2| + |M_3| - |(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M3)| \geq 1111.3 - 3.22 \end{aligned}$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$|T_k| \geq 1111.k - \frac{k(k-1)}{2}.22.$$

Suy ra

$$|M| = |T_{50}| \geq 1111.50 - 25.49.22 = 28600,$$

trái với giả thiết $|M| = 22222$.

9. a) Để chỉ ra tập con A của X gồm 10 phần tử có tính chất T, đầu tiên ta chọn 8 phần tử chẵn: $2; 4; 6; ...; 16$. Bây giờ chỉ việc chọn hai phần tử lẻ sao cho chúng không nguyên tố cùng nhau (chẳng hạn 3 và 9) ta được tập A thoả mãn.

   b) Giả sử tập A có tính chất T. Để đánh giá số phần tử của A, trước tiên ta liệt kê các phần tử của X đôi một nguyên tố cùng nhau:

$$Y = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13\}.$$

   Do $|X \setminus Y| = 9$ nên nếu xét 12 phần tử bất kì của X thì có ba phần tử thuộc Y. Suy ra $|A| \leq 11$.

   Dễ thấy tập $A = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16\}$ gồm 11 phần tử và có tính chất T.

   Vậy số phần tử lớn nhất của tập con A của X có tính chất T là 11.

10. a) Với $7 \leq n \leq 41$, tập X có tính chất T và

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}, \quad B = \{6; 7; ...; n\}.$$

   b) Với $42 \leq n \leq 47$, ta có

$$A = \{2; 3; 4; 5; 7\}, \quad B = \{6; 8; 9; 10; ...; 47\}.$$

   c) Xét $n \geq 48$. Giả sử được $2 \in A$. Ta xét các trường hợp

   Trường hợp 1. Các phần tử $3; 4$ thuộc A. Khi đó: $6; 8; 12 \in B$. Nếu $n \geq 96$ thì $48; 72; 96 \in A$. Suy ra $2; 48; 96 \in A$, vô lí. Do đó $n \leq 95$.

   Trường hợp 2. Các phần tử $3; 4$ thuộc B. Khi đó: $12 \in A$ và $6 \in B$. Do $4; 6 \in B$ nên $24 \in A$. Suy ra $2; 12; 24 \in A$, vô lí.

   Trường hợp 3. Các phần tử $3 \in A, 4 \in B$. Khi đó: $6 \in B, 24 \in A$, $48 \in A$. Suy ra $2; 24; 48 \in A$, vô lí.

   Trường hợp 4. Các phần tử $3 \in B, 4 \in A$. Khi đó, $8 \in B, 24 \in A$, $6 \in B, 48 \in B$. Suy ra $6; 8; 48 \in B$, vô lí.

   Từ các trường hợp trên ta suy ra $n \leq 96$. Bây giờ ta chỉ rằng với $n = 95$ thì X có tính chất T. Thậy vậy, khi đó

$$A = \{6; 8; 9; 10; ...; 47\}, \quad B = X \setminus A.$$

11. a) Khi $n = 2$, ta có tập $B = \{1; 3; 4; 6\}$ thoả mãn.

b) Giả sử bài toán đúng với $n = k$. Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Xét tập
$$A = \{1; 2; 3; ...; 3^{k+1}\}.$$
Chia A thành các tập
$$\begin{aligned} B &= \{1; 2; 3; ...; 3^k\}, \\ C &= \{3^k + 1; 3^k + 2; ...; 2.3^k\}, \\ D &= \{2.3^k + 1; 2.3^k + 2; ...; 3^{k+1}\}. \end{aligned}$$
Theo giả thiết quy nạp thì từ mỗi tập B và D ta chọn được 2^k phần tử mà không có ba phần tử nào cùng thuộc một tập lập thành cấp số cộng. Mặt khác, xét $b \in B$ và $d \in D$, ta có $\dfrac{b+d}{2} \in C$. Suy ra tập $B \cup D$ gồm 2^{k+1} phần tử thoả mãn yêu cầu bài toán. □

12. a) Với $n = 2$, ta có
$$A_2 = \{x + 1|\ x \in B_1\} = \{1\}, \quad B_2 = A_1 \cup B_1 - A_1 \cap B_1 = \{0\}.$$
Với $n = 3$, ta có
$$A_3 = \{1\}, \quad B_3 = \{0; 1\}.$$
Với $n = 4$, ta có
$$A_4 = \{1; 2\}, \quad B_4 = \{0\}.$$
b) Ta chứng minh $B_n = \{0\}$ khi và chỉ khi $n = 2^k$. Thật vậy, dễ thấy
$$0 \notin A_n \text{ và } 0 \in B_n, \forall n \geq 1.$$
Với mỗi tập X, và số nguyên k, ta kí hiệu
$$kX = \{kx \mid x \in X\}, \quad X + k = \{x + k \mid x \in X\}.$$
Bằng qui nạp ta chứng minh được với mọi $n \geq 2$ ta có:
$$\begin{aligned} A_{2n-1} &= 2A_n - 1, \\ B_{2n-1} &= A_{2n-1} \cup B_{2n}, \\ B_{2n} &= 2B_n \end{aligned}$$
và $1 \in B_{2n-1}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

13. Giả sử không có hai phần tử nào thoả mãn yêu cầu bài toán. Giả sử

$$A = \{a_1; a_2; ...; a_p\}, \quad B = \{b_1; b_2; ...; b_q\},$$

trong đó $p, q \geq 1$ và $p + q > 2010$.

Xét $C = \{c_1; c_2; ...; c_p\}$, trong đó $c_i = 2010 - a_i, \forall i = \overline{1,p}$. Ta có $C \subset X$. Theo giả thiết phản chứng ta suy ra

$$B \cap C = \varnothing.$$

Do đó

$$|B| + |C| = |B \cup C| \leq 2009.$$

Suy ra $p + q < 2010$, vô lí.

14. Giả sử $|X| = n$. Tổng số phần tử của 50 tập con A_i lớn hơn $25n$ nên tồn tại một phần tử a thuộc ít nhất 26 tập, chẳng hạn là $A_1, ..., A_{26}$. Xét 24 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử b thuộc ít nhất 13 tập, chẳng hạn $A_{27}, ..., A_{39}$. Xét 11 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử c thuộc ít nhất 6 tập, chẳng hạn $A_{40}, ..., A_{45}$. Xét 5 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử d thuộc ít nhất 3 tập, chẳng hạn $A_{46}, ..., A_{48}$. Xét hai tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử e thuộc ít nhất hai tập, chẳng hạn là A_{49}, A_{50}. Dễ thấy tập con $A = \{a, b, c, d, e\}$ thỏa mãn.

15. Gọi $A_1, A_2, ..., A_{11}$ là các tập hợp học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi mỗi môn học và $a_1, a_2, ..., a_n$ là số phần tử của $A_1, ..., A_{11}$. Gọi m là số học sinh ($m \geq 10$). Theo giả thiết thì $a_i > \dfrac{m}{2}, \forall i = \overline{1,11}$. Suy ra $A_i \cap A_j \neq \varnothing, \forall i \neq j$.

Trường hợp 1. Tập $A_1 \cap A_2$ có không ít hơn 3 phần tử, ta có đpcm.

Trường hợp 2. Tập $A_1 \cap A_2$ chỉ có 1 phần tử A. Số phần tử còn lại của $A_1 \cup A_2$ (không kể A) là :

$$s = a_1 - 1 + a_2 - 1 > \frac{m}{2} - 1 + \frac{m}{2} - 1 = m - 2 \Rightarrow s \geq m - 1.$$

Xét A_3. Do $s \geq m - 1$ nên

$$|A_3 \cap ((A_1 \backslash \{A\}) \cup (A_2 \backslash \{A\}))| \geq \frac{m}{2} - 1 \geq 4,$$

ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 3. Tập $A_1 \cap A_2$ có 2 phần tử. Xét tương tự trường hợp trên.

16. Giả sử phản chứng

$$|A \cap aA| > \frac{k^2}{2^n}, \forall a \in M.$$

Khi đó

$$\sum_{a \in M} |A \cap aA| > k^2 \quad (1).$$

Với mỗi phần tử $x \in A$, gọi $n(x)$ là số phần tử $a \in M$ sao cho $x = ac$ với $c \in A$. Ta có

$$\sum_{a \in M} |A \cap aA| = \sum_{x \in A} n(x).$$

Do $x = ac$ tương đương với $a = cx$ nên $n(x) \leq |A| = k$. Do đó

$$\sum_{x \in A} n(x) \leq k^2.$$

Suy ra

$$\sum_{a \in M} |A \cap aA| \leq k^2,$$

trái với (1). □

17. Trước tiên ta xét $n = 12$. Để tính $c = a * b$, ta viết ab dưới dạng

$$ab = 13k + r, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq r < 13.$$

và đặt $c = r$.

Do $1 \leq a \leq 12$ và $1 \leq b \leq 12$ nên $c \neq 0$. Do đó $1 \leq c \leq 12$ hay $c \in S_{12}$. Dễ dàng kiểm tra phép toán $(*)$ xác định như trên thoả mãn.

Xét $n = 11$. Ta xây dựng ánh xạ f từ tập $S = \{1; 2; ...; 11\}$ lên tập $T = \{0; 1; 2; ...; 10\}$ như sau:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(n)	0	1	4	2	6	5	9	3	8	7	10

Bây giờ ta định nghĩa phép toán $(*)$: Nếu $f(a) + f(b) \leq 10$ thì đặt $a * b = c$, trong đó $c \in S$ sao cho

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Nếu $f(a) + f(b) > 10$ thì đặt $a * b = c$, trong đó $c \in S$ sao cho

$$f(c) = f(a) + f(b) - 11.$$

Dễ thấy phép toán $(*)$ được xây dựng như trên tồn tại và thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bạn đọc hãy lí giải cách xây dựng hàm f nói trên.

18. Kí hiệu A, B, C, D tương ứng là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Vật lí, Văn và Lịch sử. Ta có

$$|A \cap B| > \frac{2}{3}|A|, \quad |B \cap C| > \frac{2}{3}|B|,$$
$$|C \cap D| > \frac{2}{3}|C|, \quad |D \cap A| > \frac{2}{3}|D|.$$

Xét tổng $S = |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap D| + |D \cap A|$. Ta có

$$S > \frac{2}{3}\left(|A| + |B| + |C| + |D|\right).$$

Áp dụng tính chất

$$|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|,$$

ta suy ra

$$S > \frac{1}{3}\left(S + |A \cup B| + |B \cup C| + |C \cup D| + |D \cup A|\right)$$

hay

$$S > \frac{1}{2}\left(|A \cup B| + |B \cup C| + |C \cup D| + |D \cup A|\right) \quad (1).$$

Giả sử không có học sinh nào đạt điểm giỏi ở cả bốn môn. Khi đó

$$A \cap C = \varnothing \quad \text{hoặc} \quad B \cap D = \varnothing.$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $A \cap C = \varnothing$. Khi đó:

$$(A \cap B) \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = \varnothing,$$
$$(C \cap D) \cap (D \cap A) = (A \cap C) \cap D = \varnothing.$$

Ta có

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset B$$
$$(C \cap D) \cup (D \cap A) \subset D.$$

Suy ra

$$|A \cap B| + |B \cap C| \leq |B|$$
$$|C \cap D| + |D \cap A| \leq |D|.$$

Suy ra

$$S \leq |B| + |D|.$$

Để ý rằng

$$|X \cup Y| \geq |X|, \forall X, Y$$

ta có

$$|B| + |D| < \frac{1}{2}\left(|A \cup B| + |B \cup C| + |C \cup D| + |D \cup A|\right)$$

hay

$$S < \frac{1}{2}\left(|A \cup B| + |B \cup C| + |C \cup D| + |D \cup A|\right),$$

trái với (1).

Chuyên đề 2

Phép đếm

Phép đếm có vai trò rất quan trọng trong đời sống cũng như trong khoa học. Trong đời sống, hàng ngày ta thường xuyên phải đếm các đối tượng nào đó và vì thế phép đếm dường như quá quen thuộc và không có gì phải bàn đến. Tuy nhiên, trong các kì thi đại học cũng như các kì thi học sinh giỏi, bài toán đếm gây không ít khó khăn cho các thí sinh. Ở đó, ta bắt gặp những bài đếm thiếu và có cả những bài đếm thừa.

2.1 Các nguyên lí cơ bản

1. **Nguyên lí bù trừ.** Cho X là một tập hữu hạn và $A \subset X$. Gọi $\overline{A} = X \backslash A$. Khi đó, ta có $|\overline{A}| = |X| - |A|$.

2. **Nguyên lí cộng.** Nếu A và B là hai tập hợp không giao nhau thì

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Do đó, nếu công việc X có hai phương án thực hiện là A, B và A có a cách thực hiện, B có b cách thực hiện thì số cách thực hiện công việc X là $x = a + b$.

Tổng quát : Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập rời nhau. Khi đó,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \bigcup_{i=1}^{n} |A_i|.$$

3. **Nguyên lí nhân.** Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì

$$|A \times B| = |A|.|B|.$$

Do đó, nếu công việc X phải thực hiện lần lượt qua hai giai đoạn A và B, trong đó giai đoạn A có a cách thực hiện, giai đoạn B có b cách thực hiện thì số cách thực hiện công việc X là $x = ab$.

Tổng quát : Cho n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$. Khi đó,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

4. **Nguyên lí thêm bớt**. Cho hai tập hợp A và B hữu hạn. Khi đó, ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tổng quát : Cho n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$. Khi đó,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|.$$

Ví dụ 1. Xét tập hợp $X = \{1; 2; 3; ...; 2009\}$. Đặt

$$A = \{x \in X : \ x \equiv 1 \pmod{29}\}.$$

a) Tính $|A|$.
b) Tìm số tập con B của X sao cho $B \cap A \neq \varnothing$.

Lời giải.
a) Xét $x \in A$, ta có $x \equiv 1 \pmod{29}$ nên $x = 1 + 29k$. Ta có

$$1 \leq x \leq 2009 \Rightarrow 0 \leq k \leq 69.$$

Vậy $|A| = 70$.
b) Để đếm số tập con B của X thoả mãn yêu cầu bài toán ta sử dụng nguyên lí bù trừ. Gọi $P(X)$ là tập bao gồm tất cả các tập con của X, M là tập các tập con B của X sao cho $B \cap A \neq \varnothing$. Khi đó, $P(X) \setminus M$ là tập các tập con B của X mà $B \cap A = \varnothing$ hay $B \subset X \setminus A$. Suy ra $P(X) \setminus M = P(X \setminus A)$. Do đó $|M| = |P(X)| - |P(X \setminus A)| = 2^{2009} - 2^{2009-70} = 2^{2009} - 2^{1939}$.

Ví dụ 2. Cho n là số nguyên dương. Xét số $A = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$, với $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố phân biệt. A có bao nhiêu ước số dương phân biệt?

Lời giải. Kí hiệu $A_i = \{0; 1; 2; ...; \alpha_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Mỗi ước số a của A có dạng $a = p_1^{x_1}.p_2^{x_2}...p_n^{x_n}$, trong đó $x_i \in A_i$. Do đó, số ước số của A là số phần tử của tích Đề các $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Sử dụng nguyên lí nhân ta có số ước số của A là

$$S = |A_1|.|A_2|...|A_n| = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1).$$

Ví dụ 3. Cho tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2010\}$. Hỏi có bao nhiêu phần tử của X là bội của ít nhất một phần tử của tập $T = \{2; 3; 5; 7\}$.

Lời giải. Kí hiệu M là tập các phần tử của X là bội của ít nhất một phần tử của tập T và

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : x \equiv 0 \pmod 2\}, & B &= \{x \in X : x \equiv 0 \pmod 3\}, \\ C &= \{x \in X : x \equiv 0 \pmod 5\}, & D &= \{x \in X : x \equiv 0 \pmod 7\}. \end{aligned}$$

Khi đó, $M = A \cup B \cup C \cup D$. Suy ra

$$\begin{aligned} |M| = & |A| + |B| + |C| + |D| \\ & - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap D| - |D \cap A| - |A \cap C| - |B \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |A| = 1005, |B| = 670, |C| = 402, |D| = 287, \\ |A \cap B| = 335, \ |B \cap C| = 134, \ |C \cap D| = 57, \\ |D \cap A| = 143, \ |A \cap C| = 210, \ |B \cap D| = 95, \\ |A \cap B \cap C| = 67, \ |A \cap B \cap D| = 47, \\ |A \cap C \cap D| = 28, \ |B \cap C \cap D| = 19, \\ |A \cap B \cap C \cap D| = 9. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |M| = & (1005 + 670 + 402 + 287) - (335 + 134 + 57 + 143 + 210 + 95) \\ & + (67 + 47 + 28 + 19) - 9 \\ = & 1542. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Trong một đề thi chọn đội tuyển toán quốc gia có ba câu: một câu về số học, một câu về đại số và một câu về hình học. Trong số 40 thí sinh dự thi có 25 thí sinh làm được câu số học, 30 thí sinh làm được câu đại số và 15 thí sinh làm được câu hình học. Ngoài ra, số thí sinh làm được cả hai câu số học và đại số là 20, số thí sinh làm được cả hai câu số học và hình học là 5, số thí sinh làm được cả hai câu đại số và hình học là 10. Biết rằng không có thí sinh không làm được câu nào. Hỏi có bao nhiêu thí sinh làm được cả ba câu?

Lời giải. Gọi A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh làm được câu số học, đại số và hình học. Theo giả thiết ta có

$$|A| = 25,\ |B| = 30,\ |C| = 15,\ |A \cap B| = 20,\ |B \cap C| = 10, |C \cap A| = 5.$$

Vì không có thí sinh không làm được câu nào nên

$$|A \cup B \cup C| = 40.$$

Áp dụng nguyên lý thêm bớt ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Suy ra

$$40 = 25 + 30 + 15 - 20 - 10 - 5 + |A \cap B \cap C|$$

hay $|A \cap B \cap C| = 5$.
Vậy có 5 học sinh làm được cả ba câu.

2.2 Tổ hợp - chỉnh hợp - hoán vị

1. **Tổ hợp**

   Cho tập X gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con A gồm k phần tử của X ($1 \leq k \leq n$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho. Số các tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. **Chỉnh hợp**

   Cho tập X gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi bộ có thứ tự $(x_1; x_2; ...; x_k)$ gồm k phần tử của X ($1 \leq k \leq n$) gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3. **Hoán vị**

Cho tập X gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

Ví dụ 1. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O) $(n \geq 2)$. Hỏi

a) Số tam giác có ba đỉnh là ba trong số $2n$ đỉnh của đa giác đã cho?

b) Số hình chữ nhật có bốn đỉnh là bốn trong số $2n$ đỉnh của đa giác đã cho?

Lời giải.

a) Ba đỉnh bất kì của đa giác đã cho tạo thành một tam giác. Mỗi bộ ba đỉnh của đa giác đã cho là một tổ hợp chập 3 của $2n$ phần tử. Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số $2n$ đỉnh của đa giác đã cho là

$$C_{2n}^3 = \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = \frac{(2n-2)(2n-1)n}{3}.$$

b) Mỗi đường chéo của hình chữ nhật đi qua tâm O của đường tròn ta gọi là đường chéo lớn. Có tất cả n đường chéo lớn. Số hình chữ nhật có bốn đỉnh là bốn trong số $2n$ đỉnh của đa giác đã cho bằng số cặp đường chéo lớn và bằng

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ví dụ 2. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ta lập các số, mỗi số có 5 chữ số khác nhau. Hỏi

a) Lập được bao nhiêu số ?

b) Lập được bao nhiêu số chẵn ?

Lời giải.

a) Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có 5 chữ số khác nhau. Ta có hai cách đếm số A:

Cách 1. Chọn a_1 trước rồi chọn bộ $(a_2; a_3; a_4; a_5)$. Số cách chọn a_1 là 6. Với mỗi cách chọn a_1 thì (a_2, a_3, a_4, a_5) là một chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số còn lại. Do đó, số số lập được là $6.A_6^4 = 2160$.

Cách 2. Đếm số số A bao gồm cả trường hợp $a_1 = 0$ rồi trừ đi số số A trong trường hợp $a_1 = 0$.

Số số A bao gồm cả trường hợp $a_1 = 0$ là A_7^5.

Số số A trong trường hợp $a_1 = 0$ là A_6^4.

Vậy số số lập được là $A_7^5 - A_6^4 = 2160$.

b) Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có 5 chữ số khác nhau và A chẵn. Ta chọn a_1 trước, sau đó chọn a_5 và cuối cùng chọn bộ (a_2, a_3, a_4).
Nếu a_1 lẻ thì a_1 có 3 cách chọn. Khi đó, a_5 có 4 cách chọn và $(a_2; a_3; a_4)$ có A_5^3 cách chọn.
Nếu a_1 chẵn thì $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 3 cách chọn. Khi đó, a_5 có 3 cách chọn và $(a_2; a_3; a_4)$ có A_5^3 cách chọn.
Vậy số số chẵn lập được là: $3.4.A_5^3 + 3.3.A_5^3 = 1260$.

Ví dụ 3. Một bàn tròn có 10 ghế, đánh số từ 1 đến 10. Cần xếp 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ vào bàn. Hỏi

a) Có bao nhiêu cách xếp?

b) Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có hai học sinh cùng giới nào ngồi cạnh nhau?

Lời giải.
a) Mỗi cách xếp 10 học sinh vào bàn là một hoán vị của 10 học sinh đã cho. Số cách xếp cần tìm là $P_{10} = 10! = 3628800$.
b) Đầu tiên ta chọn ra 5 chỗ để xếp các học sinh nam: có hai cách. Với mỗi cách chọn 5 chỗ để xếp 5 học sinh nam có 5! cách xếp 5 học sinh nam và 5! cách xếp học sinh nữ. Vậy số cách xếp 10 học sinh thoả mãn yêu cầu bài toán là $2.5!.5! = 28800$.

Ví dụ 4. Cho n, k là các số nguyên dương và $k \leq n$. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2n\}$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $(x_1; x_2; ...; x_{2n})$ của tập X sao cho trong đó hai phần tử k và $k + n$ đứng ở hai vị trí kề nhau?

Lời giải. Ta xem mỗi cặp hai phần tử $(k; n + k)$ và $(n + k; k)$ là một phần tử. Đặt

$$a = (k; n + k),\ b = (n + k; k)$$

và $A = (X \setminus \{k; n + k\}) \cup \{a\}, \quad B = (X \setminus \{k; n + k\}) \cup \{b\}$. Kí hiệu $S(X)$ là số hoán vị của tập X trong đó có hai phần tử k và $n + k$ đứng kề nhau, $S(A)$ và $S(B)$ là số hoán vị của hai tập A và B. Ta có

$$S(X) = S(A) + S(B) = 2.(2n - 1)!.$$

2.3 Bài tập

2.3.1 Bài tập luyện tập

1. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

2. Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 em đi dự trại hè, trong đó có ít nhất 1 học sinh nam và ít nhất 1 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách?

3. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó sao cho trong số 4 viên được chọn không có đủ cả ba màu. Hỏi có bao nhiêu cách?

4. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, trong đó có 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao choi 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách?

5. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

6. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8?

7. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn?

8. Có bao nhiêu số nguyên dương có 10 chữ số khác nhau, trong đó không có hai chữ số chẵn nào đứng cạnh nhau?

9. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 nghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ trong mỗi trường hợp sau:

   a) Hai học sinh bất kì ngồi cạnh nhau hoặc ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau?

   b) Hai học sinh bất kì ngồi đối diện với nhau thì khác trường với nhau?

10. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho

$$a \leq b < c < d \leq e.$$

11. Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Hỏi từ tập X ta lập được bao nhiêu số tự nhiên $\overline{abcdef}$ gồm 6 chữ số khác nhau, thoả mãn $d+e+f-a-b-c=1$.

12. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4?

13. Có 15 đại biểu ngồi quanh một bàn tròn.

    a) Hỏi có bao nhiêu khả năng trong số 15 đại biểu đó có ít nhất một người ngồi không đúng chỗ của mình như ban tổ chức đã sắp xếp?

    b) Hỏi có bao nhiêu khả năng trong số 15 đại biểu đó không có người nào ngồi đúng chỗ của mình như ban tổ chức đã sắp xếp?

14. Trong một đề thi có ba câu: một câu về số học, một câu về đại số và một câu về hình học. Trong số 60 thí sinh dự thi có 50 thí sinh giải được câu số học, 40 thí sinh giải được câu đại số và 30 thí sinh giải được câu hình học. Ngoài ra, số thí sinh giải được ít nhất một trong hai câu số học và đại số là 55, số thí sinh giải được ít nhất một trong hai câu đại số và hình học là 50, số thí sinh giải được ít nhất một trong hai câu số học và hình học là 45. Biết rằng, có 15 thí sinh giải được cả ba câu. Hỏi có bao nhiêu thí sinh không giải được câu nào?

15. Xét bảng ô vuông 4×4. Người ta điền vào mỗi ô của bảng một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

16. (IMO 1989) Cho n là số nguyên dương. Một hoán vị $(x_1; x_2; ...; x_{2n})$ của tập $\{1; 2; ...; 2n\}$ được gọi là có tính chất T nếu tồn tại $i \in \{1; 2; ...; 2n-1\}$ sao cho $|x_i - x_{i+1}| = n$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, số các hoán vị có tính chất T lớn hơn số các hoán vị không có tính chất T.

2.3.2 Bài tập tự giải

1. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có các đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n?

   Đáp số : $n = 20$.

2. Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em, trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách?

   Đáp số : 462 cách.

3. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

   Đáp số : 207900 cách.

4. Một đội văn nghệ có 15 người, trong đó có 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đồng ca gồm 8 người, trong đó có ít nhất 3 nữ?

   Đáp số : 3690 cách.

5. Một lớp học có 33 học sinh, trong đó có 7 nữ. Cần chia lớp thành 3 tổ, tổ 1 có 10 học sinh, tổ 2 có 11 học sinh, tổ 3 có 12 học sinh sao cho trong mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách?

   Đáp số : 43068078553500 cách.

6. Một đội tuyển học sinh giỏi gồm 18 học sinh, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 em đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn?

   Đáp số : 41811 cách.

7. Có 30 câu hỏi khác nhau, trong đó có 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Cần lập một đề kiểm tra gồm 5 câu hỏi thuộc đủ 3 loại và số câu hỏi dễ không ít hơn 2. Hỏi có bao nhiêu cách?

   Đáp số : 56875 cách.

8. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau?

   Đáp số : 952 số.

9. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

   Đáp số : 20748 số.

10. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

    Đáp số : 192 số.

11. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có 2 chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau?

    Đáp số : 108 số.

12. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng ba chữ số cuối 1 đơn vị.

    Đáp số : 108 số.

13. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 2158?

    Đáp số : 321 số.

14. Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Hãy xác định $k \in \{1; 2; ...; n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

    Đáp số : $k = 9$.

2.4 Hướng dẫn giải bài tập

1. Có ba phương án chọn: Phương án thứ nhất là chọn 1 nhà toán học nam, 1 nhà toán học nữ và 1 nhà vật lý nam. Phương án thứ hai là chọn 2 nhà toán học nữ và 1 nhà vật lý nam. Phương án thứ ba là chọn 1 nhà toán học nữ và 2 nhà vật lý nam.
   Số cách chọn ở phương án thứ nhất là:
   $$S_1 = C_5^1.C_3^1.C_4^1 = 60.$$
   Số cách chọn ở phương án thứ hai là
   $$S_2 = C_3^2.C_4^1 = 12.$$
   Số cách chọn ở phương án thứ ba là
   $$S_3 = C_3^1.C_4^2 = 18.$$
   Vậy số cách chọn cần tìm là $S = S_1 + S_2 + S_3 = 90$.

2. **Cách 1.** Để chọn được 5 học sinh thoả mãn yêu cầu, trước tiên ta chọn k học sinh nam $(1 \leq k \leq 4)$, sau đó chọn $5 - k$ học sinh nữ. Số cách chọn cần tìm là
   $$S = \sum_{k=1}^{4} C_{10}^k.C_{10}^{5-k} = 2(C_{10}^1.C_{10}^4 + C_{10}^2.C_{10}^3) = 15000.$$
   Cách 2. Sử dụng nguyên lí bù trừ. Số cách chọn 5 học sinh trong số 20 học sinh của lớp là: C_{20}^5. Số cách chọn 5 học sinh nam là: C_{10}^5. Số cách chọn 5 học sinh nữ là: C_{10}^5. Số cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nam và ít nhất một học sinh nữ là
   $$S = C^5 20 - C_{10}^5 - C_{10}^5 = 15000.$$

3. Sử dụng nguyên lí bù trừ. Số cách chọn 4 viên bi từ hộp đã cho là C_{15}^4. Ta đếm số cách chọn 4 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn này là $C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2$. Vậy số cách chọn 4 viên bi thoả mãn yêu cầu bài toán là
   $$S = C_{15}^4 - C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 645.$$

4. **Cách 1.** Sử dụng nguyên lí cộng.

- Số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc một lớp là: $S_1 = C_5^4 + C_4^4 = 6$.
- Số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc hai lớp là

$$S_2 = (C_9^4 - C_5^4 - C_4^4) + (C_7^4 - C_4^4) + (C_8^4 - C_5^4) = 219.$$

Số cách chọn 4 học sinh cần tìm là $S = S_1 + S_2 = 225$.

Cách 2. Sử dụng nguyên lí bù trừ.

- Số cách chọn 4 học sinh trong số 12 học sinh là: C_{12}^4.
- Số cách chọn 4 học sinh trong đó mỗi lớp có ít nhất 1 học sinh là

$$C_5^2.C_4^1.C_3^1 + C_4^2.C_5^1.C_3^1 + C_3^2.C_5^1.C_4^1.$$

Số cách chọn 4 học sinh cần tìm là

$$S = C_{12}^4 - (C_5^2.C_4^1.C_3^1 + C_4^2.C_5^1.C_3^1 + C_3^2.C_5^1.C_4^1) = 225.$$

5. • Đếm số số lập được:

Cách 1. Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Vì $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 4 cách chọn. Với mỗi cách chọn a_1 thì có 4 cách chọn a_2. Với mỗi cách chọn a_1, a_2 thì có 3 cách chọn a_3. Với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3 thì có 2 cách chọn a_4. Với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3, a_4 thì có 1 cách chọn a_5. Vậy, số số lập được là $S = 4.4.3.2.1 = 96$.

Cách 2. Đặt X là tập các số có 5 chữ số khác nhau $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thuộc tập $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ và a_1 có thể bằng 0, Y là tập các số thuộc X sao cho $a_1 \neq 0$ và Z là tập các số thuộc X sao cho $a_1 = 0$. Ta có

$$|Y| = |X| - |Z| = P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96.$$

• Tính tổng các số lập được:

Trong tập X, mỗi chữ số $0; 1; 2; 3; 4$ xuất hiện $P_5/5 = 24$ lần nên

$$S(X) = 24(0 + 1 + 2 + 3 + 4)(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 2666640.$$

Trong tập Z, mỗi chữ số $1; 2; 3; 4$ xuất hiện $P_4/4 = 6$ lần nên

$$S(Z) = 6(1 + 2 + 3 + 4)(1 + 10 + 10^2 + 10^3) = 66660.$$

Vậy, tổng các số cần tìm là

$$S(Y) = S(X) - S(Z) = 2599980.$$

6. Giả sử lập được số $A = \overline{abcdef}$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có $c + d + e = 8$ nên chỉ có thể xảy ra hai khả năng

$$c, d, e \in \{1; 2; 5\} \quad \text{hoặc} \quad c, d, e \in \{1; 3; 4\}.$$

Trường hợp 1. $c, d, e \in \{1; 2; 5\}$ thì $a, b, f \in \{3; 4; 6; 7; 8; 9\}$. Số các số lập được trong trường hợp này là

$$S_1 = P_3.A_6^3 = 720.$$

Trường hợp 2. $c, d, e \in \{1; 3; 4\}$ thì $a, b, f \in \{2; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Số các số lập được trong trường hợp này là

$$S_2 = P_3.A_6^3 = 720.$$

Vậy số các số thoả mãn yêu cầu bài toán là $S = S_1 + S_2 = 1440$.

7. Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có: a_1 có 9 cách chọn, các chữ số a_2, a_3, a_4, mỗi chữ số có 10 cách chọn. Với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3, a_4 thì do $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ là số chẵn nên a_5 có 5 cách chọn. Vậy số số có 5 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$S = 9.10^3.5 = 45000.$$

Chú ý: Có thể sử dụng đa thức, xem chuyên đề 7.

8. Giả sử lập được số $A = \overline{a_1a_2...a_{10}}$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1. Các chữ số chẵn và lẻ đứng xen kẽ nhau:

Nếu chữ số a_1 lẻ thì $(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9)$ là một hoán vị của bộ $(1; 3; 5; 7; 9)$ và $(a_2; a_4; a_6; a_8; a_{10})$ là một hoán vị của bộ $(0; 2; 4; 6; 8)$. Do đó, lập được $5!.5! = 14400$ số.

Nếu chữ số a_1 chẵn thì $(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9)$ là một hoán vị của bộ $(0; 2; 4; 6; 8)$, trong đó $a_1 \neq 0$, và $(a_2; a_4; a_6; a_8; a_{10})$ là một hoán vị của bộ $(1; 3; 5; 7; 9)$. Do đó, lập được $4.4!.5! = 11520$ số.

Như vậy, trong trường hợp 1, ta lập được tổng cộng
$14400 + 11520 = 25920$ số.

Trường hợp 2. Có hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau. Dễ thấy, trong trường hợp này cặp hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau là duy nhất. Nếu ta chập hai vị trí chứa hai chữ số lẻ đó làm một thì ta được một số có 9 chữ số mà các chữ số chẵn, lẻ đứng xen kẽ nhau và có 5 chữ số chẵn. Ta có, số cặp hai chữ số lẻ là $A_5^2 = 20$. Vì có 5 chữ số chẵn nên vị trí đầu tiên là chữ số chẵn. Trường hợp này ta lập được $4.4!.4!.20 = 46080$ số.

Vậy có tất cả $25920 + 46080 = 72000$ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

9. a) Sử dụng nguyên lí nhân. Việc xếp chỗ ngồi được chia thành hai giai đoạn:

Giai đoạn 1. Chia chỗ ngồi theo trường: Có hai cách, như hình minh hoạ dưới đây

A B A B A B   B A B A B A

B A B A B A   A B A B A B

trong đó kí hiệu A và B để chỉ chỗ của học sinh các trường A và B.

Giai đoạn 2. Phân chỗ ngồi theo học sinh: Với mỗi cách chia chỗ ngồi theo trường ở giai đoạn 1, có $6!$ cách xếp học sinh trường A và $6!$ cách xếp học sinh trường B.

Vậy số cách xếp chỗ ngồi thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$2.6!.6! = 1036800.$$

b) Để có một cách xếp chỗ ngồi thoả mãn yêu cầu bài toán ta thực hiện lần lượt các bước sau:

Bước 1. Xếp chỗ cho học sinh X của trường A.

Bước 2. Chọn ra 1 học sinh Y của trường B và xếp vào chỗ đối diện với X.

Số cách xếp chỗ cần tìm là

$$S = (12.6).(10.5).(8.4).(6.3).(4.2).(2.1) = 33177600.$$

10. **Cách 1.** Gọi X là tập các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $a \leq b < c < d \leq e$, A là tập các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $a < b < c < d < e$, B là tập các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $a = b < c < d < e$, C là tập các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $a < b < c < d = e$ và D là tập các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $a = b < c < d = e$. Ta có A, B, C, D là các tập đôi một rời nhau và $X = A \cup B \cup C \cup D$. Do đó

$$|X| = |A| + |B| + |C| + |D| = C_9^5 + 2.C_9^4 + C_9^3 = 462.$$

Cách 2. Đặt $a' = a - 1, e' = e + 1$, ta có

$$0 \leq a' < b < c < d < e' \leq 10.$$

Mỗi bộ 4 số (không kể thứ tự) thuộc tập hợp $M = \{0, 1, 2, ..., 10\}$ cho ta một số có 5 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán. Do đó, số số lập được là $C_{11}^5 = 462$.

11. Từ giả thiết ta có $a + b + c = 7$. Các bộ ba phần tử của X có tổng bằng 7 là $\{0; 2; 5\}$, $\{0; 3; 4\}$; $\{1; 2; 4\}$. Gọi A là tập các số $\overline{abcdef}$ cần tìm và

$$B = \{\overline{abcdef} \in A : \ a, b, c \in \{0; 2; 5\}\}$$
$$C = \{\overline{abcdef} \in A : \ a, b, c \in \{0; 3; 4\}\}$$
$$D = \{\overline{abcdef} \in A : \ a, b, c \in \{1; 2; 5\}\}.$$

Ta có $A = B \cup C \cup D$ và B, C, D là các tập rời nhau. Do đó

$$|A| = |B| + |C| + |D| = 2.(2.2.1).3! + 3!.3! = 84.$$

12. Gọi A là tập các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ $(a \geq 1)$ sao cho $a + b + c + d$ chia hết cho 4. Xét $b + c + d = 4k + r$ $(0 \leq r \leq 3)$. Nếu $r \in \{0, 1, 2\}$ thì với mỗi giá trị của r tồn tại hai giá trị của a sao cho $a + b + c + d$ chia hết cho 4 là $a = 4 - r$ và $a = 8 - r$. Nếu $r = 3$ thì tồn tại 3 giá trị của a sao cho $a + b + c + d$ chia hết cho 4 là $a = 1, a = 7, a = 9$. Gọi B là tập các số $\overline{bcd}$ với $0 \leq b, c, d \leq 9$ và $b + c + d = 4k + r$ $(0 \leq r \leq 2)$, C là tập các số $\overline{bcd}$ với $0 \leq b, c, d \leq 9$ và $b + c + d = 4k + 3$, ta có

$$|A| = 2 \times |B| + 3 \times |C| = 2 \times (|B| + |C|) + |C| = 2 \times 10^3 + |C|.$$

Xét tập hợp C: Giả sử $c + d = 4m + s$. Nếu $s \in \{0; 1\}$ thì tồn tại hai giá trị của b sao cho $b + c + d = 4k + 3$. Nếu $s \in \{2; 3\}$ thì tồn tại ba giá trị của b sao cho $b + c + d = 4k + 3$. Gọi D là tập các số $\overline{cd}$ với $0 \leq c, d \leq 9$ và $c + d = 4m + s$ $(0 \leq s \leq 1)$, E là tập các số $\overline{cd}$ với $0 \leq c, d \leq 9$ và $c + d = 4m + s$ $(2 \leq s \leq 3)$. Ta có

$$|C| = 2 \times |D| + 3 \times |E| = 2 \times (|D| + |E|) + |E| = 2 \times 10^2 + |E|.$$

Xét tập hợp E: Đếm trực tiếp theo tổng $c+d$ ta được $|E| = 24+25 = 49$.

Vậy $|A| = 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 49 = 2249$.

Chú ý: Có thể sử dụng đa thức và số phức, xem chuyên đề 7.

13. a) Số cách xếp 15 đại biểu vào bàn là P_{15}. Do có đúng một cách xếp 15 đại biểu vào bàn sao cho cả 15 vị đều ngồi đúng chỗ của mình nên số cách sắp xếp 15 đại biểu sao cho có ít nhất một người ngồi không đúng chỗ của mình như ban tổ chức đã sắp xếp là

$$P_{15} - 1 = 1307674367999.$$

b) Giả sử các đại biểu là $A_1, A_2, ..., A_{15}$ và chỗ mà ban tổ chức đã sắp xếp cho các đại biểu lần lượt là $G_1, G_2, ..., G_{15}$. Do A_1 không ngồi ở G_1 nên A_1 có 14 chỗ có thể ngồi. Nếu A_1 ngồi ở G_k thì A_k có 14 chỗ có thể ngồi. Nếu A_k ngồi ở G_m thì A_m có 13 chỗ có thể ngồi. Cứ tiếp tục như vậy ta có số khả năng trong số 15 đại biểu đó không có người nào ngồi đúng chỗ của mình như ban tổ chức đã sắp xếp là 14.14! = 1220496076800.

14. Kí hiệu X là tập hợp tất cả các thí sinh và A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh làm được câu: số học, đại số, hình học. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&|X| = 60,\ |A| = 50,\ |B| = 40,\ |C| = 30,\\
&|A \cup B| = 55, |B \cup C| = 50,\ |C \cup A| = 45,\\
&|A \cap B \cap C| = 15.
\end{aligned}$$

Áp dụng nguyên lý thêm bớt ta có

$$\begin{aligned}
|A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| = 50 + 40 - 55 = 35,\\
|B \cap C| &= |B| + |C| - |B \cup C| = 40 + 30 - 50 = 20,\\
|C \cap A| &= |C| + |A| - |C \cup A| = 30 + 50 - 45 = 35.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|\\
&+ |A \cap B \cap C|\\
&= 50 + 40 + 30 - 35 - 20 - 35 + 15 = 45.
\end{aligned}$$

Vậy số thí sinh không giải được câu nào là

$$S = |X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A \cup B \cup C| = 60 - 45 = 15.$$

15. Dễ thấy, nếu ba hàng đầu tiên đã được điền số sao cho tổng các số trong mỗi hàng bằng 0 và trong mỗi cột có không quá hai số bằng nhau thì ta chỉ có một cách điền hàng thứ tư. Ta đi tìm số cách điền ba hàng đầu tiên. Hàng thứ nhất và hàng thứ hai, mỗi hàng có $C_4^2 = 6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0. Trong 6 cách điền số của hàng thứ hai, ta chia thành 3 loại.

    Loại 1. Cách điền số hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 0 vị trí: Có 1 cách. Khi đó, có 6 cách điền dòng thứ 3.

    Loại 2. Cách điền số hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 4 vị trí: Có 1 cách. Khi đó, có 1 cách điền dòng thứ 3.

    Loại 3. Cách điền số hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 2 vị trí: Có 4 cách. Khi đó, với mỗi cách điền dòng thứ 2, có 2 cách điền dòng thứ 3.

    Vậy số cách điền số thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$S = 6.1.6 + 6.1.1 + 6.4.2 = 90.$$

16. Sử dụng nguyên lí thêm bớt. Ta có $|x_i - x_{i+1}| = n$ nên nếu $x_i = k$ thì $x_{i+1} = k + n$. Với mỗi $k \in \{1; 2; ...; n\}$, kí hiệu A_k là tập các hoán vị mà trong đó hai phần tử k và $k+n$ đứng liên tiếp. Gọi A là tập các hoán vị có tính chất T. Ta có

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

    Do đó

$$|A| \geq \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{k<h} |A_k \cap A_h|$$

    Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chuyên đề 3
Nhị thức Newton

Nhị thức Newton là công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ với n nguyên dương dưới dạng đa thức:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Công thức trên có nhiều ứng dụng trong toán học và đã được biết đến từ trước thời Newton. Còn bản thân Newton đã mở rộng khai triển đó cho trường hợp n âm và phân. Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được công thức tổng quát của khai triển này:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m}.$$

Trong các kì thi tốt nghiệp THPT, kì thi đại học và các kì thi học sinh giỏi chúng ta thường xuyên bắt gặp các bài toán liên quan đến công thức khai triển nhị thức Newton.

Ví dụ 1. Trong khai triển $(a+b)^n$, cho $a = b = 1$ ta có đẳng thức

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Cho $a = 1, b = -1$ ta có

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Đặc biệt, khi n chẵn, thay n bởi $2n$, ta có

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}.$$

Khi n lẻ, thay n bởi $2n+1$, ta có

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}.$$

Bằng cách tương tự bạn đọc có thể tìm thêm các đẳng thức tổ hợp thú vị khác.

Ví dụ 2. Cho n là số nguyên dương. Hãy tính tổng sau

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n.$$

Cách giải 1. (Biến đổi số hạng tổng quát). Ta có

$$kC_n^k = k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Do đó

$$S = n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n.2^{n-1}.$$

Cách giải 2. (Sử dụng đạo hàm). Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta có $S = n.2^{n-1}$.

Ví dụ 3. Cho n là số nguyên dương. Hãy tính tổng sau

$$S = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Cách giải 1. Biến đổi số hạng tổng quát. Ta có

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}.$$

Do đó

$$S = \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Cách giải 2. (Sử dụng tích phân). Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1, ta có

$$\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\left(C_n^0 x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + \dots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1.$$

Suy ra $S = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ví dụ 4. Cho n là số nguyên dương. Hãy chứng minh đẳng thức tổ hợp sau:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Lời giải. Ta thấy C_{2n}^n là hệ số của x^n trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $S(x) = (x+1)^{2n}$. Ta xét một cách khai triển khác của $S(x)$:

$$S(x) = (x+1)^n(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^k x^k\right).$$

Ta có hệ số của x^n trong khai triển trên là

$$a_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Vậy

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Ví dụ 5. (Đề thi đại học khối A năm 2006). Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Lời giải. Trước tiên ta đi xác định n. Ta có

$$C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n &= \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) - 1. \\ &= \frac{1}{2}.2^{2n+1} - 1 = 2^{2n} - 1. \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta suy ra $2^{2n} - 1 = 2^{20} - 1$ hay $n = 10$.

Bây giờ ta đi xác định hệ số của số hạng chứa x^{26}. Ta có khai triển:

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^{10-k} \left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}.$$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k ứng với k thoả mãn:

$$11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

3.1 Bài tập

3.1.1 Bài tập luyện tập

1. Giả sử có khai triển

$$(x+1)^{10}(x+2) = x^11 + a_1x^{10} + ... + a_{10}x + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5?

2. (Đề thi đại học khối A năm 2004). Xác định hệ số của x^8 trong khai triển nhị thức Newton của

$$S(x) = \left(1 + x^2(1-x)\right)^8.$$

3. (Đề thi cao đẳng năm 2008). Tìm n nguyên dương sao cho

$$C_n^1 + 2C_n^2 + ... + 2^{n-1}C_n^n = 3280.$$

4. Cho n là số nguyên dương. Hãy tính tổng sau

$$S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n.$$

5. Cho $n > 2$. Tính tổng

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + ... + (n-1)n.C_n^n.$$

6. (Đề thi đại học Luật năm 2001). Cho n là số nguyên dương, $n > 1$. Chứng minh rằng

$$C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n = n4^{n-1}.$$

7. Cho $n > 2$. Tính tổng

$$S = \frac{1}{1.2}C_n^0 + \frac{1}{2.3}C_n^1 + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_n^n.$$

8. Cho n là số nguyên dương, $n > 2$. Tính tổng

$$S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + n^2 C_n^n.$$

9. (Đề thi Học viện KTQS năm 2000). Xét khai triển

$$(1+2x)^{12} = a_0 + a_1 x + ... + a_{12} x^{12}.$$

   a) Tính tổng các hệ số

$$S = a_0 + a_1 + ... + a_{12}.$$

   b) Xác định k sao cho a_k đạt giá trị lớn nhất.

10. Cho m, n, p là các số nguyên dương thoả mãn: $0 \le m \le p \le n$. Chứng minh rằng

$$C_n^p.C_m^0 + C_n^{p-1}.C_m^1 + ... + C_n^{p-m}.C_m^m = C_{m+n}^p.$$

3.1.2 Bài tập tự giải

1. (Đề thi đại học khối D năm 2007). Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức

$$S(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}.$$

2. Xác định hệ số của x^8 trong khai triển nhị thức Newton của

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n,$$

   biết

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3).$$

3. Khai triển biểu thức $S(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^{670}$ thành đa thức ta được
$$S(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{2010}x^{2010}.$$
   a) Tính tổng các hệ số $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_{2010}$.
   b) Tìm hệ số a_6.

4. Tính tổng
$$S = 1.2.3C_n^3 + 2.3.4C_n^4 + \ldots + (n-2)(n-1)n.C_n^n.$$

5. Tính tổng
$$S = \frac{1}{1.2.3}C_n^0 + \frac{1}{2.3.4}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_n^n.$$

6. Tính tổng
$$S = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + 6C_{2n}^6 + \ldots + 2nC_{2n}^{2n}.$$

7. Tính tổng
$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + \ldots + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

8. Tính tổng
$$S = \frac{2^2}{2}C_{2n}^1 + \frac{2^4}{4}C_{2n}^3 + \ldots + \frac{2^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}.$$

9. (Đề thi đại học khối B năm 2003). Cho n là số nguyên dương. Tính tổng
$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

10. (Đề thi đại học khối A năm 2005). Xác định n nguyên dương sao cho
$$C_{2n+1}^1 - 2.2^1.C_{2n+1}^2 + \ldots + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}.$$

11. (Đề thi đại học khối A năm 2007). Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \ldots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

12. Tính tổng
$$S = \frac{1}{2}C_{2010}^1 + \frac{2}{3}C_{2010}^2 + ... + \frac{2010}{2011}C_{2010}^{2010}.$$

13. Xác định n nguyên dương sao cho
$$10\left(1 + \frac{C_n^1}{2} + ... + \frac{C_n^n}{n+1}\right) = 1023.$$

14. (Đề thi đại học khối D năm 2003). Với n nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển nhị thức Newton của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Hãy xác định n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

15. Xét khai triển
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + ... + a_{10}x^{10}.$$

    Xác định k sao cho a_k đạt giá trị lớn nhất.

16. Cho k, n là các số nguyên dương và $k \leq n$. Chứng minh rằng
$$C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + ... + C_n^{n-k}C_n^n = C_{2n}^{n+k}.$$

17. Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng
$$C_m^0 + C_{m+1}^1 + ... + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n.$$

18. Cho n là số nguyên dương lẻ. Tính tổng
$$S = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + ... + n(C_n^n)^2.$$

19. Tính tổng
$$S = C_{2009}^0 - \frac{1}{3}C_{2009}^2 + \frac{1}{5}C_{2009}^4 - ... + \frac{1}{2009}C_{2009}^{2008}.$$

20. Tính tổng
$$S = \frac{C_8^8}{7.8} + \frac{C_9^8}{8.9} + ... + \frac{C_{2010}^8}{2009.2010}.$$

3.2 Hướng dẫn giải bài tập

1. Ta có khai triển

$$(x+1)^{10} = C_{10}^0 x^{10} + C_{10}^1 x^9 + ... C_{10}^9 x + C_{10}^{10}.$$

Hệ số a_5 ứng với x^6 nên

$$a_5 = C_{10}^5 + 2.C_{10}^6 = 672.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(x^2(1-x)\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k}(1-x)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{8} \left(C_8^k x^{2k} \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^p x^p \right). \end{aligned}$$

Hệ số của x^8 trong khai triển trên ứng với cặp (k,p) thoả mãn:

$$0 \le p \le k \le 8 \quad \text{và} \quad 2k + p = 8.$$

Có hai cặp thoả mãn là $(3;2)$ và $(4;0)$. Vậy hệ số của x^8 cần tìm là

$$a = C_8^3.C_3^2.(-1)^2 + C_8^4.C_4^0.(-1)^0 = 238.$$

3. Ta có

$$\begin{aligned} & C_n^1 + 2C_n^2 + ... + 2^{n-1}C_n^n = 3280 \\ \Leftrightarrow\ & C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 6561 \\ \Leftrightarrow\ & (1+2)^n = 6561 \\ \Leftrightarrow\ & n = 8. \end{aligned}$$

4. *Cách giải 1*. Tách tổng S thành hai tổng

$$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n, \quad S_2 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n.$$

Ta có $S_1 = 2^n$. Xét S_2: Biến đổi số hạng tổng quát

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Suy ra

$$S_2 = n(C_{n-1}^0 + C_{n_1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}.$$

Vậy

$$S = S_1 + S_2 = (n+2)2^{n-1}.$$

Cách giải 2. Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Nhân cả hai vế với x ta có

$$x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta có

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n.$$

Cho $x = 1$ ta có

$$S = (n+2)2^{n-1}.$$

5. *Cách giải 1*.Ta có

$$(k-1)kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}, \forall k = 1; 2; ...n.$$

Suy ra

$$S = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + ... + C_{n-2}^{n-2}\right) = n(n-1)2^{n-2}.$$

Cách giải 2. Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 x + ... + n(n-1)C_n^n x^{n-2}.$$

Cho $x = 1$ ta có $S = n(n-1)2^{n-2}$.

6. *Cách giải 1*. Đặt $S = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n$. Ta có

$$k.C_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, \forall 1 \le k \le n.$$

Suy ra

$$S = n\left(C_{n-1}^0 3^{n-1} + C_{n-1}^1 3^{n-2} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n(3+1)^{n-1} = n4^{n-1}.$$

Cách giải 2. Xét khai triển

$$(3+x)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}x + C_n^2 3^{n-2}x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$n(3+x)^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2}x + ... + nC_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta có điều phải chứng minh.

7. *Cách giải 1*.Ta có

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + ... + C_{n+2}^{n+2}\right). \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + ... + C_{n+2}^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1\right). \\ &= \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Cách giải 2. Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$$

Lấy tích phân hai vế theo biến x từ 0 đến t ta được

$$\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 t + C_n^1 \frac{t^2}{2} + ... + C_n^n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Lấy tích phân hai vế theo biến t từ 0 đến 1 ta được

$$S = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}.$$

8. *Cách giải 1*. Với $k \geq 2$, ta có

$$
\begin{aligned}
k^2 C_n^k &= k\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= (k-1+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
S &= C_n^1 + n(n-1)\left(\sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i\right) + n\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^1\right) \\
&= n + n(n-1)2^{n-2} + n(2^{n-1}-1) \\
&= n(n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Cách giải 2. Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}.$$

Nhân cả hai vế với x ta được

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + \ldots + nC_n^n x^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1^1 C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + \ldots + n^2 C_n^n x^{n-1}.$$

Cho $x = 1$ ta được

$$S = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

9. a) Cho $x = 1$ ta có $S = (1+2)^{12} = 531441$.

b) Ta có $a_k = C_{12}^k.2^k$. Để tìm hệ số a_k lớn nhất ta sắp xếp lại dãy (a_k). Xét tỉ số

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{12}^{k+1}.2^{k+1}}{C_{12}^k.2^k} = \frac{2(12-k)}{k+1}.$$

Ta có

$$a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow k \leq 7.$$

Do đó ta có

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$
$$a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}.$$

Vậy hệ số lớn nhất là hệ số a_8, ứng với $k = 8$.

10. Ta có C_{m+n}^p là hệ số của x^p trong khai triển nhị thức Newton của $S(x) = (1+x)^{m+n}$. Ta xét một cách khai triển khác của $S(x)$:

$$\begin{aligned} S(x) &= (1+x)^n(1+x)^m \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{s=0}^{m} C_m^s x^s\right). \end{aligned}$$

Hệ số của x^p trong cách khai triển này là

$$a_p = \sum_{k+s=p} C_n^k.C_m^s = C_n^p.C_m^0 + C_n^{p-1}.C_m^1 + \dots + C_n^{p-m}.C_m^m.$$

Vậy

$$C_n^p.C_m^0 + C_n^{p-1}.C_m^1 + \dots + C_n^{p-m}.C_m^m = C_{m+n}^p.$$

Chuyên đề 4
Nguyên tắc Dirichlet

4.1 Nội dung nguyên tắc Dirichlet

Nguyên tắc Dirichlet mang tên nhà toán học người Đức: Peter Gustav Dirichlet (1851-1931), được phát biểu hết sức đơn giản:

- *Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái lồng (n là số nguyên dương) thì có một lồng chứa ít nhất hai thỏ.*

- *Nếu nhốt $n(m-1)+1$ con thỏ vào n cái lồng (m, n là số nguyên dương) thì có một lồng chứa ít nhất m thỏ.*

Hoặc một dạng phát biểu khác, thường hay sử dụng:

- *Nếu nhốt m con thỏ vào n cái lồng (m, n là số nguyên dương và m không chia hết cho n) thì có một lồng chứa ít nhất $\left[\frac{m}{n}\right]+1$ thỏ.*

Sử dụng phương pháp phản chứng, ta có thể dễ dàng chứng minh được nguyên tắc Dirichlet.

Mặc dù được phát biểu hết sức đơn giản như vậy nhưng nguyên tắc Dirichlet lại có những ứng dụng hết sức đa dạng, phong phú, trong nhiều lĩnh vực và rất hiệu quả.

Đối với bạn đọc mới làm quen với nguyên tắc này xin tham khảo cuốn sách của cùng tác giả:

"*Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi THCS - NXBGD VN*".

Trong cuốn sách này chúng ta đi sâu hơn với những ví dụ và bài tập đòi hỏi những thao tác tư duy phức hợp và khả năng xử lí các dữ kiện và yêu cầu một cách tinh tế.

Xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Xét tập $M=\{1,2,...,9\}$. Với mỗi tập con X của M, ta kí hiệu $S(X)$ là tổng các phần tử thuộc X. Chứng minh rằng trong số 26 tập con X của M với $|X| \leq 3$, luôn tồn tại hai tập A và B sao cho $S(A)=S(B)$.

Lời giải. Ta chia các tập con X của M thoả mãn $|X| \leq 3$ vào các lồng, mỗi lồng bao gồm các tập có cùng tổng các phần tử. Do $0 \leq S(X) \leq 24$ nên có 25 lồng. Do có 26 tập X với $|X| \leq 3$ nên tồn tại hai tập A, B thuộc cùng một lồng. Điều đó có nghĩa là tồn tại hai tập A, B sao cho $S(A) = S(B)$ □

Ví dụ 2. Cho tập $X = \{1, 2, ..., 2009\}$. Chứng minh rằng trong số 1006 phần tử bất kì của X luôn có hai phần tử có tổng bằng 2010.

Lời giải. Chia tập X thành các cặp

$$(1, 2009), (2, 2008), ..., (1005, 1005).$$

Vì có 1005 cặp và 1006 phần tử nên tồn tại hai phần tử thuộc cùng một cặp. Hai phần tử này thoả mãn yêu cầu bài toán. □

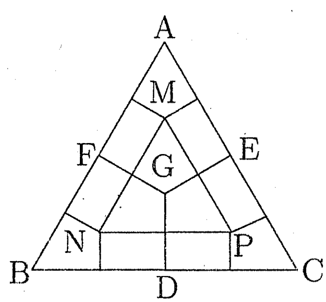
Ví dụ 3. Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 81\}$. Chứng minh rằng trong 3 phần tử tùy ý của X luôn có hai phần tử a, b sao cho

$$0 < \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \leq 1.$$

Lời giải. Xét 3 phần tử x_1, x_2, x_3 của X. Đặt $c_i = \sqrt[4]{x_i}, i = \overline{1, 3}$, ta có $1 \leq c_i \leq 3$. Chia khoảng $[1; 3]$ thành hai khoảng $[1; 2]$ và $[2; 3]$. Theo nguyên tắc Dirichlet thì trong ba số c_1, c_2, c_3 có hai số cùng thuộc vào một trong hai khoảng nói trên. Giả sử hai số đó là $x = \sqrt[4]{a}$ và $y = \sqrt[4]{b}$ thì a, b là hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 4. Bên trong tam giác đều ABC có cạnh bằng 6 cm, cho 13 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}$ cm.

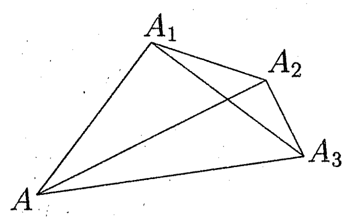
Lời giải. Để áp dụng được nguyên tắc Dirichlet, ta chia tam giác ABC thành 12 phần (mỗi phần tương ứng với một lồng) sao cho trong mỗi phần, khoảng cách giữa hai điểm bất kì không vượt quá $\sqrt{3}$ cm, chẳng hạn như hình vẽ:



Theo nguyên tắc Dirichlet, trong số 13 điểm đã cho có ít nhất hai điểm thuộc cùng một phần. Hai điểm này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng cho 6 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Các điểm đã cho được nối với nhau bởi các đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số 6 điểm đã cho tạo thành một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Lời giải. Xét điểm A trong số 6 điểm đã cho. Nối A với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng. Theo nguyên tắc Dirichlet thì trong 5 đoạn thẳng đó có ít nhất 3 đoạn cùng màu. Giả sử 3 đoạn AA_1, AA_2, AA_3 cùng màu đỏ.



Nếu một trong các đoạn A_iA_j, trong đó $1 \leq i, j \leq 3$ và $i \neq j$, có màu đỏ thì tam giác AA_iA_j thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nếu cả ba đoạn A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 đều màu xanh thì tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 6. (VMO-2004) Cho tập $A = \{1; 2; 3; ...; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải. Ta thấy, nếu a, b cùng chẵn thì $a^2 + b^2$ là hợp số. Do đó, nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra $k \geq 9$. Ta chứng tỏ $k = 9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kì của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố. Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp:

$$(1; 4), (2; 3), (5; 8), (6; 11), (7; 10), (9; 16), (12, 13), (14, 15).$$

Theo nguyên tắc Dirichlet thì trong 9 phần tử của X có hai phần tử thuộc cùng một cặp và ta có điều phải chứng minh.

Trong các ví dụ trên chúng ta thấy nguyên tắc Dirichlet được áp dụng hết sức đa dạng, không phải lúc nào cũng dễ dàng nhận ra được "thỏ" và "lồng". Để có thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet cần phải có những suy luận hợp lí, những phán đoán và kĩ năng biến đổi giả thiết và kết luận nữa. Dưới đây là hệ thống bài tập để các bạn thử sức và rèn luyện kĩ năng áp dụng nguyên tắc thú vị này.

4.2 Bài tập

4.2.1 Bài tập luyện tập

1. Cho tập $X = \{1, 2, ..., 2010\}$. Chứng minh rằng trong số 1006 phần tử bất kì của X luôn có hai phần tử nguyên tố cùng nhau.

2. chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

3. Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 200\}$. Chứng minh rằng với mọi tập con A của X có số phần tử bằng 101 luôn tồn tại hai phần tử mà phần tử này là bội của phần tử kia.

4. Trong hình chữ nhật 3×4 có 6 điểm. Chứng minh rằng trong 6 điểm đó có hai điểm A, B mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{5}$.

5. Có 65 người đến từ hai quận, mỗi người làm một trong 4 nghề. Biết rằng cứ 5 người cùng nghề thì có hai người cùng tuổi. Chứng minh rằng có ít nhất 3 người cùng tuổi, làm cùng một nghề và cùng đến từ một quận.

6. Cho $n > 1$ và $n + 2$ số nguyên dương

$$1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n+2} \leq 3n.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số a_i và a_j sao cho $n < a_i - a_j < 2n$.

7. Cho tập M gồm 11 số thực phân biệt từ trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng, tồn tại hai số $x \neq y$ sao cho

$$0 < x - y < 1 + 3\sqrt[3]{xy}.$$

8. (Korea 1995) Cho m là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên a, b thỏa mãn: $|a| \leq m, |b| \leq m$ sao cho

$$0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{m + 2}.$$

9. Cho $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên k không nhỏ hơn 2 đều tồn tại bộ số nguyên (a_i) không đồng thời bằng 0 và $|a_i| \leq k-1, \forall i$ sao cho
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

10. (**Định lí Dirichle**) Cho α là một số vô tỉ. Chứng minh rằng, tồn tại vô hạn các số nguyên p, q với $q > 0$ sao cho
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

11. (**Định lí số dư Trung Hoa**) Cho m, n là các số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n}. \end{cases}$$

12. Cho tập $A = \{\pm a_1, \pm a_2, ..., \pm a_{10}\}$, trong đó $a_i \in \mathbb{Z}$ và $a_i \neq 0$. Xét số nguyên dương $m < 1024$. Chứng minh rằng tồn tại tập con S của A sao cho nếu $a \in S$ thì $-a \in S$ và $\sum_{a \in S} a$ chia hết cho m.

13. Cho n là số nguyên dương và không chia hết cho 10. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a chia hết cho n và trong biểu diễn thập phân của a không chứa chữ số 0 nào.

14. Cho các số thực a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, ..., 2009)$ thỏa mãn
$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \forall i = 1, 2, ..., 2009.$$
Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số (p, q) với $1 \leq p < q \leq 2009$ sao cho
$$a_p a_q + b_p b_q > 1 - \frac{\pi^2}{2(1004)^2}.$$

15. Trên mặt phẳng tọa độ, một điểm $A(x, y)$ được gọi là điểm nguyên nếu $x, y \in \mathbb{Z}$. Giả sử $A_1A_2A_3...A_n$ là một n-giác lồi có tất cả các đỉnh là điểm nguyên. Biết rằng miền đa giác đó (bao bồm tất cả các điểm thuộc miền trong và thuộc biên) không chứa bất cứ một điểm nguyên nào ngoài chính các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$. Chứng minh rằng $n \leq 4$.

16. (USA 1976): Người ta tô màu các ô vuông của một bảng 4×7 bởi hai màu: đen, trắng; mỗi ô một màu. Chứng minh rằng, với bất kì cách tô nào ta luôn tìm được một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên các đường lưới mà 4 ô ở 4 đỉnh cùng một màu. Khẳng định còn đúng nữa hay không với bảng 4×6.

17. Cho tập hữu hạn X. Ta chọn ra 50 tập con $A_1, A_2, ..., A_{50}$, mỗi tập đều chứa quá nửa số phần tử của X. Chứng minh rằng

    a) Tồn tại phần tử a thuộc ít nhất 26 tập đã cho.

    b) Tồn tại tập con A của X sao cho số phần tử của A không vượt quá 5 và
$$A \cap A_i \neq \varnothing, \forall i = \overline{1, 50}.$$

18. Với số tự nhiên $A = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ ta kí hiệu $\overline{A} = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương k có tính chất: nếu A chia hết cho k thì $\overline{A}$ chia hết cho k

19. Có 15 đại biểu ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có vị nào ngồi đúng chỗ của mình như ban tổ chức đã sắp xếp (các vị trí được xếp cách đều nhau). Chứng minh rằng có thể xoay bàn để có ít nhất hai đại biểu ngồi đúng chỗ của mình.

    Hãy chỉ ra một cách xếp sao cho có đúng một đại biểu ngồi đúng chỗ và mọi cách xoay bàn cũng chỉ có không quá một đại biểu ngồi đúng chỗ.

20. Cho tập M gồm 2002 số nguyên dương, mỗi số chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 23. Chứng minh rằng tồn tại 4 số phân biệt trong M có tích là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

21. Cho A là tập gồm n số nguyên tố phân biệt và M là tập gồm $n+1$ số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số trong M đều không là số chính phương và chỉ có ước nguyên tố thuộc A. Chứng minh rằng có thể chọn ra trong M một số số có tích là một số chính phương.

4.2.2 Bài tập tự giải

1. Xét tập $X = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Chứng minh rằng trong số 1006 phần tử của X luôn tồn tại hai phần tử a và b sao cho $a - b = 2$.

2. Chứng minh rằng trong số 2010 người tùy ý, bao giờ cũng có hai người có số người quen bằng nhau.

3. Trên mặt phẳng cho 17 điểm phân biệt, hai điểm bất kì trong chúng được nối với nhau bởi một đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh là ba trong số 17 điểm đã cho và có ba cạnh cùng màu.

4. Cho 51 số nguyên dương khác nhau, mỗi số có không quá 2 chữ số. Chứng minh rằng trong 51 số đã cho có thể chọn ra được 6 số sao cho hai số bất kì có chữ số hàng chục khác nhau và chữ số hàng đơn vị khác nhau.

5. Giả sử X là một tập tùy ý đã cho gồm 6 số vô tỉ. Hỏi có tồn tại hay không tập con M gồm 3 phần tử của X sao cho tổng hai phần tử bất kì của M đều là số vô tỉ.

   Đáp số : Tồn tại.

6. Cho tập hợp số $M = \{1, 2, 3, ..., n\}, n \geq 2$. Hãy tìm số m nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con chứa m phần tử của M đều tồn tại ít nhất hai số a, b mà số này là bội của số kia.

   Đáp số: $m = \left[\dfrac{n+1}{2}\right] + 1$.

7. Chứng minh rằng có vô số số chia hết cho $19^{5^{2010}}$ mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số $0, 1, 2, 3$.

8. Cho các số nguyên $1 \leq a_1, a_2, ..., a_n \leq m$ và $1 \leq b_1, b_2, ..., b_m \leq n$ thỏa mãn
$$1 \leq a_1, a_2, ..., a_n \leq m \quad \text{và} \quad 1 \leq b_1, b_2, ..., b_m \leq n$$
   Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r, s với $p, q \geq 1$ và $r, s \geq 0$ sao cho
$$a_p + a_{p+1} + ... + a_{p+r} = b_q + b_{q+1} + ... + b_{q+s}.$$

9. Có 201 người đến từ 5 nước khác nhau. Trong mỗi nhóm 6 người có ít nhất hai người cùng tuổi. Chứng minh rằng có ít nhất 5 người đến từ cùng một nước, có cùng tuổi và cùng giới tính.

10. Chứng minh rằng trong số 9 số thực phân biệt luôn tồn tại hai số a và b sao cho
$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2} - 1.$$

11. Chứng minh rằng trong 4 số thực dương không nhỏ hơn 1 luôn có hai số a, b sao cho
$$\frac{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

12. (Poland 1998). Cho $a_1, a_2, ..., a_7, b_1, b_2, ..., b_7 > 0$ thỏa mãn
$a_i + b_i \leq 2, \forall i = \overline{1,7}$. Chứng minh rằng tồn tại $k \neq m$ sao cho
$|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1$.

13. (Thi vô địch Balan). Giả sử một tam giác có thể đặt vào trong một hình vuông đơn vị sao cho tâm của hình vuông không nằm trong tam giác. Chứng minh rằng có ít nhất một cạnh của tam giác không vượt quá 1.

14. Có 101 hình chữ nhật với độ dài các cạnh là các số nguyên không vượt quá 100. Chứng minh rằng trong số các hình chữ nhật đó có ít nhất ba hình chữ nhật A, B, C sao cho ta có thể đặt A vào trong B và B vào trong C.

15. Có 2002 quả bóng được đánh số thứ tự tùy ý từ 1 đến 2002, mỗi quả có một trong 6 màu: xanh, đỏ, tím, vàng, trắng, đen. Chứng minh rằng có ít nhất một quả mà số thứ tự của nó bằng tổng số thứ tự của hai quả bóng cùng màu, hoặc gấp đôi số thứ tự của một quả bóng cùng màu khác.

16. Mỗi đỉnh của một hình cửu giác đều ta tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng

    a) Có ít nhất 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu.

    b) Trong số 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu, có ít nhất hai tam giác đồng dạng.

17. (Định lí Erdos - Szekeres) Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng với một dãy gồm $(m-1)(n-1)+1$ số thực phân biệt luôn tồn tại một dãy con tăng gồm m số hạng hoặc tồn tại một dãy con giảm gồm n số hạng.

18. (IMO-1991) Cho $S = \{1, 2, ..., 280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

4.3 Hướng dẫn giải bài tập

1. Chia tập X thành các cặp

$$(1,2),(3,4),...,(2009,2010).$$

Có tất cả 1005 cặp và 1006 phần tử nên theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại hai phần tử thuộc cùng một cặp. Hai phần tử này nguyên tố cùng nhau. □

2. Xét 20 số đầu tiên. Trong 20 số này có 2 số có chữ số tận cùng là 0. Một trong hai số đó có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử số đó là N. Xét 11 số

$$N, N+1, ..., N+9, N+19.$$

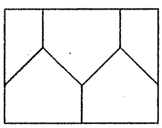
Tổng các chữ số của các số này tương ứng là

$$s, s+1, s+2, ..., s+9, s+10.$$

Trong 11 số liên tiếp $s, s+1, s+2, ..., s+9, s+10$, có một số chia hết cho 11. □

3. Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_{101}\}$. Viết các số a_i dưới dạng $a_i = 2^{\alpha_i}.b_i$, trong đó b_i là số lẻ. Xét các số lẻ $b_1, b_2, ..., b_{101}$. Ta có $b_1, b_2, ..., b_{101} \in X$ và trong X chỉ có 100 số lẻ nên tồn tại hai số $b_i = b_j$ $(i \neq j)$. Trong hai số a_i, a_j có một số là bội của số kia. Bài toán được chứng minh.

4. Chia hình chữ nhật đã cho thành 5 phần như hình vẽ. Theo nguyên tắc Dirichlet thì có hai điểm thuộc cùng một phần. Hai điểm đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.



5. Giả sử không có ba người nào thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo nguyên tắc Dirichlet thì có ít nhất 33 người đến từ cùng một quận. Trong số 33 người này có ít nhất 9 người làm cùng một nghề. Xét 5 người nào đó trong số 9 người trên, theo giả thiết thì có hai người cùng tuổi là A_1 và B_1. Bỏ đi A_1, B_1, xét 5 người trong số 7 người còn lại ta có hai người cùng tuổi A_2, B_2. Tiếp tục bỏ đi A_2, B_2 và xét 5 người trong số còn lại

ta được hai người cùng tuổi A_3, B_3. Vì không có ba người nào thỏa mãn yêu cầu bài toán nên A_1, A_2, A_3 có tuổi khác nhau đôi một. Xét 5 người, gồm A_1, A_2, A_3 và hai người trong số 3 người còn lại ta có hai người cùng tuổi. Vì A_1, A_2, A_3 không thể cùng tuổi với người nào khác trong số còn lại nên ta có hai người cùng tuổi A_4, B_4. Xét 5 người, gồm A_1, A_2, A_3, A_4 và người còn lại cuối cùng ta có hai người cùng tuổi, điều này không thể xảy ra do giả thiết phản chứng.

6. Bằng cách tịnh tiến đều các a_i ta có thể giả sử $a_{n+2} = 3n$. Nếu tồn tại a_i thỏa mãn $n < a_i < 2n$ thì $n < a_{n+2} - a_i < 2n$. Nếu không tồn tại i sao cho $n < a_i < 2n$ thì xét các cặp

$$(1, 2n), (2, 2n + 1), ..., (n, 3n - 1)$$

ta suy ra có hai số cùng thuộc một cặp. Hai số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

7. Xét $A = x - y - 1 - 3\sqrt[3]{xy}$. Ta có

$$A = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + 1 - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{xy}\right).$$

Vì $\sqrt[3]{x} \in [1; 10], \forall x \in M$ nên tồn tại x, y sao cho $0 < \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} < 1$ (điều phải chứng minh).

8. Xét $(m+1)^2$ số có dạng $x + y\sqrt{2}$ với $x, y \in \{0, 1, 2, ..., m\}$.

Do $0 \le x + y\sqrt{2} \le m(1 + \sqrt{2})$ nên tồn tại hai số $c + d\sqrt{2}$ và $p + q\sqrt{2}$ sao cho

$$\left|(c + d\sqrt{2}) - (p + q\sqrt{2})\right| \le \frac{m(1+\sqrt{2})}{(m+1)^2 - 1} = \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}.$$

9. Bằng cách thay a_i bởi $-a_i$, ta có thể giả sử $x_i \ge 0, \forall i$.

Khi đó $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{n(\sum x_i^2)} = \sqrt{n}$. Xét tập

$$B = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} k_i.x_i : k_i \in \mathbb{N}, k_i \le k - 1 \right\}.$$

Ta có $0 \le x \le (k-1)\sqrt{n}, \forall x \in B$ và $|B| = k^n$. Suy ra tồn tại x, x' sao cho

$$0 < |x - x'| < \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Đó chính là điều cần chứng minh.

10. Trước tiên, ta chứng minh với mọi số nguyên dương N, tồn tại các số nguyên dương p, q với $1 \leq q \leq N$ sao cho

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}.$$

Thật vậy, chia khoảng $[0, 1)$ thành N khoảng

$$B_k = \left[\frac{(k-1)}{N}, \frac{k}{N}\right), \ k = 1, 2, ..., N.$$

Xét các số có dạng $\{q\alpha\}$, với $q = 0, 1, ..., N$. Theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại hai số $\{q_1\alpha\}, \{q_2\alpha\}$ $(q_1 > q_2)$ cùng thuộc một khoảng B_k nào đó. Khi đó ta có,

$$0 < |\{q_1\alpha\} - \{q_2\alpha\}| < \frac{1}{N}.$$

Suy ra

$$\left|\alpha - \frac{[q_1\alpha] - [q_2\alpha]}{q_1 - q_2}\right| < \frac{1}{N(q_1 - q_2)}.$$

Từ đó có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán, giả sử có hữu hạn cặp số nguyên (p, q) với $q > 0$ sao cho

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

và X là tập các cặp số như vậy.

Khi đó, với số thực dương M đủ nhỏ ta có

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > M, \forall (p, q) \in X.$$

Chọn N sao cho $N > q$ và $\dfrac{1}{M} < N$. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}.$$

Do $\dfrac{1}{qN} < \dfrac{1}{q^2}$ nên $(p, q) \in X$. Điều này không xảy ra vì $\dfrac{1}{qN} < M$.

11. Giả sử được $0 \le a < m, 0 \le b < n$. Xét các số có dạng $x = a + km$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Ta dễ dàng chứng minh được các số nói trên có số dư đôi một khác nhau khi chia cho n. Do đó, tồn tại k sao cho
$$a + km \equiv b \pmod{n}.$$
Từ đó có điều phải chứng minh.

12. Giả sử được $a_1, a_2, ..., a_{10} > 0$. Xét các tổng
$$T = \sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i a_i,\ \varepsilon_i \in \{0; 1\}.$$
Có $2^{10} = 1024$ tổng như vậy nên theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại hai tổng T và T' sao cho $T \equiv T' \pmod{m}$. Khi đó
$$T - T' = \sum_{i=1}^{10} (\varepsilon_i - \varepsilon_i')a_i \equiv 0 \pmod{m}.$$
Do đó, tập
$$S = \{x = (\varepsilon_i - \varepsilon_i')a_i \in A :\ \varepsilon_i \ne \varepsilon_i'\}$$
thoả mãn yêu cầu bài toán.

13. Số n không chia hết cho 10 nên có một trong hai dạng $n = 2^k.m$ với $(m, 2) = (m, 5) = 1$ hoặc $n = 5^k.m$ với $(m, 2) = (m, 5) = 1$. Xét $n = 2^k m$ theo bài trên tồn tại A chia hết cho 2^k và trong biểu diễn thập phân của A không chứa chữ số 0 nào. Bây giờ xét $m + 1$ số $A, AA, ..., AA...A$ ta suy ra tồn tại một số chia hết cho m và đó là số cần tìm. Trường hợp $n = 5^k.m$ xét tương tự.

14. Viết các số a_i, b_i dưới dạng
$$a_i = \cos\alpha_i,\ b_i = \sin\alpha_i\ (\alpha_i \in [0; 2\pi)).$$
Ta có
$$a_p a_q + b_p b_q = \cos(\alpha_p - \alpha_q).$$
Chia khoảng $[0; 2\pi)$ thành 2008 khoảng, mỗi khoảng có độ dài $d = \dfrac{\pi}{1004}$:
$$[0; 2\pi) = \left[0; \frac{\pi}{1004}\right) \cup \left[\frac{\pi}{1004}; \frac{2\pi}{1004}\right) \cup ... \cup \left[\frac{2007\pi}{1004}; 2\pi\right).$$

Theo nguyên tắc Dirichlet thì có hai số α_p, α_q cùng thuộc một khoảng. Ta có

$$0 < |\alpha_p - \alpha_q| < \frac{\pi}{1004}.$$

Suy ra

$$a_pa_q + b_pb_q = \cos(\alpha_p - \alpha_q) > \cos\frac{\pi}{1004} > 1 - \frac{\pi^2}{2(1004)^2}.$$

□

15. Vì các đỉnh của đa giác là các điểm nguyên nên tọa độ (x, y) của mỗi đỉnh thuộc một trong bốn dạng : (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Giả sử $n \geq 5$. Khi đó, tồn tại hai đỉnh mà tọa độ của chúng thuộc cùng một dạng. Giả sử hai đỉnh đó là $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Khi đó trung điểm M của AB (thuộc miền đa giác) có tọa độ là (x_M, y_M) thỏa mãn :

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \in \mathbb{Z}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Điều này trái với giả thiết. Vậy $n \leq 4$.

16. Xét bảng 4×7: Có 28 ô, tô bằng hai màu nên tồn tại 14 ô cùng một màu, giả sử là màu đen. Gọi a_i là số ô đen trên cột i $(1 \leq i \leq 7)$. Ta có thể giảm bớt để $\sum a_i = 14$. Trên cột i có tất cả $\dfrac{a_i(a_i - 1)}{2}$ cặp cùng màu đen.

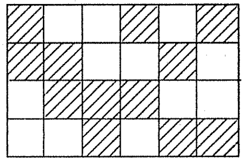
Bây giờ ta chiếu các ô của bảng xuống đường thẳng (Δ) song song với cột, mỗi ô của bảng biến thành một đoạn thẳng trên (Δ). Tổng số cặp đoạn thẳng trên (Δ) là $C_4^2 = 6$. Số cặp điểm xanh (trên các cột) được chiếu xuống là $S = \sum_{i=1}^{7} \dfrac{a_i(a_i - 1)}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{7} a_i^2 - 7$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có: $\sum_{i=1}^{7} a_i^2 \geq \dfrac{(\sum a_i)^2}{7} = 28.$

Suy ra $S \geq 14 - 7 = 7 > 6$.

Vì số cặp chiếu xuống lớn hơn số tổng số cặp có thể có nên tồn tại hai cặp mà hình chiếu của chúng trùng nhau. Bốn ô ở hai cặp đó là bốn đỉnh của hình chữ nhật và cùng màu.

Với bảng 4×6, khẳng định không còn đúng nữa (xem hình sau).



17. Giả sử $|X| = n$. Tổng số phần tử của 50 tập con A_i lơn hơn $25n$ nên tồn tại một phần tử a thuộc ít nhất 26 tập, chẳng hạn là $A_1, ..., A_{26}$. Xét 24 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử b thuộc ít nhất 13 tập, chẳng hạn $A_{27}, ..., A_{39}$. Xét 11 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử c thuộc ít nhất 6 tập, chẳng hạn $A_{40}, ..., A_{45}$. Xét 5 tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử d thuộc ít nhất 3 tập, chẳng hạn $A_{46}, ..., A_{48}$. Xét hai tập còn lại ta suy ra tồn tại một phần tử e thuộc ít nhất hai tập, chẳng hạn là A_{49}, A_{50}. Dễ thấy tập con $A = \{a, b, c, d, e\}$ thỏa mãn.

18. Giả sử k có m chữ số: $10^{m-1} \leq k < 10^m$.

    Trong $10^m - 1$ số liên tiếp, từ $10^m + 1$ đến $2.10^m - 1$, có ít nhất một số chia hết cho k. Gọi số đó là $A = \overline{1a_1a_2...a_m} \Rightarrow \overline{A} = \overline{a_ma_{m-1}...a_11} \vdots k \Rightarrow (k, 10) = 1$.

    Trong $10^m - 1$ số liên tiếp, từ $50.10^m + 1$ đến $51.10^m - 1$, có một số chia hết cho k. Gọi số đó là $B = \overline{50b_1b_2...b_m} \Rightarrow \overline{B} = \overline{b_m...b_105} \vdots k$.

    Ta có: $M = \overline{b_m...b_1100b_1...b_m} \vdots k \Rightarrow \overline{M} = \overline{b_m...b_1001b_1...b_m} \vdots k$

    $\Rightarrow M - \overline{M} = 99.10^m \vdots k \Rightarrow 99 \vdots k$.

    Thử lại: các ước của 99 đều thỏa mãn.

19. Với mỗi đại biểu A, kí hiệu $d(A)$ là khoảng cách từ A đến vị trí đúng của A (khoảng cách trên đường tròn, tính theo chiều kim đồng hồ). Vì có 15 đại biểu và chỉ có 14 giá trị của khoảng cách (do $1 \leq d(A) \leq 14$) nên tồn tại hai đại biểu A và B mà $d(A) = d(B)$. Khi quay bàn để A đến vị trí đúng của A thì B cũng đến vị trí đúng của B.

    Bây giờ ta chỉ ra một cách xếp sao cho có đúng một đại biểu ngồi đúng chỗ và mọi cách xoay bàn cũng chỉ có không quá một đại biểu ngồi đúng chỗ:

    Giả sử 15 đại biểu là $A_1, A_2, ..., A_{15}$ và A_i được xếp ngồi ở vị trí thứ i. Khi đó, cách xếp sao cho A_i ngồi ở vị trí mới $T(A_i) = 2i - 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

20. Có 9 số nguyên tố không vượt quá 23 là

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23.$$

Viết các số đã cho dưới dạng

$$A = a^2.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_9^{\alpha_9}$$

trong đó $a \in \mathbb{N}$ và $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Do số bộ phân biệt $(x_1, x_2, .., x_9) \in \{0, 1\}^9$ là $2^9 = 512$ nên nếu xét 513 phần tử thuộc M thì theo nguyên tắc Dirchlet, tồn tại hai bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_9)$ trùng nhau. Tương ứng với hai bộ đó ta được hai số trong M có tích là số chính phương. Giả sử hai số đó là a_1, b_1. Loại bỏ hai phần tử a_1, b_1 và xét 513 phần tử của M trong số còn lại ta suy ra có hai phần tử a_2, b_2 có tích là số chính phương. Tiếp tục quá trình trên ta nhận được 513 cặp $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{513}, b_{513})$ mà mỗi cặp có tích hai phần tử là một số chính phương. Bây giời đặt

$$a_1b_1 = c_1^2, \quad a_2b_2 = c_2^2, ..., \quad a_{513}.b_{513} = c_{513}^2$$

và xét 513 số $c_1, c_2, ..., c_{513}$. Vì các c_i cũng chỉ có ước nguyên tố không vượt quá 23 nên ta suy ra có hai số c_m, c_n có tích là số chính phương. Khi đó 4 số a_m, b_m, a_n, b_n có tích là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.□

21. Số tập con phân biệt, khác $\varnothing$ của M là

$$C_{n+1}^1 + ... + C_{n+1}^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Gọi các tập con đó là $M_1, M_2, ..., M_{2^{n+1}-1}$ và a_i là tích các phần tử của M_i. Giả sử các phần tử của A là $p_1 < p_2 < ... < p_n$. Ta viết các tích a_i dưới dạng $a_i = b_i^2.p_1^{\alpha_{i_1}}...p_n^{\alpha_{i_n}}$ trong đó $\alpha_{i_j} \in \{0, 1\}$. Ta có $2^{n+1} - 1$ bộ $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$ thuộc tích Đề các $\{0, 1\}^n$ (tích Đềcác $\{0, 1\}^n$ có 2^n phần tử) nên tồn tại $i \neq k$ sao cho $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n}) = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, ..., \alpha_{k_n})$. Khi đó, $a_i.a_k$ là số chính phương. Bây giờ chỉ việc bỏ các phần tử thuộc giao của M_i và M_k ta còn lại các phần tử khác nhau mà tích là một số chính phương.

Chuyên đề 5

Nguyên tắc cực hạn

Trong các bài toán rời rạc, chúng ta thường phải xem xét phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất của một tập hợp. Nguyên tắc cực hạn cho ta một khẳng định về sự tồn tại của các phần tử đó.

5.1 Nguyên tắc cực hạn

- Cho tập các số thực $A \neq \varnothing$. Nếu A có hữu hạn phần tử thì trong A tồn tại phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

- Cho tập các số nguyên $A \neq \varnothing$. Nếu A bị chặn trên, tức là tồn tại số thực α sao cho $a \leq \alpha, \forall a \in A$, thì trong A tồn tại phần tử lớn nhất.

- Cho tập các số nguyên $A \neq \varnothing$. Nếu A bị chặn dưới, tức là tồn tại số thực α sao cho $a \geq \alpha, \forall a \in A$, thì trong A tồn tại phần tử nhỏ nhất.

Để thấy tầm quan trọng và những áp dụng thú vị của nguyên tắc này chúng ta hãy một số ví dụ.

Ví dụ 1. Trên bảng có 2010 câu khẳng định:

Câu 1. Trên bảng có ít nhất một câu khẳng định sai.

Câu 2. Trên bảng có ít nhất 2 câu khẳng định sai.

$\vdots$

Câu 2010. Trên bảng có ít nhất 2010 câu khẳng định sai.

Hỏi những câu nào đúng?

Lời giải. Gọi A là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu đúng. Vì câu thứ 2010 không thể là câu đúng nên câu 1 là câu đúng, do đó $A \neq \varnothing$. Vì A có hữu hạn phần tử nên tồn tại một phần tử k lớn nhất. Do $k \in A$ nên $1, 2, ..., k-1 \in A$. Do k là phần tử lớn nhất của A nên $k+1, ..., 2010 \notin A$.

Suy ra $|A| = k$.
Gọi B là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu sai. Do câu khẳng định thứ k là câu đúng nên $|B| \geq k$. Do câu khẳng định thứ $k+1$ sai nên $|B| \leq k$. Suy ra $|B| = k$.
Mặt khác, $|A| + |B| = 2010$ nên $k = 1005$.
Vậy các câu khẳng định đúng là $1, 2, ..., 1005$.

Ví dụ 2. Có 2009 vận động viên thi đấu bóng bàn theo thể thức đấu vòng tròn, mỗi đấu thủ đấu với tất cả các đấu thủ còn lại. Kết quả mỗi trận đấu chỉ có thắng hoặc thua, không có hòa. Chứng minh rằng có thể xếp 2009 vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau.

Lời giải. Xét tất cả các cách xếp một số vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau. Vì số cách xếp như vậy là hữu hạn nên tồn tại một cách xếp T có nhiều vận động viên nhất. Ta chứng minh cách xếp T thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, giả sử T không chứa tất cả các vận động viên và A là người không nằm trong cách xếp T. Giả sử trong cách xếp T có n người $A_1, A_2, ..., A_n$ sao cho A_i thắng A_{i+1}. Nếu A thắng A_1 thì cách xếp $A, A_1, A_2, ..., A_n$ có nhiều vận động viên hơn cách xếp T. Do đó A thua A_1. Lập luận tương tự như vậy ta dẫn đến A thua tất cả các vận động viên $A_1, A_2, ..., A_n$. Nhưng khi đó cách xếp $A_1, A_2, ..., A_n, A$ có nhiều vân động viên hơn cách xếp T, vô lí. Vậy cách xếp T phải chứa tất cả các vận động viên và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho n và p là các số nguyên dương và $n \geq 3$. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^p \\ x_2 + x_3 = x_4^p \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = x_1^p \\ x_n + x_1 = x_2^p. \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$, $m = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$. Vì $M, m \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ nên ta có

$$M^p = x_k + x_{k+1}, \quad m^p = x_s + s_{s+1}.$$

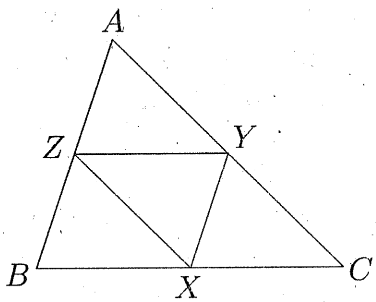
Do $x_k, x_{k+1} \leq M$ và $x_s, x_{s+1} \geq m$ nên

$$M^p \leq 2M, \quad m^p \geq 2m.$$

Do đó
$$M \leq \sqrt[p-1]{2}, \quad m \geq \sqrt[p-1]{2}.$$
Do $M \geq m$ nên $M = m = \sqrt[p-1]{2}$.
Vậy $x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[p-1]{2}$.

Ví dụ 4. Có 2009 điểm trên mặt phẳng sao cho các tam giác bất kì có 3 đỉnh là ba trong số 2009 điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá 1 (đơn vị diện tích). Chứng minh rằng có thể đặt 2009 điểm đã cho trong một tam giác có diện tích không vượt quá 4 (đơn vị diện tích).

Lời giải. Vì số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 2009 điểm đã cho là hữu hạn nên tồn tại một tam giác T có diện tích lớn nhất. Giả sử ba đỉnh của T là X, Y, Z. Xét tam giác ABC sao cho X, Y, Z tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.



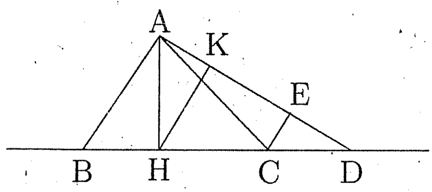
Ta có: $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta XYZ} \leq 4$. Ta chứng minh 2009 điểm đã cho nằm trong tam giác ABC. Thật vậy, giả sử tồn tại điểm M trong số 2009 điểm đã cho nằm ngoài tam giác ABC. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử M nằm khác phía với A đối với BC. Khi đó, $S_{\Delta MYZ} > S_{XYZ}$, vô lí. □

Ví dụ 5 (Bài toán Sylvester). Trong mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$). Biết rằng, mỗi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì đều đi qua một điểm thứ ba khác. Chứng minh rằng n điểm đã cho thẳng hàng.

Lời giải. Giả sử n điểm đã cho không thẳng hàng. Gọi S là tập hợp gồm n điểm đã cho và

$$T = \{(A, B, C) : A, B, C \in S \text{ và } d(A, BC) > 0\}.$$

Vì n điểm đã cho không thẳng hàng nên $T \neq \varnothing$. Vì T có hữu hạn phần tử nên theo nguyên tắc cực hạn, tồn tại phần tử $(A, B, C) \in T$ sao cho $d(A, BC)$ nhỏ nhất.



Theo giả thiết, đường thẳng BC còn đi qua điểm thứ ba $D \in S$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử C nằm giữa B và D. Kẻ $AH \perp BC, HK \perp AD$, $CE \perp AD$. Ta có $CE < HK < AH$. Suy ra phần tử $(C, A, D) \in T$ có $d(C, AD) < d(A, BC)$, vô lí. Vậy n điểm đã cho thẳng hàng □

5.2 Bài tập

5.2.1 Bài tập luyện tập

1. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 4$) không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm sao cho nó không chứa điểm nào trong số $n-3$ điểm còn lại.

2. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho trên mặt phẳng tồn tại n điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_n$ mà ba điểm bất kì đều là đỉnh của một tam giác vuông?

3. Trong một buổi dạ hội của một trường phổ thông, mỗi nữ sinh đều khiêu vũ với ít nhất một học sinh nam và không có học sinh nam nào khiêu vũ với tất cả các nữ sinh. Chứng minh rằng có một nhóm gồm hai học sinh nam và hai học sinh nữ sao cho mỗi người trong họ chỉ khiêu vũ với một người bạn khác giới cùng nhóm.

4. Cho n là số nguyên dương và $n \geq 2$. Chứng minh rằng tổng sau không thể là số nguyên
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

5. Cho a, b là các số nguyên dương và $b \leq a$. Biết rằng, tồn tại cặp số nguyên dương (u, v) sao cho $u^2 + v^2 - auv = b$. Chứng minh rằng, b là số chính phương.

6. Cho x, y là các số nguyên sao cho $A = \dfrac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng, A là một lập phương đúng.

7. Xét dãy tất cả các số nguyên tố $p_1 < p_2 < ... < p_n < .....$

   Đặt $a_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$. Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương giữa a_n và a_{n+1} có ít nhất một số chính phương.

8. Cho a và d là những số nguyên dương. Chứng minh rằng trong dãy $\{a + nd\}_{n=0}^{\infty}$ có ít nhất một số mà 4 chữ số đầu tiên của nó là 2009.

9. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Tìm số nguyên N lớn nhất sao cho với mọi hoán vị $\sigma_X = \{a_1, a_2, ..., a_{2010}\}$ của X đều tồn tại 30 số hạng liên tiếp có tổng không nhỏ hơn N.

10. Trên mặt phẳng tọa độ có 3 điểm nguyên (điểm có các tọa độ là các số nguyên) nằm trên một đường tròn bán kính r. Chứng minh rằng, tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không nhỏ hơn $\sqrt[3]{r}$.

11. Cho n điểm trên mặt phẳng ($n \geq 2$). Ta đánh dấu trung điểm của tất cả các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong số n điểm đã cho. Hỏi số nhỏ nhất các điểm được đánh dấu?

12. Trong đường tròn đơn vị cho 2000 điểm là các đỉnh của một đa giác lồi. Chứng minh rằng, tồn tại ba điểm A, B, C trong số đó sao cho: $S(ABC) < \dfrac{1}{31250000}$

13. Cho một số hữu hạn hình tròn chiếm trên mặt phẳng một diện tích bằng 1. Chứng minh rằng có thể chọn ra một hay một số hình tròn đôi một không có điểm chung trong với các hình tròn đã cho và có tổng diện tích không nhỏ hơn $\dfrac{1}{9}$.

14. Cho 2005 tập hợp, mỗi tập trong chúng có 44 phần tử. Biết rằng hai tập bất kì trong chúng đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng, tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2005 tập hợp đã cho.

15. Cho tập X có n phần tử ($n \geq 1$) và $A_1, A_2, ..., A_m$ là m tập con của X ($m \geq 1$) thoả mãn:

    (a) $|A_i| = 3, \forall i = 1, 2, ..., m$.

    (b) $|A_i \cap A_j \leq 1, \forall i \neq j \ (i, j \in \{1, 2, ..., m\})$.

    Chứng minh rằng, tồn tại một tập con của X chứa ít nhất $[\sqrt{2n}]$ phần tử và không chứa bất kì tập con nào trong số $A_i, i = 1, ..., m$.

16. Có 23 người có cân nặng là các số nguyên. Từ 23 người đó ta tổ chức một trận bóng đá. Trước tiên chọn một người nào đó làm trọng tài, sau đó chia 22 người còn lại thành hai đội, mỗi đội 11 người. Biết rằng với mọi cách chọn người làm trọng tài ta đều có thể thành lập hai đội bóng với tổng cân nặng bằng nhau. Chứng minh rằng tất cả 23 người đó đều có cân nặng bằng nhau.

17. Có bảy chú lùn ngồi quanh một bàn tròn, trước mặt mỗi chú có một cái ca. Một số ca đã được đổ sữa còn một số ca thì không (số sữa trong các ca đã được đổ có thể khác nhau). Một chú lùn đứng dậy và chia đều số sữa trong ca của mình cho 6 chú lùn còn lại. Chú lùn kế bên (tính theo chiều kim đồng hồ) sau đó cũng đứng dậy và chia đều số sữa của mình cho 6 chú lùn còn lại. Cứ như vậy lần lượt các chú lùn đều đứng dậy và chia đều số sữa của mình cho 6 người còn lại. Sau khi chú lùn thứ 7 chia sữa, người ta nhận thấy số sữa trong các ca giống như ban đầu. Hỏi nếu ban đầu có 3 lít sữa thì số sữa trong các ca ban đầu là bao nhiêu?

5.2.2 Bài tập tự giải

1. Trong một hội nghị có ít nhất hai đại biểu quen nhau. Biết rằng nếu hai đại biểu có cùng số lượng người quen thì không có người quen chung. Chứng minh rằng trong hội nghị có đại biểu chỉ quen đúng một người.

2. Trong một hội nghị, người ta nhận thấy rằng nếu hai đại biểu nào đó mà quen nhau thì không cùng quen với đại biểu thứ ba. Còn nếu hai đại biểu mà không quen nhau thì họ cùng quen với đúng hai người khác. Chứng minh rằng trong hội nghị này tất cả mọi người có số người quen bằng nhau.

3. Trên mặt phẳng cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh là ba trong số n đỉnh của đa giác đã cho sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác đó chứa toàn bộ đa giác $A_1A_2...A_n$.

4. Xét lưới ô vuông vô hạn, hai ô có chung cạnh gọi là hai ô kề nhau. Trong mỗi ô người ta viết một số tự nhiên sao cho mỗi số bằng trung bình cộng của bốn số ở bốn ô kề nó. Chứng minh rằng tất cả các số được viết trong các ô bằng nhau.

5. Tại một quốc gia có n sân bay $(n \geq 1)$. Khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Từ mỗi sân bay, máy bay cất cánh và bay đến sân

bay gần nó nhất. Chứng minh rằng trên bất kì sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay cùng bay đến.

6. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), trong đó hai đường thẳng bất kì đều cắt nhau và qua mỗi giao điểm có không ít hơn ba đường thẳng đi qua. Chứng minh rằng n đường thẳng đã cho đồng qui.

7. Trong mặt phẳng cho $2n$ điểm ($n \geq 1$) sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta tô màu n điểm đỏ và n điểm xanh. Chứng minh rặng có thể nối các điểm đỏ với các điểm xanh bởi n đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng nối hai điểm khác màu sao cho không có hai đoạn nào cắt nhau.

8. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$) sao cho cứ ba điểm bất kì có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1cm. Chứng minh rằng có thể vẽ hai đường tròn bán kính $R = 1cm$ sao cho các điểm đã cho nằm trong hai đường tròn đó.

9. Trên mặt phẳng, kẻ n đường thẳng ($n \geq 3$) sao cho không có ba đường nào đồng qui. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là có tính chất T nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt. Chứng minh rằng số tam giác có tính chất T không ít hơn $2n - 2$.

10. Có n con chim ($n \geq 2$) đậu trên đường tròn tâm O. Hai con chim đậu tại hai điểm A và B được gọi là trông thấy nhau nếu $\widehat{AOB} \leq 120^0$. Hỏi số nhỏ nhất các cặp chim trông thấy nhau là bao nhiêu?

11. Cho dãy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Biết rằng, tồn tại chỉ số n sao cho

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 \quad \text{và} \quad a_{n+k} = a_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng tồn tại chỉ số N sao cho với mọi $k \geq 0$, ta có

$$a_N + a_{N+1} + ... + a_{N+k} \geq 0.$$

12. Xét đa thức $P(x) = x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng

a) Tập các số nguyên tố p sao cho tồn tại n nguyên dương mà $P(n)$ chia hết cho p là vô hạn.

b) Tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $P(1).P(2)...P(n)$ không chia hết cho $P(n+1)$.

13. Cho n là số nguyên dương và $A = 11...1$ (có n chữ số 1). Với mỗi số nguyên dương a, kí hiệu $S(a)$ là tổng các chữ số của số a. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho A thì $S(N) \geq n$.

14. Cho n là một số nguyên dương. Xét bảng ô vuông $n \times n$. Trong mỗi ô của bảng ta viết một số nguyên sao cho hai ô bất kì có chung một cạnh thì hai số trong hai ô đó hơn kém nhau không quá một đơn vị. Chứng minh rằng có ít nhất một số xuất hiện trong bảng không ít hơn n lần.

15. Một dãy gồm 2003 căn phòng nằm cạnh nhau (hai phòng liền nhau có chung một bức tường), bao gồm các loại phòng khác nhau. Chúng có thể không có cùng diện tích, nhưng mỗi phòng đều có diện tích không vượt quá $10m^2$. Người ta muốn phá đi một số bức tường ngăn cách giữa các phòng không kể hai bức ở hai đầu của dãy nhà) để tạo thành các phòng có diện tích lớn hơn. Tất nhiên, các phòng mới tạo thành cũng không nhất thiết có diện tích bằng nhau, nhưng phải đảm bảo không có phòng nào rộng hơn phòng khác qúa $10m^2$. Hỏi việc đó có thực hiện được không nếu số bức tường bị phá đi là 2000.

    Đáp số: Có thể thực hiện được.

16. Xung quanh một bàn tròn có 2009 cái hộp được đánh số thứ tự theo chiều kim đồng hồ, từ 1 đến 2009. Ban đầu hộp 1 có 2009 viên bi, các hộp còn lại không có bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở một hộp nào đó (nếu hộp này chứa không ít hơn hai viên bi) và chuyển sang hai hộp kề với hộp này, mỗi hộp 1 viên bi.

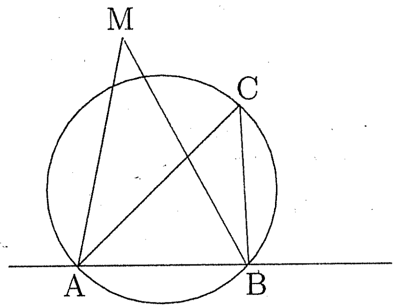
    a) Hỏi với cách chuyển bi trên, có thể chuyển được quá nửa số bi sang hộp 2 được không? Vì sao?

    b) Hãy chỉ ra một cách chơi để trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

    c) Chứng minh rằng, với mọi cách chơi, trò chơi sẽ dừng lại sau hữu hạn bước.

5.3 Hướng dẫn giải bài tập

1. Trong n điểm đã cho tồn tại hai điểm A, B sao cho $n-2$ điểm còn lại nằm về cùng một phía của đường thẳng AB và không có điểm nào nằm trong đoạn AB. Trong số các điểm không thuộc đường thẳng AB tồn tại điểm C sao cho góc $\widehat{ACB}$ lớn nhất.



Đường tròn đi qua A, B, C không chứa điểm nào trong số $n-2$ điểm còn lại.

2. Dễ thấy $n = 4$ thì bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là bốn đỉnh của một hình vuông thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta chứng minh n không vượt quá 4. Giả sử tồn tại $n > 4$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Trong số các điểm đã cho ta chọn ra cặp điểm A_i, A_j có khoảng cách lớn nhất. Từ giả thiết ta suy ra các điểm còn lại phải nằm trên đường tròn đường kính A_iA_j. Vì số các điểm còn lại không nhỏ hơn 3 nên tồn tại hai điểm thuộc cùng một nửa đường tròn đường kính A_iA_j. Giả sử hai điểm đó là A_m, A_n. Khi đó, tam giác $A_iA_mA_n$ là tam giác tù, vô lý.

3. Vì số học sinh là hữu hạn nên tồn tại học sinh nam M_1 khiêu vũ với nhiều nữ sinh nhất. Vì không có học sinh nam nào khiêu vũ với tất cả các nữ sinh nên có nữ sinh N_1 không khiêu vũ với M_1. Nhưng mỗi nữ sinh lại khiêu vũ với ít nhất một học sinh nam nên N_1 khiêu vũ với học sinh nam $M_2 \neq M_1$. Theo cách chọn thì M_1 khiêu vũ với nhiều nữ sinh nhất nên trong số các nữ sinh đã khiêu vũ với M_1 có ít nhất một nữ sinh N_2 không khiêu vũ với M_2. Nhóm gồm bốn học sinh M_1, M_2, N_1, N_2 thoả mãn yêu cầu bài toán.

4. Xét tập $A = \{x \in \mathbb{N} : \ 2^x \leq n\}$. Vì A bị chặn trên nên A có phần tử lớn nhất. Giả sử $\alpha = \max A$. Gọi a là tích của tất cả các số lẻ không vượt

quá n. Xét số $b = 2^{\alpha-1}a$. Ta có, b là bội của tất cả các phần tử của tập hợp $\{2; 3; 4; ...; n\} \setminus \{2^\alpha\}$. Do đó

$$b.S = \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + ... + \frac{b}{2^\alpha} + ... + \frac{b}{n} \notin \mathbb{Z}.$$

Vậy S không thể là số nguyên.

5. Chọn cặp (u, v) sao cho $u + v$ nhỏ nhất. Giả sử được $u \geq v$.

   Coi $u^2 + v^2 - auv = b$ là phương trình bậc 2 đối với u và gọi u' là nghiệm thứ hai. Vì $u' + u = av$ nên $u' \in \mathbb{Z}$. Vì $u'^2 + v^2 \leq a(u'v + 1)$ nên $u' \geq 0$. Nếu $u' = 0$ thì $b = v^2$ là số chính phương. Nếu $u' > 0$ thì từ đẳng thức $u.u' = v^2 - b$ ta suy ra $u' < v \leq u$. Suy ra $u' + v < u + v$, vô lí.

6. Giả sử được $x, y > 0$. Cố định A, chọn cặp x, y sao cho $x + y$ nhỏ nhất và $x \geq y$. Coi $x^2 + y^2 + 6 - Axy = 0$ là phương trình bậc hai đối với x và gọi x' là nghiệm còn lại. Ta có $x' + x = Ay, x'.x = y^2 + 6$ nên $x' \in \mathbb{Z}$ và $x' > 0$. Do cách chọn cặp x, y nên $x' \geq x$ và $x^2 \leq y^2 + 6$. Suy ra $x^2 - y^2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Nếu $x = y$ thì do A là số nguyên nên $x^2 | 6$ hay $x = 1$. Khi đó $A = 8$ là lập phương đúng. Nếu $x > y$ thì bằng cách giải trực tiếp các phương trình nghiệm nguyên ta suy ra không tồn tại x, y.

7. Ta có: $a_1 = p_1 = 2,\ a_2 = 2 + 3 = 5$. Giữa a_1 và a_2 có số chính phương $A = 4$. Tương tự với $n = 2, 3, 4$, kết luận của bài toán vẫn đúng. Ta chứng minh bằng quy nạp. Giả sử giữa a_{n-1} và a_n có ít nhất một số chính phương $A = a^2$. Trong số các số chính phương A đó chọn số A lớn nhất. Khi đó $a_n < (a + 1)^2$. Nhưng bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng với $n \geqslant 4$: $p_{n+1} > 2\sqrt{p_1 + p_2 + ... + p_n} + 1$. Suy ra $p_{n+1} > 2a + 1$ và $a_{n+1} > (a + 1)^2$. Đó chính là điều cần chứng minh.

8. Bài toán thực chất là chứng minh tồn tại hai số nguyên dương m, n sao cho

   $$2009.10^m < a + nd < 2010.10^m \quad (1)$$

   Để có thể chọn được số $a + nd$ thỏa mãn (1) ta chọn m đủ lớn. Do bước nhảy của dãy $(a + nd)$ là d và khoảng cách giữa hai số 2009.10^m và 2010.10^m là $d = 10^m$ nên ta chọn m sao cho $d < 10^m$. Bây giờ cố định m và chọn n là số nhỏ nhất thỏa mãn $a + nd > 2009.10^m$, ta chứng minh $a + nd$ thỏa mãn (1). Giả sử ngược lại, $a + nd > 2010.10^m$. Khi đó

   $$a + (n-1)d > 2010.10^m - d = 2009.10^m + 10^m - d > 2009.10^m.$$

Điều này trái với cách chọn n. □

9. Xét hoán vị σ của X, đặt

$$A_\sigma = \max_{0 \le n \le 1981} \sum_{k=1}^{30} a_{n+k}.$$

Khi đó, số N cần tìm là

$$N = \min_\sigma A_\sigma.$$

Ta có

$$67A_\sigma \ge a_1 + a_2 + ... + a_{2010} = \frac{2010.2011}{2}.$$

Suy ra $A_\sigma \ge 30165$.

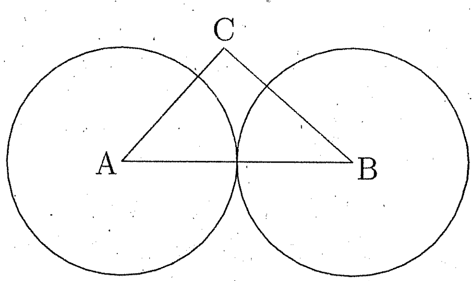
Xét hoán vị $\sigma = \{2010, 1, 2009, 2, ..., 1006, 1005\}$, ta có $A_\sigma = 30165$.

Vậy $N = 30165$.

10. Giả sử ba điểm đã cho là A, B, C và a là độ dài cạnh lớn nhất của tam giác ABC. Ta có: $abc = 4r.S$. Hơn nữa, dễ thấy $2S \in \mathbb{Z}$ nên $S \ge \frac{1}{2}$. Suy ra

$$abc \ge 2r \Rightarrow a^3 \ge 2r > r$$

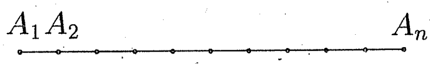
11. Giả sử A, B là hai điểm mà khoảng cách giữa chúng lớn nhất. Vẽ hai đường tròn (α) và (β) có tâm tương ứng là A và B, bán kính $R = \frac{AB}{2}$.



Xét điểm C bất kì trong số $n-2$ điểm còn lại. Dễ thấy trung điểm của AC nằm trong (α) còn trung điểm của BC nằm trong (β). Các trung điểm nằm trong cùng một đường tròn thì khác nhau. Vậy số trung điểm không ít hơn $2(n-2) + 1 = 2n - 3$

Bây giờ ta chỉ ra một bộ n điểm mà số các điểm được đánh dấu đúng bằng $2n-3$:

Trên trục số lấy n điểm có toạ độ lập thành một cấp số cộng công sai $d \neq 0$.



Khi đó, dễ thấy $2n-3$ trung điểm của các đoạn

$$A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_n, A_2A_n, A_3A_n, ..., A_{n-1}A_n$$

đôi một khác nhau.

Ngoài ra, xét đoạn A_iA_k bất kì, trung điểm M của A_iA_k có toạ độ là $x = \dfrac{a_i + a_k}{2}$

- Nếu $i + k \leq n$ thì $x = \dfrac{a_1 + a_{k+i-1}}{2}$ nên M cũng là trung điểm của đoạn A_1A_{k+i-1}

- Nếu $k + i > n$ thì $x = \dfrac{a_{k+i-n} + a_n}{2}$ nên M cũng là trung điểm của đoạn $A_{k+i-n}A_n$

12. Đặt $A_iA_{i+1} = a_i$, $A_i\widehat{A_{i+1}}A_{i+2} = \alpha_i$ và $S_i = S(A_iA_{i+1}A_{i+2})$.

Giả sử $S = \min S_i$. Ta có:

$$(2S)^n \leq \prod_{i=1}^{n}(2S_i) = \prod_{i=1}^{n}(a_i.a_{i+1}.\sin\alpha_i) \leq \left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^n.\left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^n.\left(\frac{\sum \sin\alpha_i}{n}\right)^n$$

Mặt khác

$$\sum a_i < 2\pi, \frac{\sum \sin\alpha_i}{n} \leq \sin\frac{\sum \alpha_i}{n} = \sin\frac{(n-2)\pi}{n} = \sin\frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{n}$$

Từ đó suy ra $(2S)^n < \left(\dfrac{2\pi}{n}\right)^{2n+1}$. Suy ra: $S < 4\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^3$.

Cho $n = 2000$, ta suy ra điều phải chứng minh.

13. Kí hiệu $S(O;R)$ là diện tích hình tròn $(O;R)$, $H(O;R)$ là diện tích phần mặt phẳng do hình tròn $(O;R)$ và tất cả các hình tròn có điểm chung với $(O;R)$ tạo nên. Ta chứng minh nếu $(O;R)$ là hình tròn lớn nhất trong tất cả các hình tròn có điểm chung với $(O;R)$ thì $S(O;R) \geq \frac{1}{9}H(O;R)$. Thật vậy, do các hình tròn có điểm chung với $(O;R)$ thuộc hình tròn $(O;3R)$ nên $H(O;R) \leq S(O;3R) = 9S(O;R)$. Suy ra $S(O;R) \geq \frac{1}{9}H(O;R)$. Bây giờ, từ các hình tròn đã cho ta chọn ra tất cả các đường tròn $(O_i;R_i), i \in I$ sao cho với mỗi $i \in I$ thì (O_i,R_i) là đường tròn lớn nhất trong các đường tròn có điểm chung với nó. Khi đó, ta có

$$\sum_{i \in I} S(O_i;R_i) \geq \frac{1}{9}\sum_{i \in I} H(O_i;R_i) = \frac{1}{9}.$$

14. Giả sử x là phần tử thuộc nhiều tập hợp nhất và x thuộc k tập $A_1, A_2, ..., A_k$. Giả sử $k < 2005$, xét tập A khác k tập nói trên. Vì A và A_i có phần tử chung khác x nên số phần tử của A không nhỏ hơn k. Suy ra, $k \leq 44$. Mỗi phần tử của A thuộc không quá 44 tập hợp nên A có giao khác rỗng với nhiều nhất $44^2 = 1936 < 2005$ tập hợp, điều này trái với giả thiết.

15. Gọi E là tập con có nhiều phần tử nhất và không chứa bất kì tập nào trong số A_i. Giả sử $|E| = p$. Xét phần tử $x \in X \setminus E$. Khi đó, tập $X \cup \{x\}$ chứa ít nhất một tập A_i nào đó. Ta kí hiệu tập đó là $A(x)$. Ta có, $A(x) \subset E \cup \{x\}$ và $A(x) \not\subset E$ nên $x \in A(x)$. Xét $B(x) = A(x) \setminus \{x\}$ ta có $B(x) \subset E$ và $|B(x)| = 2$.

Bây giờ lấy $x, y \in X \setminus E$ với $x \neq y$ ta có

$$A(x) \cap A(y) = B(x) \cap B(y).$$

Nếu $B(x) = B(y)$ thì $A(x) \cap A(y) = B(x) = B(y)$ và $|A(x) \cap A(y)| = 2$, trái với giả thiết. Suy ra, $B(x) \neq B(y)$.

Với mỗi $x \in X \setminus E$ ta có một tập con $B(x)$ của E gồm hai phần tử. Suy ra $C_p^2 \geq n - p$ hay $p(p+1) \geq 2n$. Từ đó có $p \geq [\sqrt{2n}]$.

16. Giả sử 23 người đã cho có cân nặng không bằng nhau. Xét tập T gồm các bộ số $(a_1, a_2, ..., a_{23})$, trong đó $a_1, ..., a_{23}$ là các số nguyên dương không bằng nhau tất cả sao cho với mọi $i = \overline{1, 23}$, ta có thể chia tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_{23}\} \setminus \{a_i\}$ thành hai tập B và C, mỗi tập có 11 phần tử và $S(B) = S(C)$, trong đó $S(B)$ và $S(C)$ là tổng các phần tử tương ứng

thuộc B và C. Từ giả thiết và giả thiết phản chứng ta suy ra $T \neq \varnothing$. Trong các phần tử của T tồn tại phần tử $B = (a_1, a_2, ..., a_{23})$ có $S(B)$ nhỏ nhất. Từ giả thiết ta suy ra $S(B) - a_i \equiv 0 \pmod 2, \forall i = \overline{1, 23}$. Do đó, $a_1, a_2, ..., a_{23}$ cùng tính chẵn lẻ. Nếu $a_1, a_2, ..., a_{23}$ cùng chẵn thì bộ $B' = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, ..., \frac{a_{23}}{2}\right) \in T$ và $S(B') < S(B)$. Nếu $a_1, a_2, ..., a_{23}$ cùng lẻ thì bộ $B' = \left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, ..., \frac{a_{23}+1}{2}\right) \in T$ và $S(B') < S(B)$. Cả hai trường hợp trên đều trái với cách chọn bộ B. Vậy 23 người đã cho có cân nặng bằng nhau.

17. Trong quá trình chia sữa, số sữa trong các ca thay đổi. Gọi a_k là lượng sữa nhiều nhất có trong một ca sau lần chia thứ k. Vì sau lần chia sữa thứ 7, số sữa trong các ca lặp lại như ban đầu nên a_k nhận hữu hạn giá trị. Theo nguyên tắc cực hạn, tồn tại $a = \max\limits_{k \geq 0} a_k$. Giả sử ca của chú lùn A đạt được số sữa a. Sau khi A chia sữa thì ca của A không còn sữa, sau một vòng (tính từ A) thì số sữa trong ca của A lại bằng a. Mỗi lần những người tiếp theo chia sữa thì số sữa mà A nhận được không vượt quá $\frac{1}{6}a$. Do đó để đạt được số sữa là a thì số sữa trong các ca sau khi A chia sữa (tính từ A, theo chiều kim đồng hồ) phải lần lượt là :

$$0, \quad \frac{6}{6}a, \quad \frac{5}{6}a, \quad \frac{4}{6}a, \quad \frac{3}{6}a, \quad \frac{2}{6}a, \quad \frac{1}{6}a.$$

Dễ thấy số sữa trong các ca ban đầu cũng phân bố như trên. Vì tổng số sữa trong các ca là 3 lít nên

$$\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}a + \frac{3}{6}a + \frac{4}{6}a + \frac{5}{6}a + \frac{6}{6}a = 3 \quad \text{hay} \quad a = \frac{6}{7}$$

Vậy số sữa phân bố trong các ca ban đầu là

$$0(l), \quad \frac{6}{7}(l), \quad \frac{5}{7}(l), \quad \frac{4}{7}(l), \quad \frac{3}{7}(l), \quad \frac{2}{7}(l), \quad \frac{1}{7}(l).$$

Chuyên đề 6
Bất biến

Bất biến là khái niệm quan trọng của toán học. Nói một cách đơn giản thì bất biến là đại lượng hay tính chất không thay đổi trong khi các trạng thái biến đổi. Người ta sử dụng bất biến để phân loại các vật trong một phạm trù nào đó. Hai vật thuộc cùng một loại nếu nó có cùng tính chất H nào đó và nếu vật A có tính chất H, vật B không có tính chất H thì B không cùng loại với A.

Trong chuyên đề này ta nghiên cứu ứng dụng của bất biến trong các bài toán về thuật toán của lí thuyết trò chơi. Đây là dạng toán thường gặp trong các kì thi Olympic.

6.1 Thuật toán

6.1.1 Định nghĩa thuật toán

Cho tập $A \neq \varnothing$ và ta gọi là không gian các trạng thái, mỗi phần tử của A gọi là một trạng thái. Khi đó, mỗi ánh xạ $T : A \to A$ gọi là một thuật toán (ôtômat).

6.1.2 Các bài toán về thuật toán

Bài toán 1 (Bài toán tìm kiếm thuật toán). Cho trạng thái ban đầu α_0 và trạng thái kết thúc α_n. Hỏi có hay không thuật toán T trên A sao cho khi thực hiện T hữu hạn lần ta thu được α_n ?

$$\alpha_0 \xrightarrow{T} \alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \alpha_n$$

Bài toán 2. Cho thuật toán T trên A và trạng thái ban đầu $\alpha \in A$.

a) Giả sử $\beta \in A$. Hỏi có thể nhận được β từ α sau một số hữu hạn bước thực hiện T hay không ?

b) Tìm tập tất cả các trạng thái có thể nhận được từ α sau một số hữu hạn bước thực hiện thuật toán T:

$$\overline{\alpha} = \{\beta \in A : \beta = T^n(\alpha)\}.$$

6.1.3 Hàm bất biến

Cho T là một thuật toán trên A, I là một tập hợp khác rỗng mà ta gọi là không gian các mẫu bất biến.

Khi đó: ánh xạ $H : A \to I$ gọi là hàm bất biến trên A nếu:

$$\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(a) = H(b)$$

Xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. Hai người chơi cờ. Sau mỗi ván người thắng được 2 điểm, người thua được 0 điểm, nếu hòa thì mỗi người được 1 điểm. Hỏi sau một số ván liệu có thể xảy ra trường hợp một người được 7 điểm và người kia được 10 điểm được không?

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng số điểm của cả hai người sau ván thứ n. Ta có

$$S(n+1) = S(n) + 2, \forall n \geq 0.$$

Do đó, $S(n)$ bất biến theo modun 2. Suy ra

$$S(n) \equiv S(0) \equiv 0 \pmod 2, \ \forall n \geq 0.$$

Vậy, không thể xảy ra trường hợp mà một người được 7 điểm và một người được 10 điểm.

Ví dụ 2. Thực hiện trò chơi sau: Lần đầu, viết lên bảng cặp số $\left(2, \sqrt{2}\right)$. Từ lần thứ hai, nếu trên bảng có cặp số $B = (a, b)$ thì được phép viết thêm cặp số

$$T(B) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Hỏi ta có thể viết được lên bảng cặp số $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$ hay không?.

Lời giải. Giả sử ở bước thứ n ta viết cặp số (a_n, b_n). Xét $S(n) = a_n^2 + b_n^2$, ta có

$$S_{n+1} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 = S_n, \forall n \geq 1.$$

Do đó, $S(n)$ là bất biến trong trò chơi nói trên.
Mà $S(1) = 6$ và $1+(1+\sqrt{2})^2 \neq 6$ nên ta không thể viết được cặp số $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 3. Trên bảng có hai số 1 và 2. Thực hiện việc ghi số theo quy tắc sau: Nếu trên bảng có hai số a, b thì được phép ghi thêm số $c = a + b + ab$. Hỏi bằng cách đó có thể ghi được các số 2001 và 11111 hay không?

Lời giải. Dãy các số được viết là

$$1, 2, 5, 11, 17, \ldots$$

Dễ dàng chứng minh được các số được viết thêm trên bảng đều chia cho 3 dư 2. Bất biến trên cho phép ta loại trừ số 2001 trong dãy các số viết được trên bảng. Tuy nhiên, bất biến đó không cho phép ta loại trừ số 11111. Ta đi tìm một bất biến khác. Quan sát các số viết được và quy tắc viết thêm số, ta có

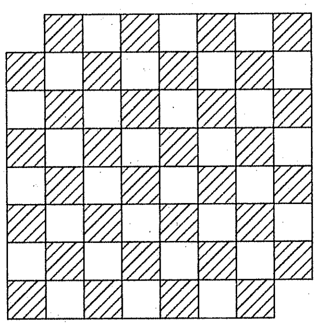
$$c = a + b + ab \Rightarrow c + 1 = (a+1)(b+1)$$

và nếu cộng thêm 1 vào các số thuộc dãy trên ta có dãy mới

$$2, 3, 6, 12, 18, \ldots$$

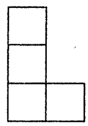
Như vậy, nếu cộng thêm 1 vào các số viết thêm thì các số này đều có dạng $2^n.3^m$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Do $11111 + 1 = 11112 = 3.8.463$ nên không thuộc dãy các số viết được.
Do đó không thể viết được các số 2001 và 11111.

Ví dụ 4. Bàn cờ vua 8×8 bị mất hai ô ở hai góc đối diện. Hỏi có thể lát phần còn lại của bàn cờ bởi các quân Domino 2×1 được không?

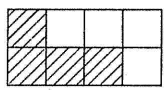


Lời giải. Mỗi quân Domino lát vào bàn cờ luôn chiếm một ô trắng và một ô đen. Do đó, nếu lát được phần còn lại của bàn cờ thì số ô trắng và số ô đen bằng nhau. Nhưng do hai ô ở hai góc đối diện của bàn cờ là hai ô cùng màu nên số ô màu trắng và số ô màu đen trong phần còn lại của bàn cờ không bằng nhau. Vậy không lát được phần còn lại của bàn cờ bằng các quân Domino.

Ví dụ 5. Xác định các số nguyên dương m, n sao cho bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân hình chữ L dưới đây

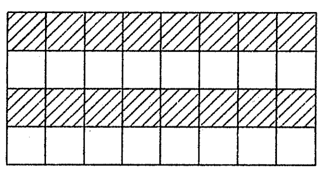


Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m \le n$. Để lát được bảng thì $m \ge 2, n \ge 3$. Giả sử ta có thể lát được bảng bởi a quân hình chữ L, ta có $m.n = 4a$. Vì $m.n \ge 6$ nên $a \ge 2$. Xét $a = 2$, ta có bảng 2×4. Bảng 2×4 có thể lát được bởi hai quân hình chữ L như hình vẽ dưới đây



Với $a = 3$ ta có $m \times n = 12$ nên có hai bảng thoả mãn là 2×6 và 3×4. Dễ dàng kiểm tra cả hai bảng này đều không lát được bởi các quân hình chữ L. Điều đó khiến ta dự đoán, để lát được bảng bởi các quân hình chữ L thì a chẵn. Để chứng minh dự đoán này ta tô màu các ô của bảng như sau:

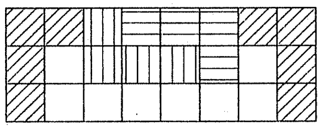
Giả sử được m chẵn. Các ô ở dòng có thứ tự lẻ (tính từ trên xuống dưới) được tô màu đen, các ô ở dòng có thứ tự chẵn màu trắng.



Khi đó, số ô đen và số ô trắng bằng nhau và bằng $2a$. Mỗi quân hình chữ L lát vào bảng chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng hoặc chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Giả sử lát được bởi x quân hình chữ L chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng và y quân hình chữ L chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + y = 3y + x = 2a. \end{cases}$$

Suy ra $x = y$ và $a = 2x$. Điều đó có nghĩa là a chẵn.
Bây giờ ta chứng minh nếu a chẵn, tức là $m \times n$ chia hết cho 8 thì có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ L. Thật vậy, nếu m chia hết cho 2 và n chia hết cho 4 thì bảng có thể chia thành các hình chữ nhật 2×4 nên lát được. Nếu m lẻ và n chia hết cho 8 thì do m có thể viết được dưới dạng $m = 2s + 3$ nên có thể chia bảng đã cho thành các hình chữ nhật 2×4 và 3×8. Do đó, nếu hình chữ nhật 3×8 lát được thì bảng đã cho sẽ lát được. Hình vẽ dưới đây chứng tỏ có thể lát được hình chữ nhật này



Vậy để lát được bảng đã cho bởi các quân hình chữ L thì điều kiện cần và đủ là $m \times n$ chia hết cho 8 và $m, n \geq 2$.

6.2 Bài tập

6.2.1 Bài tập luyện tập

1. Xét bàn cờ vua 8×8. Chứng minh rằng nếu xuất phát từ một ô góc, con mã không thể đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô một lần và kết thúc ở ô góc đối diện với ô góc nó xuất phát.

2. Một con robot nhảy trong mặt phẳng tọa độ theo quy tắc sau: Xuất phát từ điểm (x, y), con robot nhảy đến điểm (x', y') xác định như sau:

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad y' = \frac{2xy}{x+y}.$$

   Chứng minh rằng, nếu ban đầu con robot đứng ở điểm $(2009, 2010)$ thì không bao giờ con robot nhảy vào được trong đường tròn (C) có tâm là góc tọa độ O và bán kính $R = 2840$.

3. Viết các số $1, 2, 3, \ldots, 2010$ lên bảng. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần xóa đi hai số a, b bất kì và viết thêm số $c = |a - b|$. Chứng minh rằng số còn lại cuối cùng trên bảng là một số lẻ.

4. Một hình tròn được chia thành 2010 hình quạt. Trong mỗi hình quạt có một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần cho phép lấy ra hai viên bi trong hai hình quạt nào đó và chuyển chúng sang cac ô bên cạnh nhưng

theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số lần có thể chuyển hết các viên bi vào một hình quạt được không?

5. Một dãy gồm có 19 phòng. Ban đầu mỗi phòng có một người. Sau đó, cứ mỗi ngày có hai người nào đó chuyển sang hai phòng bên cạnh nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số ngày có hay không trường hợp mà

   (a) Không có ai ở phòng có thứ tự chẵn.

   (b) Có 10 người ở phòng cuối.

6. Ở 6 đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: Mỗi lần lấy ra một cạnh và cộng hai số trên cạnh đó với cùng một số nguyên nào đó. Hỏi sau một số lần thay đổi như thế thì 6 số mới ở các đỉnh của lục giác có thể bằng nhau không?

7. Cho bảng ô vuông $n \times n$ $(n > 5)$. Trong mỗi ô của bảng ta viết một dấu $(+)$ hoặc $(-)$ sao cho trong toàn bộ bảng chỉ có một dấu $(-)$ và không nằm ở các ô góc. Mỗi lần cho phép đổi dấu tất cả các ô trên cùng một hàng, cùng một cột, cùng một đường song song với đường chéo, hoặc bốn ô ở góc. Hỏi sau hữu hạn lần có thể làm cho bảng chỉ gồm các dấu cộng được không?

8. Trên bảng cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Thực hiện trò chơi sau, nếu trên bảng đã có đa thức $P(x)$ thì được phép viết thêm lên bảng một trong hai đa thức sau

$$Q(x) = x^2.f(\frac{1}{x} + 1), \quad R(x) = (x-1)^2.f(\frac{1}{x-1}).$$

   Hỏi sau một số bước ta có thể viết được đa thức

$$g(x) = x^2 + 10x + 9$$

   hay không?

9. (VMO - 1991): Cho bảng 1991×1992. Kí hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau: lần thứ nhất tô ba ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$;

   $1 \le r \le 1989, 1 \le s \le 1990$, từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô của bảng được không?

10. (VMO - 1992): Tại mỗi đỉnh của đa giác lồi $A_1A_2...A_{1993}$ ta ghi một dấu cộng (+) hoặc một dấu trừ (−) sao cho trong 1993 dấu đó có cả dấu cộng (+) và dấu trừ (−). Thực hiện việc thay dấu như sau: mỗi lần, thay dấu đồng thời tại tất cả các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

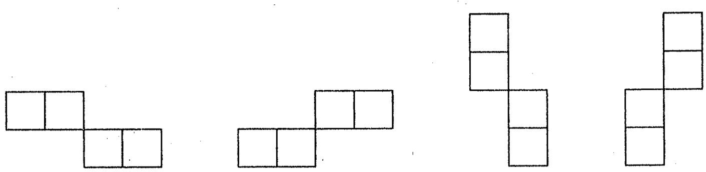
    - Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} là như nhau thì dấu tại A_i được thay bằng dấu (+).

    - Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} khác nhau thì dấu tại A_i được thay bằng dấu (−).

    (Quy ước A_{1994} là A_1)

    Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên $k \geq 2$ sao cho sau khi thực hiện liên tiếp k lần phép thay dấu nói trên, ta được đa giác $A_1A_2...A_{1993}$ mà dấu tại mỗi đỉnh A_i ($i = \overline{1, 1993}$) trùng với dấu tại chính đỉnh đó ngay sau lần thay dấu thứ nhất.

11. (VMO-2006) Xét bảng ô vuông $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương lớn hơn 3). Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng (mỗi ô 1 viên bi) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây

    Hỏi sau một số lần ta có thể nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau được không nếu

    a) $m = 2004$ và $n = 2006$?

    b) $m = 2005$ và $n = 2006$?

12. Trên bàn có 2007 viên bi gồm 667 bi xanh, 669 bi đỏ, 671 bi vàng. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần lấy đi 2 viên bi khác màu và đặt thêm 2 viên bi có màu còn lại. Hỏi có thể nhận được trạng thái mà trên bàn chỉ còn lại các viên bi cùng màu được không?
    (*Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSGQG tỉnh Bắc Ninh, năm 2007*)

13. Các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, ...$ được viết trong các ô của một bảng ô vuông kích thước 2003×2003 theo vòng xoáy trôn ốc (xoáy ngược chiều kim đồng hồ) sao cho số 0 nằm ở ô trung tâm (tâm của bảng). Các dòng và

cột của bảng được đánh số tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải (bắt đầu từ số 1).

a) Số 2004 nằm ở dòng nào, cột nào? Tại sao?

b) Thực hiện thuật toán sau: lần đầu tiên, thay số 0 ở ô trung tâm bởi số 1998; mỗi lần tiếp theo, cho phép lấy ra 12 số trong 12 ô liên tiếp trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột hoặc trong cùng một hình chữ nhật 3×4 rồi tăng mỗi số đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể làm cho tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 hay không? Tại sao?

	20	19	18	17	16	
	21	6	5	4	15	
	22	7	0	3	14	
	23	8	1	2	13	
	24	9	10	11	12	

14. Cho dãy hữu hạn các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 4)$ có các số hạng đôi một khác nhau. Lấy ra khỏi dãy 4 số hạng bất kì rồi lại xếp chúng vào vị trí đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Với dãy nhận được lại làm như vậy.... Hỏi bằng cách đó ta có thể nhận được dãy $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ hay không?

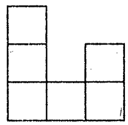
15. Cho k, n là các số nguyên dương. Xét một bảng ô vuông vô hạn, đặt $3k \times n$ quân cờ trong hình chữ nhật $3k \times n$. Thực hiện trò chơi sau: mỗi quân cờ sẽ nhảy ngang hoặc dọc qua một ô kề với nó và có chứa quân cờ, để đến ô kề với ô này (ô mà quân cờ nhảy đến phải là ô trống). Sau khi làm như trên ta loại bỏ quân cờ ở ô bị nhảy qua ra khỏi bàn cờ. Chứng minh rằng, với cách chơi đó trên bảng ô vuông sẽ không bao giờ còn lại đúng một quân cờ.

16. (Belarus - 1999): Cho bảng 7×7 và các quân cờ có một trong ba loại sau: $3 \times 1, 1 \times 1$ và hình chữ L gồm 3 ô. Người thứ nhất có vô hạn quân 3×1 và một quân hình chữ L, trong khi người thứ hai chỉ có duy nhất một quân 1×1.

a) Chứng minh: nếu cho người thứ hai đi trước, anh ta có thể đặt quân cờ của mình vào một ô nào đó sao cho người thứ nhất không thể phủ kín phần còn lại của bảng.

b) Chứng minh rằng nếu cho người thứ nhất thêm một quân hình chữ L thì bất kể người thứ nhất đặt quân cờ của mình ở đâu thì người thứ hai cũng vẫn có thể phủ kín phần còn lại của bảng.

17. (IMO 2004) Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc.



Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật $m \times n$, trong đó m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu.

6.2.2 Bài tập tự giải

1. Thực hiện trò chơi sau: Nếu trên bảng có cặp phân số hữu tỉ $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ thì được phép viết thêm một trong các cặp:

$$\left(\frac{a+b}{b}; \frac{c+d}{d}\right), \quad \left(\frac{a-b}{b}; \frac{c-d}{d}\right), \quad \left(\frac{b}{a}; \frac{d}{c}\right)$$

(trong quá trình viết thêm các cặp phân số ta không được phép tối giản các phân số).

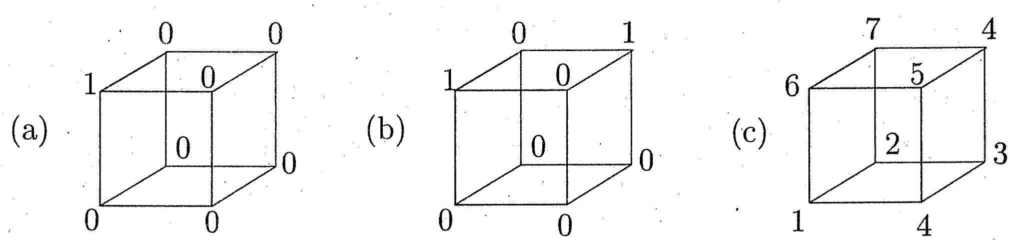
a) Chứng minh rằng xuất phát từ cặp $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ta có thể viết được cặp $\left(\frac{n}{n+1}; \frac{n+2}{n+3}\right)$ với n nguyên dương tuỳ ý.

b) Hỏi có thể nhận được hay không từ cặp $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ một cặp phân số hữu tỉ tuỳ ý?

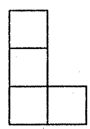
2. Xét bảng ô vuông 2010×2010. Mỗi ô của bảng ta tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ, sao cho mỗi ô đỏ không nằm ở biên thì có đúng 5 ô xanh nằm xung quanh nó, mỗi ô xanh không nằm ở biên thì có đúng 4 ô đỏ nằm quanh nó. Tính số ô xanh và số ô đỏ trong bảng đã cho.

3. Một hình tròn được chia thành n hình quạt (n nguyên dương). Trong mỗi hình quạt có một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần cho phép lấy ra hai viên bi trong hai hình quạt nào đó và chuyển chúng sang các ô bên cạnh nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi với n như thế nào thì sau một số lần chuyển bi ta có thể chuyển hết các viên bi vào một hình quạt?

4. Tại mỗi đỉnh của một hình lập phương ta viết một số nguyên. Mỗi lần lấy ra một cạnh và tăng đồng thời hai số trên cạnh đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể nhận được trạng thái mà 8 số ở 8 đỉnh của hình lập phương bằng nhau được không? Biết các số ở các đỉnh của hình lập phương ban đầu là



5. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$. Xét bảng ô vuông $n \times n$ mất hai ô ở hai góc đối diện. Hãy tìm điều kiện của n sao cho có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ L dưới đây



6. Tại đỉnh A_1 của 12 giác đều $A_1A_2...A_{12}$ ta đánh dấu $(-)$, các đỉnh còn lại đánh dấu $(+)$. Mỗi lần cho phép lấy ra k đỉnh liên tiếp và đổi dấu các đỉnh đó. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể nhận được trạng thái mà đỉnh A_2 mang dấu $(-)$, các đỉnh khác mang dấu $(+)$ được không? Hãy giải bài toán với:

(a) $k = 4$ (b) $k = 3$.

7. Có ba máy in, in trên mỗi tấm bìa một cặp số tự nhiên hoạt động theo nguyên tắc sau:

Máy 1: In ra tấm bìa $(a+1, b+1)$ từ tấm bìa (a, b).

Máy 2: In ra tấm bìa $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ từ tấm bìa (a, b) nếu a và b đều chẵn.

Máy 3: In ra tấm bìa (a, c) từ hai tấm bìa (a, b) và (b, c).

a) Ban đầu ta có tấm bìa $(5, 19)$, hỏi có thể in được các tấm bìa $(1, 100)$ và $(1, 50)$ hay không?

b) Ban đầu ta có tấm bìa (a, b) với $1 \leq a < b \leq n$. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho ta nhận được tấm bìa $(1, n)$.

8. Cho bảng ô vuông 8×8. Ghi vào mỗi ô của bảng một số nguyên bất kì. Mỗi lần cho phép ta lấy ra một hình vuông 3×3 hoặc 4×4 rồi tăng mỗi số trong hình vuông đó lên một đơn vị. Hỏi nếu xuất phát từ một bảng các số tùy ý thì sau một số bước ta có thể nhận được bảng gồm

   (a) Toàn các số là bội của 3 hay không?

   (b) Toàn các số là bội của 10 hay không?

9. Xét bảng 2009×2009. Trong mỗi ô của bảng ta điền một số $+1$ hoặc -1. Bên dưới mỗi cột ta viết tích các số trong cột đó, bên phải mỗi hàng ta viết tích các số trong hàng đó. Chứng minh rằng tổng của các tích vừa viết là một số khác 0.

10. Xét bảng 9×9. Ở ô (i, j) ta viết số $9(i-1)+j$. Mỗi lần lấy ra một hình vuông 4×4 và tăng đồng thời các số trong đó lên một đơn vị. Chứng minh rằng, ước số chung lớn nhất của tất cả các số trong bảng tại mọi thời điểm luôn bằng 1.

11. Chia góc vuông xOy thành lưới ô vuông đơn vị. Các hàng và cột được đánh số thứ tự tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải. Kí hiệu ô (m, n) là ô nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Ban đầu đặt vào ô $(1, 1)$ một viên bi. Thực hiện việc chuyển bi như sau: Mỗi lần lấy ra khỏi góc viên bi nằm ở ô (m, n) nào đó mà tại các ô $(m+1, n)$ và $m, n+1)$ không có bi, đồng thời thêm vào hai ô nói trên mỗi ô một viên bi. Hỏi có nhận được hay không trạng thái mà

   a) Các ô $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ đều không có bi.

   b) Các ô nói trên và hai ô $(1, 3)$, $(3, 2)$ đều không có bi.

12. Cho 4 tam giác vuông bằng nhau. Mỗi lần lấy ra một tam giác và chia thành hai tam giác vuông nhỏ hơn bởi đường cao hạ từ đỉnh góc vuông. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm luôn có ít nhất hai tam giác bằng nhau.

13. Mặt phẳng toạ độ Oxy được chia thành lưới ô vuông đơn vị. Đặt một số quân cờ tại các mắt lưới. Mỗi quân cờ có thể nhảy ngang hoặc dọc theo qui tắc *solitairejump*: Nếu ba ô A, B, C liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng một cột sao cho B nằm giữa A và C, các ô A, B có quân cờ và ô C không có quân cờ thì quân cờ ở A có thể nhảy sang C. Sau khi làm như vậy thì loại bỏ quân cờ ở B ra khỏi bàn cờ. Giả sử ban đầu các quân cờ được đặt phía dưới trục hoành (đặt tại các nút có toạ độ (x, y) với $y \leq 0$). Chứng minh rằng sau hữu hạn bước không thể còn lại đúng một quân cờ nằm ở ô $(0, 5)$.

14. (IMO 1993) Xét bàn cờ vô hạn ô. Mỗi quân cờ có thể nhảy ngang hoặc dọc theo qui tắc *solitairejump*: Nếu ba ô A, B, C liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng một cột sao cho B nằm giữa A và C, các ô A, B có quân cờ và ô C không có quân cờ thì quân cờ ở A có thể nhảy sang C. Sau khi làm như vậy thì loại bỏ quân cờ ở B ra khỏi bàn cờ. Trò chơi kết thúc nếu trên bàn cờ chỉ còn lại đúng một quân cờ. Ban đầu ta đặt n^2 quân cờ trong một hình vuông $n \times n$ $(n \geq 1)$. Hỏi với n như thế nào thì trò chơi có thể kết thúc?

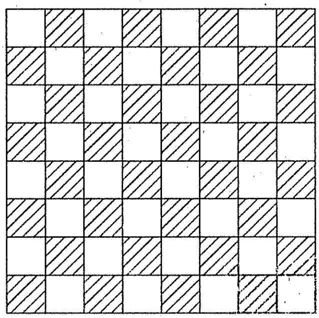
15. (Shortlist IMO-1994) Có 1994 cô gái ngồi quanh một bàn tròn, chơi trò chơi với n lá bài. Ban đầu, một cô gái giữ tất cả n lá bài. Mỗi lần đi, nếu cô nào có ít nhất hai lá bài thì chuyển cho hai người ngồi kề với mình mỗi người một lá bài. Trò chơi sẽ kết thúc nếu mỗi cô gái có không quá 1 lá bài. Chứng minh rằng :

    a) Nếu $n \geq 1994$ thì trò chơi không thể kết thúc.

    b) Nếu $n < 1994$ thì trò chơi sẽ kết thúc tại một thời điểm nào đó.

6.3 Hướng dẫn giải bài tập

1. Mỗi lần đi, con mã chuyển sang ô khác màu với ô nó đang đứng.



Để đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô một lần thì con mã phải đi hết 63 bước. Do đó, ô mà nó kết thúc hành trình khác màu với ô ban đầu nó xuất phát. Đó không thể là ô ở góc đối diện.

2. Ta có $x'.y' = xy$. Do đó bất biến là tích các tọa độ của điểm mà con robot nhảy tới được. Giả sử con robot đến được điểm $M(p,q)$, ta có

$$OM = \sqrt{p^2+q^2} \geq \sqrt{2pq} = \sqrt{2.2009.2010} > 2840.$$

Vậy, con robot không thể nhảy vào trong đường tròn tâm O, bán kính $R = 2840$.

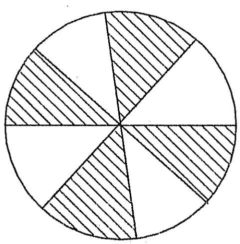
3. Gọi $S(n)$ là tổng các số trên bảng sau bước thứ n. Ta có $S(n)$ bất biến theo môđun 2. Mặt khác

$$S(0) = 1 + 2 + 3 + ... + 2010 = 1005.2011$$

nên $S(n) \equiv 1 \pmod 2, \forall n$.

Vậy số cuối cùng còn lại trên bảng là một số lẻ.

4. Tô màu các hình quạt bởi hai màu đen, trắng như hình vẽ:



sao cho hai hình quạt kề nhau thì khác màu. Gọi $S(n)$ và $T(n)$ tương ứng là số viên bi trong các hình quạt màu đen và số viên bi trong các hình quạt màu trắng sau bước chuyển bi thứ n. Ta có $S(n)$ và $T(n)$ bất biến theo modun 2. Do $S(0) = T(0) = 1005$ nên $S(n)$ và $T(n)$ lẻ với mọi n. Do đó không thể có trạng thái mà tất cả các viên bi ở trong cùng một hình quạt.

5. Đánh số các phòng theo thứ tự $1, 2, 3, ..., 19$.

1	2	3	4	...	18	19

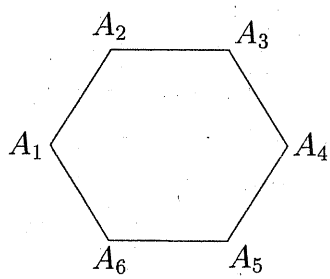
Ta đeo cho mỗi vị khách một thẻ ghi số phòng mình đang ở. Gọi $S(n)$ là tổng các số ghi trên thẻ của tất cả các vị khách ở ngày thứ n. Dễ thấy $S(n)$ là bất biến. Do đó, ta có

$$S(n) = S(1) = 1 + 2 + ... + 19 = 190, \forall n \geq 1.$$

a) Vì có lẻ người nên nếu không ai ở phòng có thứ tự chẵn thì $S(n)$ là một số lẻ, vô lí.

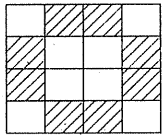
b) Nếu có 10 người ở phòng cuối (phòng số 19) thì $S(n) > 19.10 = 190$, vô lí.

6. Giả sử lục giác đã cho là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ và 6 số ghi ở các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ban đầu tương ứng là a, $a+2$, $a+4$, $a+6$, $a+8$, $a+10$ với $a \in \mathbb{Z}$.



Gọi $S(n)$ và $T(n)$ tương ứng là tổng các số ở các đỉnh A_1, A_3, A_5 và A_2, A_4, A_6 sau bước thứ n. Ta có $S(n) - T(n)$ là bất biến. Từ đó suy ra không nhận được trạng thái mà 6 số ở 6 đỉnh của lục giác bằng nhau.

7. *Hướng dẫn.* Thay cho dấu $(+)$ ta viết số 1, dấu $(-)$ ta viết số (-1). Xét hình chữ nhật 4×4 chứa dấu $(-)$ sao cho dấu $(-)$ nằm ở biên nhưng không nằm ở các ô góc. Tô màu các ô của hình chữ nhật 4×4 như sau:



Gọi $S(n)$ là tích các số được viết trong các ô được tô màu sau bước thứ n. Ta luôn có $S(n) = -1$.

8. Không thể.

Đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có biệt thức $\Delta_P = b^2 - 4ac$. Xét hai đa thức được viết thêm:

$$Q(x) = (a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a$$
$$R(x) = cx^2 + (b-2a)x + (a-b+c)$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\Delta_Q = \Delta_R = b^2 - 4ac = \Delta_P$$

Như vậy, các đa thức được viết thêm và đa thức ban đầu có cùng biệt thức Δ.

Vì hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có biệt thức Δ khác nhau nên không thể viết được đa thức $g(x)$.

9. ***Cách giải 1.*** Đánh số các ô của bảng như hình dưới đây:

1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2
2	3	1	2	3	1	...	2	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2
2	3	1	2	3	1	...	2	3	1
1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2

Với cách đánh số trên, các ô của bảng được chia thành 3 loại: loại 1 gồm các ô được đánh số 1, loại 2 gồm các ô được đánh số 2 và loại 3 gồm các ô được đánh số 3.

Lần đầu tiên, ba ô được tô màu thuộc cùng một loại. Từ lần thứ hai, ba ô được tô màu thuộc ba loại khác nhau. Do số ô mỗi loại bằng nhau nên không thể tô màu hết tất cả các ô của bảng.

Cách giải 2. Xét bài toán từ lần tô màu thứ hai. Không gian trạng thái A gồm các bảng 1991×1992 trong đó có ít nhất ba ô sau được tô màu

$$(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2).$$

Thuật toán $T : A \to A$ biến mỗi trạng thái $a \in A$ thành trạng thái $T(a) \in A$ sao cho trong $T(a)$ có thêm đúng 3 ô liên tiếp trên cùng một hàng hoặc cùng một cột được tô màu. Trạng thái ban đầu a_0 là trạng thái mà có đúng ba ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$ được tô màu; trạng thái kết thúc a^* là trạng thái mà ở đó tất cả các ô đều được tô màu. Để xây dựng hàm bất biến H ta thực hiện cách viết số sau: Với mỗi trạng thái $a \in A$ tùy ý, nếu ô (m, n) của a được tô màu thì ta viết số $m.n$. Xét $I = \{0, 1, 2\}$ và $H : A \to I$ sao cho với mỗi $a \in A$, $H(a)$ là số dư của tổng các số được viết trong a khi chia cho 3. Dễ thấy H là hàm bất biến. Suy ra, $H(a) = H(a_0) = 2, \forall a \in \overline{a_0}$. Mặt khác, $H(a^*) = 0$ nên $a^* \notin \overline{a_0}$. Điều đó có nghĩa là không thể tô màu tất cả các ô của bảng đã cho.

10. Đặt tương ứng dấu $(+)$ với số 1 và dấu $(-)$ với số (-1). Phép thay dấu của bài ra tương đương với phép thay số sau: mỗi lần, thay số đồng thời tại tất cả các đỉnh A_i theo quy tắc: số tại A_i được thay bằng tích của số tại A_i và số tại A_{i+1}.

Kí hiệu $a_i(n)$ là số tại đỉnh A_i ngay sau lần thay số thứ n, ta có

$$a_i(n) \in \{-1, 1\}, \forall i = \overline{1, 1993}.$$

Vì các số tại các đỉnh của đa giác ở mọi thời điểm chỉ là 1 và (-1) nên số đa giác số là hữu hạn. Suy ra, tồn tại các thời điểm s và t với $s > t \geq 1$ sao cho

$$a_i(t) = a_i(s), \forall i = \overline{1, 1993} \quad (1).$$

Nếu $t = 1$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

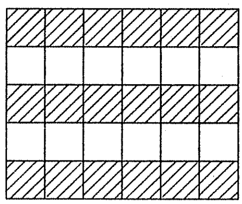
Xét $t > 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow a_i(t-1).a_{i+1}(t-1) = a_i(s-1).a_{i+1}(s-1), \forall i = \overline{1, 1993} \\
&\Leftrightarrow \frac{a_{i+1}(t-1)}{a_{i+1}(s-1)} = \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)}, \forall i = \overline{1, 1993} \\
&\Leftrightarrow \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = 1, \forall i = \overline{1, 1993} \quad \text{hoặc} \quad \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = -1, \forall i = \overline{1, 1993}.
\end{aligned}$$

Mặt khác
$$\prod_{i=1}^{n} a_i(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
nên
$$\frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = 1, \forall i = \overline{1,1993}$$
hay
$$a_i(t-1) = a_i(s-1), \forall i = \overline{1,1993} \quad (2).$$
Từ (1) và (2) ta có
$$a_i(1) = a_i(s-t+1), \forall i = \overline{1,1993}.$$
□

11. a) Bảng đã cho có thể chia thành các hình chữ nhật 4×2 nên có thể nhận được trạng thái mà số bi trong các ô bằng nhau.

    b) Tô màu các ô của bảng như hình vẽ (tô các hàng: 1, 3, ..., 2005)



Dễ thấy, mỗi lần đặt bi có 2 viên được đặt vào các ô được tô màu và 2 viên được đặt vào các ô không được tô màu. Do đó, nếu gọi $S(n)$ là số bi trong các ô được tô màu và $T(n)$ là số bi trong các ô không được tô màu sau lần đặt bi thứ n thì $S(n) - T(n)$ là bất biến. Ta có $S(n) - T(n) = S(0) - T(0) = 0, \forall n \geq 0$. Do đó, nếu nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau thì số ô được tô màu và số ô không được tô màu bằng nhau. Điều này không thể xảy ra vì m là một số lẻ. □

12. Gọi $X(n), D(n)$ và $V(n)$ tương ứng là số bi màu xanh, số bi màu đỏ và số bi màu vàng sau bước thứ n. Dễ thấy các đại lượng
$$X(n) - D(n), D(n) - V(n), V(n) - X(n)$$
bất biến theo môđun 3.

Từ đó suy ra không thể nhận được trạng thái mà trên bàn chỉ còn lại các viên bi cùng màu.

13. a) Xét hình vuông cạnh $2n+1$ có tâm là ô chứa số 0: số được viết ở đỉnh dưới, bên trái của hình vuông này là $(2n+1)^2-1$ (ví dụ các số: $8, 24, \ldots$).

Vì $(2\times 22+1)^2-1=2024$ và số 0 nằm ở ô dòng số 1002, cột số 1002 nên số 2024 nằm ở hàng số $1002-22=980$ và cột số $1002-22=980$. Vậy số 2004 nằm ở hàng số $980+20=1000$ và cột số 980.

b) Ta đánh dấu các ô của bảng như hình vẽ.

X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X

Gọi $S(n)$ là tổng các số trong các ô được đánh dấu ở bước thứ n. Do mỗi lần thực hiện thuật toán (kể từ lần thứ 2) có đúng 4 ô được đánh dấu tham gia nên

$$S(n+1)=S(n)+4, \forall n\geq 1.$$

Do đó $S(n)$ bất biến theo modun 4. Suy ra

$$S(n)\equiv S(1) \pmod 4, \forall n\geq 1.$$

Ta xét số dư của $S(0)$ khi chia cho 4:

Xét các đường chéo gồm những ô được đánh dấu, các đường chéo đó gồm một trong ba loại:

- Loại 1 chứa toàn các số chia hết cho 4 (đường chéo đi qua ô trung tâm)

- Loại 2 chứa toàn các số chia cho 4 dư 2: Do tính đối xứng của bảng nên có chẵn đường chéo loại này và như vậy tổng các số trên các đường chéo loại này chia hết cho 4.

- Loại 3 chứa toàn các số lẻ: Trên mỗi đường chéo loại này có một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư 1 và một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư -1 và như vậy tổng các số trong các đường chéo loại này cũng chia hết cho 4.

Từ đó có $S(0) \equiv 0 \pmod 4$, suy ra $S(1) = S(0) + 1998 \equiv 2 \pmod 4$ hay $S(n) \equiv 2 \pmod 4, \forall n \geq 1$.

Vậy không thể có trạng thái mà tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 được.

14. *Đáp số* : $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$.

Giả sử sau m bước ta nhận được dãy $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$. Ta quy ước, cặp số (x_i, x_j) gọi là một cặp số đẹp nếu $i < j$ và x_i đứng trước x_j trong dãy. Gọi $S(k)$ là số cặp số đẹp ở bước thứ k. Mỗi lần thực hiện thuật toán thì có thể xem như thực hiện một số chẵn lần việc đổi chỗ hai số hạng liên tiếp. Mỗi lần đổi chỗ hai số hạng liên tiếp thì số cặp số đẹp tăng lên 1 hoặc giảm đi 1, do đó

$$S(k+1) \equiv S(k) \pmod 2, \ \forall k \geq 0.$$

Mặt khác

$$S(0) = \frac{n(n-1)}{2}, S(m) = 0 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod 2.$$

Từ đó suy ra $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$.

Với $n = 4k$ ta thực hiện việc đổi chỗ lần lượt cho các bộ:

$$(x_1, x_2, x_{4k-1}, x_{4k}), (x_3, x_4, x_{4k-3}, x_{4k-2}), ..., (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}).$$

Với $n = 4k + 1$ ta thực hiện việc đổi chỗ lần lượt cho các bộ:

$$(x_1, x_2, x_{4k}, x_{4k+1}), ..., (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \text{ (giữ nguyên} x_{2k+1}).$$

15. Tô màu các ô của bàn cờ bởi ba màu như hình vẽ

1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	x	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...

Gọi $s(i)$ là tổng số quân cờ trong các ô màu i. Tại mọi thời điểm ta luôn có $s(1), s(2), s(3)$ cùng tính chẵn lẻ. Do đó không thể có trạng thái mà trên bảng chỉ còn lại đúng một quân cờ.

16. a) Ta đánh dấu bảng theo hai cách như như hình vẽ dưới đây. Nếu người thứ nhất phủ được phần còn lại thì phải đặt quân hình chữ L theo hai cách khác nhau: vô lí.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	x	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	x	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1

Quân hình chữ L cần phủ ba ô xung quanh ô đánh dấu x: ô chứa số 3 và hai số 1.

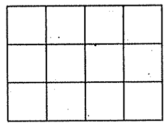
b) Ta thu hẹp dần bảng đã cho nhờ các nhận xét sau:

- Quân cờ của người thứ hai phải rơi vào một trong bốn hình vuông 4×4 có một đỉnh trùng với một trong bốn đỉnh của bảng ban đầu, nên chỉ cần xét bảng B với kính thước 4×4.

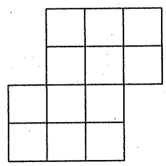
- Trong bảng B, quân cờ phải rơi vào một trong 4 hình vuông 2×2 có một đỉnh trùng với một trong bốn đỉnh của B, nên chỉ cần xét trong bảng C với kích thước 2×2. Từ đó có đpcm.

17. Dễ thấy $m, n \notin \{1, 2, 5\}$. Chia hình chữ nhật $m \times n$ thành $m \times n$ ô vuông và đánh số các hàng, các cột từ dưới lên trên, từ trái sang phải. Ta gọi

ô (p, q) là ô nằm ở giao của hàng thứ p và cột thứ q. Hai viên gạch hình móc câu chỉ có thể ghép lại để được một trong hai hình dưới đây



(H_1)



(H_2)

Do đó, để lát được hình chữ nhật $m \times n$ thì $m.n$ phải chia hết cho 12. Nếu ít nhất một trong hai số m hoặc n chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật $m \times n$. Thật vậy, giả sử được m chia hết cho 4. Nếu n chia hết cho 3 thì có thể chia hình chữ nhật $m \times n$ thành các hình chữ nhật 4×3, do đó có thể lát được. Nếu n không chia hết cho 3 thì có thể viết n dưới dạng $n = 3a + 4b$ với a, b là các số nguyên dương, do đó có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số m, n chia hết cho 4. Giả sử ngược lại, khi đó cả m và n chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh điều này không xảy ra ta tạo ra bất biến. Để tạo bất biến ta điền các số vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô (p, q). Nếu chỉ một trong hai tọa độ p hoặc q chia hết cho 4 thì điền số 1 vào ô đó. Nếu cả hai tọa độ p và q chia hết cho 4 thì điền số 2 vào ô đó. Với cách điền số như vậy ta thu được bất biến là tổng các số trong hình (H_1) và tổng các số trong hình (H_2) luôn là số lẻ. Do m, n chẵn nên tổng các số trong toàn bộ hình chữ nhật $m \times n$ là một số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật $m \times n$ thì tổng số hình (H_1) và (H_2) được sử dụng phải là số chẵn. Khi đó, $m.n$ chia hết cho 24. Điều này không xảy ra vì cả m, n đều không chia hết cho 4. $\square$

Chuyên đề 7
Đơn biến và bài toán hội tụ

Nói một cách đơn giản thì đơn biến (monovariant) là đại lượng biến đổi theo một chiều nhất định (tăng hoặc giảm). Cũng như bất biến, đơn biến có vai trò quan trọng trong toán học. Ta sử dụng đơn biến để chứng minh một quá trình nào đó hội tụ (dừng) hay phân kì (không dừng).

7.1 Hàm đơn biến

Cho $A \neq \varnothing$ là không gian các trạng thái và thuật toán $T : A \to A$. Ánh xạ $H : A \to \mathbb{R}$ gọi là hàm đơn biến trên A nếu H thoả mãn một trong hai điều kiện sau:

a) $\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(b) < H(a)$.

b) $\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(b) > H(a)$.

(Kí hiệu $\overline{a}$ là tập các trạng thái nhận được từ a sau khi thực hiện thuật toán T hữu hạn lần).

7.2 Bài toán hội tụ và bài toán phân kì

Bài toán hội tụ. Cho thuật toán T trên không gian các trạng thái A và trạng thái ban đầu α. Chứng minh rằng sau hữu hạn lần thực hiện thuật toán T, ta nhận được trạng thái xác định β và không thể thực hiện T thêm nữa (trò chơi dừng lại).

Bài toán phân kì. Cho thuật toán T trên A và trạng thái ban đầu α. Chứng minh rằng ta có thể thực hiện thuật toán T vô hạn lần (trò chơi không dừng).

Để giải các bài toán hội tụ và các bài toán phân kì, ta sử dụng hàm đơn biến. Ta có các định lí sau:

Định lí 1. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{R}$ trên không gian các trạng thái A hữu hạn thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 2. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ tăng và bị chặn trên thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 3. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ giảm và bị chặn dưới thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Xét bảng ô vuông $m \times n$ $(m, n \geq 2)$. Trong mỗi ô của bảng ta điền một số thực. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần lấy ra một hàng hoặc một cột có tổng các số nhỏ hơn 0 và đổi dấu tất cả các số trong hàng (hoặc cột) đó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được bảng mà tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột là số không âm.

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng tất cả các số trong bảng sau bước thứ n. Ta có, $S(n+1) > S(n), \forall n \geq 0$. Do đó, $S(n)$ là một hàm đơn biến. Mặt khác, số trạng thái có thể nhận được là hữu hạn nên chỉ có thể thực hiện thuật toán hữu hạn lần và ta nhận được bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Cho một dãy phòng dài vô hạn, được đánh số: $1, 2, 3, \ldots$. Có một số hữu hạn người sống trong dãy phòng. Mỗi ngày có hai người sống ở hai phòng cạnh nhau chuyển sang hai phòng khác theo hai hướng ngược nhau nhưng không được tráo đổi vị trí cho nhau. Chứng minh rằng việc chuyển phòng đó dừng lại sau hữu hạn ngày.

Lời giải. Ta đưa cho mỗi người một chìa khoá, trên đó có ghi số phòng mình đang ở. Gọi $S(n)$ là tích các số viết trên các chìa khoá ở ngày thứ n. Ta có:

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} = \frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)} < 1, \forall n \geq 1,$$

trong đó k và $k+1$ là các phòng có người chuyển.
Do đó, $S(n)$ là một đơn biến.
Do $S(n)$ giảm và $S(n) \in \mathbb{N}^*$ nên việc chuyển phòng phải dừng lại sau hữu hạn ngày.

7.3 Bài tập

7.3.1 Bài tập luyện tập

1. Trên mặt phẳng cho một số điểm đỏ và một số điểm xanh. Một số cặp điểm trong chúng được nối với nhau. Một điểm được gọi là kì dị nếu có quá nửa số đoạn thẳng xuất phát từ điểm này và có đầu mút còn lại khác màu với nó. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần chọn ra một điểm kì dị và đổi màu nó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước sẽ không còn điểm kì dị nào.

2. Trong một quốc hội, mỗi nghị sĩ có không quá ba đối thủ (nếu A là đối thủ của B thì B cũng là đối thủ của A). Chứng minh rằng ta có thể chia quốc hội thành hai viện sao cho mỗi nghị sĩ có không quá một đối thủ trong cùng viện.

3. Tại mỗi đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$ của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ta viết một số thực. Thực hiện thuật toán sau: Nếu bốn số a, b, c, d đứng ở bốn đỉnh liên tiếp $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3} (1 \leq i \leq n)$ thỏa mãn $(a-d)(b-c) < 0$ thì ta đổi chỗ b và c cho nhau. Chứng minh rằng thuật toán chỉ có thể thực hiện hữu hạn lần.

   (Quy ước A_{n+k} là A_k với $1 \leq k \leq 2$)

4. Ban đầu ta có bộ số $B_0 = (1, 2, 3, 4)$. Thực hiện trò chơi sau, nếu ta có bộ số $B = (x, y, z, t)$ thì thay bởi bộ $T(B) = (x - y, y - z, z - t, t - x)$. Chứng minh rằng sau một số bước ta nhận được bộ số (x, y, z, t) mà

$$|x| + |y| + |z| + |t| \geq 2009.$$

5. Ban đầu ta có bộ số (a, b, c, d), trong đó a, b, c, d là các số nguyên đôi một khác nhau. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (x, y, z, t)$ với x, y, z, t nguyên thì được phép thay thế bởi bộ số

$$T(B) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{t+x}{2}\right).$$

   Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước.

7.3.2 Bài tập tự giải

1. Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần lấy ra hai số a, b ở hai vị trí liên tiếp sao cho b không chia hết cho a và thay a bởi ước số chung lớn nhất của a và b, thay b bởi bội số chung nhỏ nhất của a và b. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được dãy mới mà số hạng đứng sau chia hết cho số hạng đứng trước.

2. Trong một cuộc họp có $2n$ người $(n \geq 1)$, mỗi người quen không ít hơn n người khác. Chứng minh rằng có thể xếp $2n$ người đó vào một bàn tròn sao cho hai người ngồi kề nhau thì quen nhau.

3. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm $(n \geq 1)$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Tô màu n điểm màu đỏ và n điểm màu xanh. Chứng minh rằng có thể nối các điểm đỏ với các điểm xanh bởi n đoạn thẳng sao cho không có hai đoạn nào giao nhau.

4. Có n học sinh đứng thành một vòng tròn. Giả sử mỗi em có một số kẹo sao cho số kẹo của các em không bằng nhau tất cả. Thực hiện trò chơi sau: Sau mỗi hiệu lệnh của người chỉ huy, mỗi em đều lấy một nửa số kẹo của mình đang có và đưa cho bạn bên cạnh, tính theo chiều kim đồng hồ. Nếu em nào có một số lẻ chiếc kẹo thì được nhận thêm một chiếc trước khi chia. Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện trò chơi thì số kẹo của tất cả các em bằng nhau.

5. Cho bộ 4 số dương (a, b, c, d) không đồng thời bằng nhau. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (x, y, z, t)$ thì thay bằng bộ số
$T(B) = (xy, yz, zt, tx)$. Chứng minh rằng không bao giờ ta gặp lại bộ số (a, b, c, d) đã cho hoặc bất kì một hoán vị nào của bộ số này.

6. Xét bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó n có dạng 2^k với $k \in \mathbb{N}^*$ và $x_i \in \{1; -1\}, \forall i = \overline{1, n}$. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ thì thay bằng bộ số $T(B) = (a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1)$. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được bộ $C = (1, 1, ..., 1)$.

7. Tại mỗi đỉnh của ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ ta một số thực sao cho tổng các số được viết là một số dương. Thực hiện thuật toán sau: Nếu ba số x, y, z ở ba đỉnh liên tiếp mà $y < 0$ thì thay bộ ba (x, y, z) bởi bộ ba $(x + y, -y, y + z)$. Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước.

7.4 Hướng dẫn giải bài tập

1. Gọi S_n là số đoạn thẳng được nối bởi hai điểm khác màu sau bước thứ n. Ta có: $S_{n+1} < S_n, \forall n \geq 1$. Do số giá trị mà S_n có thể nhận được là hữu hạn nên không thể thực hiện thuật toán vô hạn lần. Vậy sau hữu hạn bước ta sẽ phải nhận được trạng thái mà không còn điểm kì dị nào.

2. Trước tiên ta chia quốc hội thành hai viện V_1 và V_2 một cách tùy ý. Ta tìm cách chuyển các nghị sĩ sao cho số đối thủ của các nghị sĩ trong cùng một viện giảm đi.

   Xét nghị sĩ A, nếu A có không quá một đối thủ trong cùng viện của mình thì ta để yên còn nếu A có không ít hơn hai đối thủ trong cùng viện của mình thì ta chuyển A sang viện còn lại. Gọi S_n là số cặp đối thủ trong cùng một viện sau lần chuyển thứ n. Do mỗi nghị sĩ có không quá ba đối thủ nên $S_{n+1} < S_n, \forall n \geq 1$. Do số giá trị mà S_n có thể nhận được là hữu hạn nên quá trình chuyển sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước và ta nhận được trạng thái thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Xét các tổng

   $$S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1,$$

   trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số được viết tại $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sau bước thứ n.

   Ta có:

   $$(a-d)(b-c) < 0 \Leftrightarrow ab + bc + cd < ac + cb + bd.$$

   Suy ra, $S_{n+1} > S_n, \forall n \geq 1$.

   Do số giá trị mà tổng S_n có thể nhận là hữu hạn nên S_n không thể tăng vô hạn lần. Do đó thuật toán phải dừng lại sau hữu hạn bước.

4. Giả sử sau bước thứ n ta nhận được bộ số (a_n, b_n, c_n, d_n). Đặt

   $$S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$

   Ta tìm quan hệ giữa S_{n+1} và S_n. Ta có:

   $$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \\ &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2S_n - 2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n). \end{aligned}$$

Mặt khác, do $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ nên

$$2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n) = -(a_n + c_n)^2 - (b_n + d_n)^2 \le 0.$$

Do đó

$$S_{n+1} \ge 2S_n, \forall n \ge 1.$$

Suy ra

$$S_n \ge 2^{n-1}S_1.$$

Do

$$(|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n|)^2 \ge a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$

nên

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n| \ge 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{S_1}.$$

Với n đủ lớn ta có

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{S_1} \ge 2009.$$

Khi đó

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n| \ge 2009.$$

5. ***Lời giải 1***. Giả sử trái lại, ta luôn nhận được bộ số với các thành phần là số nguyên. Gọi

$$S_n = \max\{|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - d_n|, |d_n - a_n|, |a_n - c_n|, |b_n - d_n|\},$$

trong đó (a_n, b_n, c_n, d_n) là bộ số nhận được sau bước thứ n.

Ta có $S_{n+1} < S_n, \forall n \ge 1$.

Do $S_n \in \mathbb{Z}, \forall n \ge 1$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $S_N = 0$. Khi đó ta có

$$a_N = b_N = c_N = d_N.$$

Đặt $a_N = b_N = c_N = d_N = m$, ta có

$$\frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} = \frac{b_{N-1} + c_{N-1}}{2} = \frac{c_{N-1} + d_{N-1}}{2} = \frac{d_{N-1} + a_{N-1}}{2} = m.$$

Suy ra

$$a_{N-1} = c_{N-1}, b_{N-1} = d_{N-1}.$$

Đặt $a_{N-1} = c_{N-1} = p, b_{N-1} = d_{N-1} = q$, ta có

$$\frac{a_{N-2} + b_{N-2}}{2} = \frac{c_{N-2} + d_{N-2}}{2} = p, \frac{b_{N-2} + c_{N-2}}{2} = \frac{d_{N-2} + a_{N-2}}{2} = q.$$

Suy ra $p = q = \dfrac{a_{N-2} + b_{N-2} + c_{N-2} + d_{N-2}}{2}$. Do đó

$$a_{N-1} = c_{N-1} = b_{N-1} = d_{N-1}.$$

Tiếp tục lập luận như trên ta dẫn tới $a = b = c = d$, vô lí.

Lời giải 2. Giả sử (a_n, b_n, c_n, d_n) là bộ số nhận được sau bước thứ n. Xét tổng

$$S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$

Ta có: $S_{n+1} \leq S_n, \forall n \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_n = b_n = c_n = d_n.$$

Vì S_n không thể giảm mãi nên tồn tại n sao cho $a_n = b_n = c_n = d_n$. Lập luận tương tự như cách giải thứ nhất ta có điều phải Chứng minh.

8.1 Phương pháp truy hồi

Trong nhiều trường hợp, việc đếm trực tiếp các đối tượng là rất khó. Nếu ta thiết lập được mối quan hệ truy hồi giữa số lượng đối tượng cần đếm trong nhóm n đối tượng với số lượng đối tượng cần đếm trong các nhóm ít hơn n đối tượng thì có thể đưa về đếm số đối tượng trong nhóm với số đối tượng nhỏ mà việc đếm trong nhóm đối tượng này không mấy khó khăn.

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ $(n \geq 1)$ đôi một không song song và không có ba đường nào đồng quy. Tìm số miền mà n đường thẳng này định ra trên mặt phẳng.

Lời giải. Gọi $S(n)$ là số miền mà n đường thẳng đã cho định ra trên mặt phẳng. Từ giả thiết ta có Δ_n cắt $n-1$ đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$ tại $n-1$ điểm. Do đó Δ_n bị $n-1$ đường thẳng còn lại chia thành n phần. Mỗi phần trong số đó sinh ra một miền mới. Do đó $S(n) = S(n-1) + n$. Từ đó ta có $S(n) = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 2. (Bài toán chia kẹo Euler). Cho m và n là các số nguyên dương. Xét phương trình nghiệm nguyên $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$. Hỏi phương trình nói trên có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Kí hiệu $S(n,m)$ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho. Phương trình đã cho tương đương với $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = m - x_n$. Do đó

$$S(n,m) = \sum_{x_n=0}^{m} S(n-1, m-x_n) = \sum_{k=0}^{m} S(n-1;k) \qquad (1).$$

Thay m bởi $m-1$ ta có

$$S(n, m-1) = \sum_{k=0}^{m-1} S(n-1;k) \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $S(n;m) = S(n;m-1) + S(n-1;m)$. Từ công thức trên và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$S(n;m) = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

8.2 Phương pháp sử dụng song ánh

Ta biết rằng, nếu có song ánh $f : A \to B$ thì $|A| = |B|$. Do đó, thay vì đếm số phần tử của A ta có thể đưa về đếm số phần tử của B.

Ví dụ 1. (Bài toán chia kẹo Euler). Cho m và n là các số nguyên dương. Xét phương trình nghiệm nguyên

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m.$$

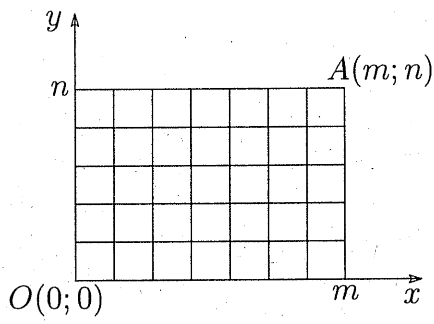
Hỏi phương trình nói trên có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Gọi X là tập các nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho và Y là tập các sâu nhị phân có độ dài $m + n - 1$, trong đó có m kí tự 1 và $n - 1$ kí tự 0. Xét ánh xạ $f : X \to Y$, cho tương ứng mỗi phần tử $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in X$ với phần tử

$$y = \underbrace{11\ldots1}_{x_1}0\underbrace{11\ldots1}_{x_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n}.$$

Dễ thấy f là song ánh. Do đó $|X| = |Y| = C_{m+n-1}^{n-1}$.

Ví dụ 2. Cho m, n là các số nguyên dương. Xét mạng lưới ô vuông kích thước $n \times m$ như hình vẽ



Hỏi số đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ điểm $O(0; 0)$ đến điểm $A(m; n)$ là bao nhiêu?

Lời giải. Mỗi đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ O đến A gồm m bước đi ngang và n bước đi lên. Gọi X là tập các đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ O đến A và Y là tập các bộ số $(a_1; a_2; ..; a_{m+n}) \in \{0; 1\}^{m+n}$, trong có n toạ độ bằng 1. Xét ánh xạ $T : X \to Y$ cho tương ứng mỗi đường đi $x \in X$

với bộ số $(a_1; a_2; ...; a_{m+n})$, trong đó $a_i = 0$ nếu bước thứ i đi ngang và $a_i = 1$ nếu bước thứ i đi lên. Dễ thấy, T là một song ánh. Do đó $|T| = |Y| = C_{m+n}^n$.

Ví dụ trên đây là định lí cơ bản của một phương pháp rất hiệu quả để giải các bài toán tổ hợp, đó là *phương pháp quỹ đạo.*

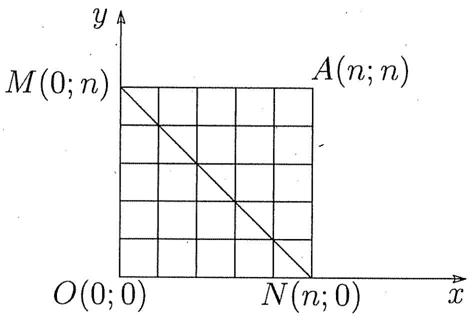
8.3 Phương pháp quỹ đạo

Nội dung của *phương pháp quỹ đạo* là quy bài toán đã cho về việc đếm số đường đi (số quỹ đạo) có một tính chất xác định nào đó.

Ví dụ 1. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2.$$

Lời giải. Xét mạng lưới ô vuông $n \times n$. Khi đó số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(n;n)$ là C_{2n}^n.



Bây giờ ta đếm số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(n;n)$ theo một cách khác. Để đi được từ $O(0;0)$ đến $A(n;n)$ ta cần đi qua điểm $P(k;n-k)$ trên đường chéo MN, trong đó $M(0;n)$ và $N(n;0)$. Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $P(k;n-k)$ là $C_n^{n-k} = C_n^k$. Số đường đi ngắn nhất từ $P(k;n-k)$ đến $A(n;n)$ là C_n^k. Suy ra, số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(n;n)$ và đi qua $P(k;n-k)$ là $(C_n^k)^2$. Do đó, số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(n;n)$ là

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2.$$

Từ đó ta có $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$.

Ví dụ 2. Cho $n \geq m > 0$. Có $m + n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang tiền loại 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé không có tiền. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

Lời giải. Giả sử $m+n$ người mua vé đã được sắp hàng theo một cách nào đó. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu người thứ i có 5000 đồng và $\varepsilon_i = -1$ nếu người thứ i có 10000 đồng. Khi đó, hiệu số giữa số người có tiền 5000 đồng và số người có tiền 10000 đồng khi có k người sắp hàng là $S_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A_k = (k; S_k)$. Xét đường gấp khúc nối $O(0;0)$ với $A_{m+n} = (m+n; n-m)$ và đi qua các điểm $A_k, k = 1, 2, ..., m+n-1$. Mỗi đường gấp khúc như vậy ta gọi là một quỹ đạo. Số các quỹ đạo là C_{m+n}^n. Dễ thấy, quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng mà không ai phải chờ trả tiền thừa là quỹ đạo không cắt đường thẳng $d : y = -1$. Ta đi đếm số quỹ đạo cắt đường thẳng này. Với mỗi quỹ đạo T cắt đường thẳng $d : y = -1$ (bao gồm cả quỹ đạo có điểm chung với $d : y = -1$), ta xây dựng quỹ đạo T' từ quỹ đạo T theo cách sau: đến giao điểm đầu tiên với $d : y = -1$ ta giữ nguyên phần quỹ đạo T. Phần còn lại, ta lấy đối xứng qua đường thẳng $d : y = -1$. Từ đó, ta đưa việc đếm số quỹ đạo T cắt đường thẳng $d : y = -1$ về đếm số đường gấp khúc nối $O(0;0)$ với $A'_{m+n} = (m+n; m-n-2)$. Giả sử ở đường gấp khúc này có x đoạn hướng lên trên và y đoạn hướng xuống dưới. Ta có

$$x + y = m + n, \quad y - x = n + 2 - m$$

hay $x = m-1, y = n+1$. Do đó, số quỹ đạo cắt đường thẳng $d : y = -1$ là C_{m+n}^{n+1}.
Vậy số cách sắp hàng cần tìm là $S = C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1}$.

8.4 Phương pháp sử dụng đa thức và số phức

Ý tưởng của phương pháp này là đưa việc đếm số tập X có tính chất T nào đó về tính tổng S của các hệ số a_k ứng với các luỹ thừa bậc k có cùng tính chất T' nào đó của một đa thức $f(x)$. Sau đó sử dụng số phức để tính S. Xét ví dụ sau:

Ví dụ. Tìm số tập con A của tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2010\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 5.

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^{2010})$. Khai triển đa thức $f(x)$ ta được $f(x) = \sum\limits_{C \subset X} x^{S(C)}$, trong đó $S(C)$ là tổng các phần tử của C.
Do đó, số tập con A của X có tổng các phần tử chia hết cho 5 là tổng các hệ số của các luỹ thừa dạng x^{5k} với $k \in \mathbb{N}$.

Đặt $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ (ε là một căn bậc 5 của đơn vị). Ta có, với mọi k không chia hết cho 5 thì

$$1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^2)^k + (\varepsilon^3)^k + (\varepsilon^4)^k = \frac{1 - (\varepsilon^5)^k}{1 - \varepsilon^k} = 0$$

và nếu k chia hết cho 5 thì

$$1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^2)^k + (\varepsilon^3)^k + (\varepsilon^4)^k = 5.$$

Gọi S là số tập con A cần tìm thì

$$S = \frac{1}{5}\left(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4)\right).$$

Vì đa thức $g(x) = x^5 - 1$ có các nghiệm là 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4 nên

$$g(x) = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4).$$

Suy ra

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5) = -g(-1) = 2.$$

Vậy

$$S = \frac{2^{2010} + 4.2^{402}}{5} = \frac{2^{2010} + 2^{404}}{5}.$$

8.5 Bài tập

8.5.1 Bài tập luyện tập

1. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4?

3. Cho n là một số nguyên dương. Xét bảng ô vuông $n \times n$. Hỏi trong bảng đã cho có bao nhiêu hình vuông?

4. (Baltic 1995) Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 1995\}$. Hỏi có bao nhiêu cách chia tập X thành 3 tập con khác rỗng sao cho trong mỗi tập không có hai phần tử liên tiếp nào?

5. Hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ được chia thành 6 tam giác OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6 và OA_6A_1, trong đó O là tâm của lục giác đã cho. Ta tô màu các miền tam giác đều bởi một trong 3 màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi hình tam giác đều chỉ được tô bởi một màu và hai miền tam giác đều kề nhau thì có màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

6. Cho n là số nguyên dương. Xét bảng $1 \times n$. Điền vào mỗi ô một trong hai số 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1.

7. Cho n là số nguyên dương. Hỏi từ tập hợp $X = \{3, 4, 5, 6\}$ ta có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3.

8. Có n người xếp thành một hàng dọc ($n \geq 1$). Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho trong số đó không có hai người nào đứng liên tiếp trong hàng?

9. Sử dụng phép đếm, hãy chứng minh đẳng thức sau

$$\sum_{k=1}^{n} k.(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}.$$

10. Cho n là số nguyên dương ($n \geq 3$). Kí hiệu

$$\mathbb{Z}_n = \{0; 1; 2; ...; n-1\}.$$

Xét các tập

$$A_n = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_n,\ a < b < c,\ a + b + c \equiv 0 \pmod n\},$$
$$B_n = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_n,\ a \leq b \leq c,\ a + b + c \equiv 0 \pmod n\}.$$

Đặt $a_n = |A_n|$, $b_n = |B_n|$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a_n và b_n.

b) Chứng minh rằng $a_{n+3} = b_n$.

c) Tính a_n.

11. (Balkan 1997) Cho m, n là các số nguyên dương ($m, n > 1$). Xét tập X gồm n phần tử và $A_1, A_2, ..., A_m$ là m tập con của X thoả mãn: với mọi $x, y \in X$ ($x \neq y$), tồn tại tập A_k ($1 \leq k \leq m$) sao cho $x \in A_k, y \notin A_k$ hoặc $x \notin A_k, y \in A_k$. Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

12. (IMO 1989) Cho n là số nguyên dương. Một hoán vị $(x_1; x_2; ...; x_{2n})$ của tập $\{1; 2; ...; 2n\}$ được gọi là có tính chất T nếu tồn tại $i \in \{1; 2; ...; 2n-1\}$ sao cho
$$|x_i - x_{i+1}| = n.$$
Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, số các hoán vị có tính chất T lớn hơn số các hoán vị không có tính chất T.

13. Sử dụng phương pháp quỹ đạo, chứng minh đẳng thức
$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_{m-1}^{m-1}.$$

14. Trong một lần bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu ($a > b$). Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình.

15. (Dựa theo bài thi IMO-95) Cho p là số nguyên tố lẻ và tập $M = \{1, 2, ..., 2p\}$. Với mỗi tập con X của M, kí hiệu $S(X)$ là tổng các phần tử của tập X. Đặt
$$A = \{X \subset M \mid |X| = p\}$$
và
$$A_i = \{X \subset M : \ |X| = p, \ S(X) \equiv i \pmod p\} \ (i = \overline{0, p-1})\}.$$
a) Chứng minh rằng
$$|A_1| = |A_2| = ... = |A_{p-1}| = |A_0| - 2.$$
b) Tìm số tập con C của tập $M = \{1, 2, ..., 2p\}$ sao cho $|C| = p$ và tổng các phần tử của C chia hết cho p.

8.5.2 Bài tập tự giải

1. Xét bộ bài gồm 52 quân. Ta rút ra 13 quân bài từ bộ bài nói trên

   a) Hỏi có bao nhiêu cách?

   b) Hỏi có bao nhiêu cách mà trong 13 quân bài đó có "tứ quý"?

2. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ vua sao cho không có con xe nào nằm trên đường chéo chính (đường chéo nối góc trên bên trái và góc dưới bên phải) và không có con nào ăn con nào?

3. (VMO-1996) Cho n số ($n > 4$) đôi một khác nhau $a_1, a_2, ..., a_n$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị của n số đó sao cho trong mỗi hoán vị không có ba số nào trong 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 nằm ở ba vị trí liên tiếp.

4. Xét lưới ô vuông $n \times n$ ($n \geq 2$). Ta tô màu các nút lưới bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai đỉnh màu đỏ và hai đỉnh màu xanh?

5. Cho m, n là các số nguyên dương. Xét bảng $m \times n$. Điền vào các ô của bảng một trong hai số 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột số số không là một số chẵn. Hỏi có bao nhiêu cách?

6. Cho n đường tròn trên mặt phẳng ($n \geq 1$). Hỏi n đường tròn đó chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?

7. Cho n nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu cách nối $2n$ điểm trên vòng tròn bằng n dây cung không cắt nhau?

8. Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 010, b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa các chuỗi con 0011 và 1100. Chứng minh rằng
$$b_{n+1} = 2a_n.$$

9. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2010\}$. Với mỗi tập con A của X,
$$A = \{a_1; a_2; ...; a_k\},$$
trong đó $a_1 > a_2 > ... > a_k$, ta đặt
$$S(A) = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{k-1}a_k.$$
Tính tổng
$$S = \sum_{A \subset X} S(A).$$

10. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, kí hiệu S_n là số các hoán vị $(a_1; a_2; ...; a_n)$ của bộ $(1; 2; ...; n)$ sao cho
$$1 \leq |a_k - k| \leq 2, \forall k = \overline{1, n}.$$
a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Bằng cách lập song ánh, hãy chứng minh rằng

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} - S_{n-4}, \forall n > 4.$$

c) Chứng minh rằng

$$1,75.S_{n-1} < S_n < 2S_{n-1}, \forall n > 6.$$

11. (VMO-1996) Cho các số nguyên dương k và n với $k \leq n$. Hỏi có bao nhiêu chỉnh hợp $(a_1; a_2; ...; a_k)$ chập k của n số nguyên dương đầu tiên thoả mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

   a) Tồn tại $s, t \in \{1; 2; ..; k\}$ sao cho $s < t$ và $a_s > a_t$.

   b) Tồn tại $s \in \{1; 2; ..; k\}$ sao cho $a_s - s$ không chia hết cho 2?

12. Có bao nhiêu cách lát bảng $3 \times 2n$ bằng các quân đôminô 1×2?

13. Cho n điểm $A_1A_2...A_n$ trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng ($n \geq 2$). Mỗi cặp điểm A_i, A_j được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Tìm n lớn nhất sao cho các điều kiện sau được thoả mãn:

   a) Với mỗi $1 \leq i \leq n$, số đoạn thẳng có một đầu mút là A_i được tô màu xanh không vượt quá 4.

   b) Với mỗi đoạn A_iA_j được tô màu đỏ, tồn tại điểm A_k khác A_i, A_j sao cho các đoạn A_kA_i và A_kA_j đều được tô màu xanh.

14. Xét phương trình nghiệm nguyên dương

$$x_1 + x_2 + ... + x_9 = 2009.$$

   Mỗi nghiệm $x = (x_1; x_2; ...; x_9)$ của phương trình trên gọi là nghiệm lẻ nếu $x_1, x_2, ..., x_9$ là các số lẻ. Hỏi phương trình trên có bao nhiêu nghiệm lẻ?

15. Cho $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu số chia hết cho 5, mỗi số có n chữ số và hai chữ số kề nhau bất kì đều khác nhau?

16. (Rumania -2003). Cho tập $X = \{2; 3; 7; 9\}$ và n là số nguyên dương. Hỏi từ tập X ta có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3?

17. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; n\}$ với $n \geq 4$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X thoả mãn
$$\forall a, b \in A : a - b \notin \{1; 3\}.$$

18. Sử dụng phương pháp quỹ đạo, chứng minh các đẳng thức sau

 a) $C_n^0.C_m^k + C_n^1.C_m^{k-1} + ... + C_n^k.C_m^0 = C_{m+n}^k \ (k \leq m, k \leq n)$.

 b) $C_n^m.C_k^0 + C_{n-1}^{m-1}.C_{k+1}^1 + ... + C_{m-n}^0.C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$.

19. Cho $n \geq m > 0$. Có $m + n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang tiền loại 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé có p đồng tiền 5000 đồng. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m + n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

20. Cho x, y là các số nguyên và $x > 0$. Ta gọi *quỹ đạo* nối điểm $O(0; 0)$ với điểm $M(x; y)$ là đường gấp khúc nối các điểm $O(0; 0), A_1(1; S_1), ..., A_x(x; S_x)$, trong đó
$$S_i - S_{i-1} = \varepsilon_i \in \{1; -1\}, \ S_x = y.$$
Kí hiệu $S(x; y)$ là số quỹ đạo nối điểm $O(0; 0)$ với điểm $M(x; y)$. Chứng minh rằng
$$S(x; y) = \begin{cases} C_x^{\frac{x+y}{2}} & \text{nếu } x, y \text{ cùng tính chẵn lẻ,} \\ 0 & \text{nếu } x, y \text{ khác tính chẵn lẻ.} \end{cases}$$

21. Cho A, B là hai điểm nguyên nằm trong góc phần tư thứ nhất. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua trục hoành. Chứng minh rằng số quỹ đạo từ A đến B có điểm chung với trục hoành bằng số quỹ đạo từ A' đến B.

22. Cho $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng số quỹ đạo từ $O(0; 0)$ đến $M(x; y)$ không có đỉnh trên trục hoành (trừ O) bằng $\dfrac{y}{x}S(x; y)$.

23. Kí hiệu $B_n = \dfrac{1}{n+1}C_{2n}^n$. Chứng minh rằng trong số C_{2n}^n quỹ đạo nối $O(0; 0)$ với $M(2n; 0)$ có

 a) B_{n-1} quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành, trừ các điểm O và M.

 b) B_n quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành.

24. Kí hiệu $B(k,n)$ là số quỹ đạo nối $O(0;0)$ với $M(2n;0)$ có $2k$ cạnh nằm trên trục hoành và $2n-2k$ cạnh còn lại nằm dưới trục hoành. Chứng minh rằng

    a) $B(k,n) = B_n$.

    b) $B(k,n) = B_0.B_{n-1} + B_1.B_{n-2} + ... + B_{n-1}.B_0$.

25. (VMO-2003) Cho các số nguyên dương m, n, p, q với $p < m$, $q < n$. Trên mặt phẳng toạ độ lấy 4 điểm:

$$A(0;0),\ B(p;0),\ C(m;q),\ D(m;n).$$

    Xét các đường đi f ngắn nhất từ A đến D và các đường đi g ngắn nhất từ B đến C. Gọi S là số cặp đường đi $(f;g)$ mà f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = C_{m+n}^{n}.C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q}.C_{m+n-p}^{n}.$$

26. Cho n, m, k là các số nguyên dương và $n > 2k$. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; n\}$. Ta gọi tập con A của X gồm k phần tử là một $k-$tập. Xét tập S mà mỗi phần tử của nó là một $k-$tập của X sao cho mọi $k+1-$ tập của X đều chứa đúng m phần tử thuộc S. Sử dụng phép đếm, hãy

    a) Tính $|S|$ theo m, n, k.

    b) Chứng minh S gồm tất cả các $k-$tập của X.

27. Cho n là số nguyên dương và S là tập các điểm nguyên $(x;y)$ trên mặt phẳng toạ độ sao cho $0 \leq x \leq n$ và $0 \leq y \leq n$. Gọi T là tập các hình vuông có đỉnh thuộc S. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, kí hiệu a_k là số cặp điểm trong S mà là đỉnh của đúng k hình vuông thuộc T. Sử dụng phép đếm, hãy chứng minh rằng

$$a_0 = a_2 + 2a_3.$$

28. Tìm số tập con A của tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2009\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7.

29. Cho p là số nguyên tố và tập $M = \{1, 2, ..., m\}$ $(m > 1)$. Tìm số tập con C của tập sao cho $|C| = p$ và tổng các phần tử của C chia hết cho p.

30. Cho p là số nguyên tố lẻ và n là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p. Hãy tìm số bộ $(a_1; a_2; ...; a_{p-1})$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ là các số tự

nhiên không vượt quá $n-1$, sao cho

$$\sum_{k=1}^{p-1} ka_k \equiv 0 \pmod p.$$

31. Cho hai số nguyên dương m, n sao cho $n+2$ chia hết cho m. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$, trong đó x, y, z không vượt quá n, sao cho tổng $x+y+z$ chia hết cho m.

32. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương lẻ bằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương khác nhau.

33. Cho m, n, p là các số nguyên dương sao cho $n+2$ chia hết cho m và $m > p$. Hãy tính số bộ $(x_1; x_2; ...; x_p)$ gồm p số nguyên dương, mỗi số không vượt quá n và tổng $x_1 + x_2 + ... + x_p$ chia hết cho m.

34. (IMO Shortlist - 2007) Cho n là số nguyên dương. Xét tập $X = \{1; 2; ...; n\}$. Tô mỗi phần tử của X bởi một trong hai màu, trong đó p số được tô màu đỏ và q số được tô màu xanh. Hãy tìm số các bộ $(x; y; z) \in X^3$ sao cho x, y, z được tô cùng một màu và $x+y+z$ chia hết cho n.

35. (Viet nam TST - 2008). Cho tập $M = \{1; 2; 3; ...; 2008\}$. Tô mỗi phần tử của M bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi màu có ít nhất một số được tô. Xét hai tập

$$S_1 = \{(x; y; z) \in M^3\},$$

trong đó $x; y; z$ cùng màu và $x+y+z \equiv 0 \pmod{2008}$,

$$S_2 = \{(x; y; z) \in M^3\},$$

trong đó $x; y; z$ đôi một khác màu và $x+y+z \equiv 0 \pmod{2008}$.

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$.

36. Mỗi đỉnh của một hình cửu giác đều ta tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng

a) Có ít nhất 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu.

b) Trong số 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu, có ít nhất hai tam giác đồng dạng.

8.6 Hướng dẫn giải bài tập

1. (Sử dụng đa thức). Gọi S là số số có 5 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán. Xét đa thức

$$P(x) = (x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^4.$$

Khai triển $P(x)$ ta được $P(x) = \sum_{k=1}^{45} a_k x^k$. Khi đó

$$S = \sum_{k=1}^{22} a_{2k} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) = 45000.$$

2. (Sử dụng đa thức và số phức). Gọi S là số số có 4 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán. Xét đa thức

$$P(x) = (x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^3.$$

Khai triển $P(x)$ ta được

$$P(x) = \sum_{k=1}^{36} a_k x^k.$$

Khi đó

$$S = \sum_{k=1}^{18} a_{4k}$$

Gọi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}$ (căn bậc 4 của đơn vị). Ta có

$$S = \frac{1}{4}(P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) + P(\varepsilon^3)).$$

Để ý rằng $\varepsilon^2 = -1$, ta được

$$S = \frac{9.10^3 - 4}{4} = 2249.$$

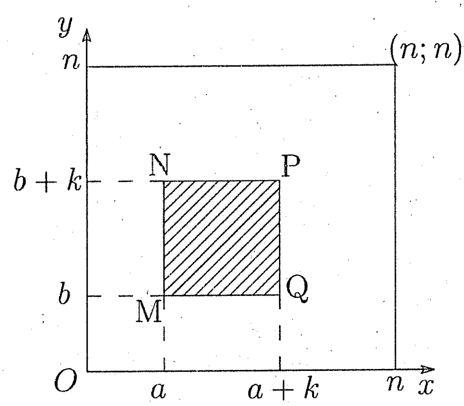
3. (Phương pháp song ánh). Đây là bài toán khá đơn giản nhưng không ít bạn lúng túng. Gọi T là tập các hình vuông trong bảng, T_k là tập các hình vuông cạnh k trong bảng $(1 \le k \le n)$. Ta có: $T_1, T_2, ..., T_n$ đôi một dời nhau và

$$T = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n.$$

Do đó

$$|T| = |T_1| + |T_2| + ... + |T_n|.$$

Gắn vào bảng hệ toạ độ như hình vẽ.



Khi đó, mỗi hình vuông $MNPQ$ cạnh k trong bảng tương ứng với cặp số tự nhiên $(a; b) \in A \times B$, trong đó

$$A = \{0; 1; 2; ...; n-k\}, \quad B = \{0; 1; 2; ...; n-k\}.$$

Số hình vuông cạnh k trong bảng là

$$|T_k| = |A \times B| = |A|.|B| = (n-k+1)^2.$$

Số hình vuông trong bảng đã cho là

$$|T| = \sum_{k=1}^{n} |T_k| = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Gọi $S(n)$ là số cách chia tập $\{1, 2, ..., n\}$ thành 3 tập thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có: $S(n+1) = 2S(n) + 1, \forall n \geq 3$. Từ đó có

$$S(n) = 2^{n-3}S(3) + (1 + 2 + 2^2 + ...2^{n-4}) = 2^{n-2} - 1.$$

Vậy số cách chia cần tìm là $S(1995) = 2^{1993} - 1$.

5. Ta sử dụng phương pháp truy hồi. Gọi $S(n)$ là số cách tô màu thoả mãn yêu cầu bài toán đối với $n-$giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Miền tam giác đều OA_1A_2 có 3 cách tô màu. Với mỗi cách tô màu của miền tam giác OA_1A_2 thì có 2 cách tô màu miền tam giác OA_2A_3. Tương tự, các miền tam giác OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$ cũng có 2 cách tô màu. Trong hai cách tô

màu miền tam giác OA_nA_1 trùng với cách tô màu miền tam giác OA_nA_1 trùng với cách tô màu miền tam giác OA_1A_2 thì số cách tô màu $n$giác là 3.2^{n-1}. Ta đi tính số cách tô màu mà miền tam giác OA_nA_1 cùng màu với miền tam giác OA_1A_2. Dễ thấy, số cách tô màu nói trên là $S(n-1)$. Như vậy ta có

$$S(n) = 3.2^{n-1} - S(n-1).$$

Từ đó ta có

$$S(6) = 66.$$

Bạn đọc hãy nêu và giải bài toán tổng quát với đa giác đều n cạnh và số màu là k.

6. Gọi $S(n)$ là số cách điền số thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta đi thiết lập hệ thức truy hồi. Xét cách điền số như hình vẽ

a_1	a_2					a_{n-1}	a_n

Nếu $a_n = 1$ thì $a_{n-1} = 0$. Số cách điền số như vậy là $S(n-2)$.

Nếu $a_n = 0$ thì số cách điền là $S(n-1)$.

Suy ra

$$S(n) = S(n-1) + S(n-2).$$

Từ đó ta có

$$S(n) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

7. **Cách 1** (Phương pháp truy hồi). Gọi A_n là tập gồm các số có n chữ số và chia hết cho 3, B_n là tập gồm các số có n chữ số và không chia hết cho 3. Đặt $a_n = |A_n|, b_n = |B_n|$. Ta có

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n.$$

Từ đó ta có $a_n = \dfrac{4^n+2}{3}$.

Cách 2 (Phương pháp sử dụng đa thức và số phức). Gọi $S(n)$ là số các số có n chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Xét đa thức
$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n.$$
Khai triển $f(x)$ ta được
$$f(x) = \sum_{k=1}^{6n} a_k x^k.$$
Dễ thấy
$$S(n) = \sum_{k=1}^{2n} a_{3k}.$$
Gọi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ (căn bậc 3 của đơn vị), ta có
$$S(n) = \frac{1}{3}(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2)) = \frac{4^n + 2}{3}.$$

8. Giả sử n người đã cho lần lượt là $A_1, A_2, ..., A_n$ (xếp hàng theo thứ tự đó). Giả sử chọn được k người $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ thoả mãn. Ta có
$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n, \quad i_{s+1} - i_s \ge 2, \forall s = \overline{1, k-1}.$$
Đặt X là tập các bộ $(x_1; x_2; ...; x_k)$ thoả mãn $1 \le x_1 < x_2 < ... < x_k \le n$ và $x_{s+1} - x_s \ge 2, \forall s = \overline{1, k-1}$, ta có số cách chọn k người thoả mãn yêu cầu bài toán là $|A|$.

Xét tập
$$Y = \{(y_1; y_2; ...; y_k) : \ 1 \le y_1 < y_2 < ... < y_k \le n - k + 1\}.$$
Ta thiết lập ánh xạ $T : X \to Y$ như sau:

Với mỗi phần tử $x = (x_1; x_2; ...; x_k) \in X$, cho tương ứng với phần tử $(y_1; y_2; ...; y_k) \in Y$, trong đó
$$y_s = x_s - s + 1.$$
Dễ thấy T là một đơn ánh nên $|X| \le |Y|$.

Bây giờ ta xây dựng ánh xạ $S : Y \to X$:

Với mỗi phần tử $(y_1; y_2; ...; y_k) \in Y$, cho tương ứng với phần tử $x = (x_1; x_2; ...; x_k) \in X$, trong đó
$$x_s = y_s + s - 1.$$

Dễ thấy S là một đơn ánh nên $|X| \geq |Y|$.

Vậy

$$|X| = |Y| = C_{n-k+1}^{k}.$$

9. Để chứng minh đẳng thức bằng phương pháp đếm, ta đếm một đối tượng nào đó bằng hai cách khác nhau, cho hai kết quả bằng nhau ta được đẳng thức cần chứng minh.

   Xét bài toán: Có n bạn nam và n bạn nữ. Cần chọn ra một nhóm n người, trong đó nhóm trưởng là một bạn nam.

   Ta sẽ đếm bằng hai cách khác nhau:

   Cách thứ nhất: Trước tiên ta chọn ra nhóm trưởng: Có n cách. Với mỗi cách chọn nhóm trưởng có C_{2n-1}^{n-1} cách chọn $n-1$ thành viên còn lại. Số cách lập nhóm là nC_{2n-1}^{n-1}.

   Cách thứ hai: Chọn k bạn nam và trong đó chọn ra một nhóm trưởng: Có $k.C_n^k$ cách. Với mỗi cách chọn k bạn nam, có C_n^{n-k} cách chọn $n-k$ bạn nữ. Số cách lập nhóm là

$$\sum_{k=1}^{n} k.C_n^k.C_n^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2.$$

   So sánh hai kết quả trên ta có điều phải chứng minh.

10. a) Đặt

$$\begin{aligned} C_n &= \{(a,b,c): \ a,b,c \in \mathbb{Z}_n, \ a = b \leq c, \ a+b+c \equiv 0 \pmod{n}\}, \\ D_n &= \{(a,b,c): \ a,b,c \in \mathbb{Z}_n, \ a \leq b = c, \ a+b+c \equiv 0 \pmod{n}\}. \end{aligned}$$

   Ta có

$$|B_n| = |A_n| + |C_n \cup D_n|.$$

   Vì $\mathbb{Z}_n$ là hệ thặng dư đầy đủ $\pmod{n}$ nên mỗi số $y \in \mathbb{Z}_n$, tồn tại duy nhất $x \in \mathbb{Z}_n$ sao cho $x + 2y \equiv 0 \pmod{n}$. Do đó

$$|C_n \cup D_n| = n.$$

   Vậy $b_n = a_n + n$.

   b) Ta xây dựng song ánh $h: A_{n+3} \to B_n$ như sau: Xét $(a;b;c) \in A_{n+3}$. Do $a+b+c \equiv 0 \pmod{n+3}$ nên $a+b+c = n+3$ hoặc $a+b+c = 2n+6$.

Nếu $a+b+c=n+3$ và $c \leq n+2$ thì đặt $h((a;b;c))=(a;b-1;c-2)$.

Nếu $a+b+c=n+3$ và $c=n+2$ thì $a=0, b=1$, ta đặt

$h((0;1;n+2))=(0;0;0)$.

Nếu $a+b+c=2n+6$ thì $a \geq 1$, ta đặt $h((a;b;c))=(a-1;b-2;c-3)$.

Dễ dàng kiểm tra ánh xạ h là một song ánh. Do đó, $|A_{n+3}|=|B_n|$ hay $a_{n+3}=b_n$.

c) Từ hai phần trên ta suy ra $a_{n+3}=a_n+n$. Từ đó ta có:

Nếu $n=3k$ $(k \geq 1)$ thì

$$a_n=\frac{n^2-3n+6}{6}.$$

Nếu $n=3k+1$ $(k \geq 0)$ thì

$$a_n=\frac{n^2-3n+2}{6}.$$

Nếu $n=3k+2$ $(k \geq 0)$ thì

$$a_n=\frac{n^2-3n+2}{6}.$$

11. Ta có 2^m là số phần tử của tích Đềcác $Y=\{0;1\}^m$. Thiết lập ánh xạ

$f: X \to Y$ như sau: với mỗi $x \in X$ ta cho tương ứng với

$y=(x_1;x_2;...;x_m)$ sao cho nếu $x \in A_k$ thì $x_k=1$ và $x \notin A_k$ thì $x_k=0$. Dễ thấy f là đơn ánh nên $|X| \leq |Y|$, ta có điều phải chứng minh.

12. Gọi A là tập các hoán vị có tính chất T và B là tập các hoán vị không có tính chất T. Để chứng minh $|A|>|B|$ ta chứng minh tồn tại đơn ánh $f: B \to A$ và f không là toàn ánh.

Xét quy tắc $f: B \to A$ xác định như sau:

Với mỗi phần tử $b=(b_1;b_2;...;b_k;...;b_{2n}) \in B$, $|b_{2n}-b_k|=n$ ta cho tương ứng với phần tử $a=(a_1;a_2;...;a_k;...;a_{2n}) \in A$, trong đó

$$\begin{cases} a_i=b_i, \forall i=1;2;...;k \\ a_i=b_{2n-i+k+1}, \forall i=k+1,...,2n. \end{cases}$$

$$(f : (b_1; b_2; ...; b_k; b_{k+1}; ...; b_{2n}) \mapsto (b_1; b_2; ...; b_k; b_{2n}; ...; b_{k+1}))$$

Dễ thấy f là một đơn ánh. Hơn nữa, phần tử

$$b = (1; n+1; 2; n+2; 3; 4...; n; n+3; n+4; ...; 2n)$$

không có tạo ảnh. Do đó f không là toàn ánh. $\square$

13. Xét các đường gấp khúc ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m; n-m)$. Số đường gấp khúc như vậy là C_n^m.

    Với mỗi $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, có C_{n-k-1}^{m-1} đường cắt đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ tại điểm $P\left(\dfrac{1}{2}; k\right)$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

14. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu phiếu bầu thứ i bầu cho A, $\varepsilon_i = -1$ nếu phiếu bầu thứ i bầu cho B và $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k$. Trên mạng lưới ô vuông, xét quỹ đạo đi qua các điểm

$$O(0;0),\ A_1(1; S_1), ...,\ A_{a+b}(a+b; S_{a+b}).$$

    Mỗi cách bỏ phiếu tương ứng với một quỹ đạo. Mỗi quỹ đạo gồm $a+b$ đoạn thẳng, trong đó có a đoạn hướng lên trên. Tổng số các quỹ đạo là C_{a+b}^a. ứng cử viên A luôn dẫn đầu nếu quỹ đạo tương ứng đi qua $A(1;1)$ và không cắt trục hoành. Số quỹ đạo như vậy là

$$C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a} = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^{a}.$$

15. a) Để chứng minh $|A_1| = |A_2| = ... = |A_{p-1}| = |A_0| - 2$ ta chứng minh hai đa thức sau có cùng tập nghiệm (nghiệm phức):

$$f(x) = (|A_0| - 2) + |A_1|x + ... + |A_{p-1}|x^{p-1} \text{ và}$$
$$g(x) = 1 + x + ... + x^{p-1}.$$

    Dễ thấy, $g(x)$ có $p-1$ nghiệm là ε, ε^2, ..., ε^{p-1}, trong đó $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ (căn bậc p của đơn vị).

    Ta chứng minh $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2) = ... = f(\varepsilon^{p-1}) = 0$. Ta có

$$f(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p-1} |A_i|.\varepsilon^i = 2 \qquad (1).$$

Vì $\varepsilon^p = 1$ nên nếu $X \in A_i$ thì

$$\varepsilon^{S(X)} = \varepsilon^i.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{X \in A} \varepsilon^{S(X)} = 2 \qquad (2).$$

Đẳng thức (2) gợi ý cho ta xét đa thức

$$P(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)...(x-\varepsilon^{2p}).$$

Khai triển $f(x)$, ta được

$$P(x) = \sum_{X \subset M} (-1)^{|X|}.\varepsilon^{S(X)}.x^{2p-|X|}.$$

Hệ số của x^p trong khai triển của $P(x)$ là

$$a_p = (-1)^p \sum_{X \in A} \varepsilon^{S(X)}.$$

Mặt khác

$$P(x) = \prod_{k=1}^{p}(x-\varepsilon^k).\prod_{k=1}^{p}(x-\varepsilon^{p+k}) = (x^p-1)^2.$$

Do đó, hệ số của x^p trong khai triển của $P(x)$ là $a_p = -2$. Suy ra

$$(-1)^p \sum_{X \in A} \varepsilon^{S(X)} = -2.$$

Do p lẻ nên ta có

$$\sum_{X \in A} \varepsilon^{S(X)} = 2 \quad .$$

$\square$

b) Số tập con C cần tìm bằng số phần tử của tập A_0. Ta có

$$|A_0| - 2 = \frac{|A_1| + |A_2| + ... + |A_{p-1}| + |A_0| - 2}{p} = \frac{|A| - 2}{p}.$$

Vậy

$$|A_0| = 2 + \frac{|A| - 2}{p} = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$

Chuyên đề 9

Hàm sinh và tổ hợp

Hàm sinh có những ứng dụng hết sức đặc sắc trong toán học nói chung và trong tổ hợp nói riêng.

9.1 Khái niệm hàm sinh

Cho dãy số thực (a_n). Ta gọi tổng hình thức

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

là một chuỗi lũa thừa.

Chuỗi luỹ thừa $S(x)$ gọi là hội tụ trên tập X nếu với mọi $x \in X$, dãy số $S_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ hội tụ.

Khi chuỗi luỹ thừa $S(x)$ hội tụ, ta được hàm số $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

và ta cũng viết

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Hàm số $f(x)$ nói trên gọi là hàm sinh của dãy (a_n) đã cho.

Ví dụ 1. Xét dãy $a_n = 1, \forall n \geq 0$. Ta có

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Khi $x \in (-1;1)$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Vậy

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Ví dụ 2. Xét dãy $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, ..., a_n = n+1, ...$ Ta có

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... = (1 + x + x^2 + ...)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Về điều kiện để một chuỗi hội tụ, bạn đọc có thể tìm hiểu ở các cuốn sách khác. Trong chuyên đề này chúng ta chỉ đề cập đến một số chuỗi cơ bản mà trong các khoảng $(-\delta;\delta)$ với $\delta > 0$ đủ nhỏ thì các chuỗi này đều hội tụ.

9.2 Khai triển Taylor

Định lí . Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp tại $x = a$. Khi đó ta có khai triển

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

Đặc biệt, khi $a = 0$ ta có

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + ...$$

9.3 Hệ số nhị thức mở rộng

Cho u là một số thực và k là số nguyên không âm. Ta định nghĩa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad k = 0 \\ \dfrac{u(u-1)(u-2)...(u-k)}{k!} & \text{nếu} \quad k > 0. \end{cases}$$

Với công thức hệ số nhị thức mở rộng được định nghĩa như trên ta có khai triển

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k,$$

trong đó u là số thực tuỳ ý và $|x| < 1$.

9.4 Ứng dụng của hàm sinh

Đối với một số loại bài toán đếm, ta quy về xác định công thức tường minh của một dãy số cho bởi công thức truy hồi. Sử dụng hàm sinh của dãy, bằng việc khai triển một hàm số bằng hai cách khác nhau và so sánh hệ số của cùng một luỹ thừa của x, ta có thể dễ dàng xác định được công thức tường minh của dãy đã cho. Đó cũng là ý tưởng cơ bản của phương pháp hàm sinh. Để làm quen với phương pháp này, chúng ta bắt đầu bằng một số ví dụ:

Ví dụ 1. Xét dãy Fibonacci

$$a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Tìm công thức tường minh của số hạng tổng quát x_n?

Lời giải. Xét chuỗi

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_1 + a_2)x^3 + \ldots \\ &= 1 + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) + x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \\ &= 1 + xS(x) + x^2S(x). \end{aligned}$$

Suy ra

$$S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Bây giờ ta đi khai triển hàm số $S(x)$ theo chuỗi luỹ thừa. Để khai triển $S(x)$ theo chuỗi luỹ thừa ta biểu diễn $S(x)$ qua các hàm cơ bản. Ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{(1 - r_1x)(1 - r_2x)} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1}{1 - r_1x} - \frac{r_2}{1 - r_2x}\right), \end{aligned}$$

trong đó

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Do đó

$$S(x) = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1 \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n - r_2 \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n\right)$$
$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) x^n.$$

So sánh hệ số của x^n , ta suy ra

$$a_n = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Ví dụ 2. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n-k}.$$

Lời giải. Xét hàm sinh của dãy S_n:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{n-k}\right)x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n-k}x^n\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n-k}x^{n-k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{r}x^r\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k (1+x)^k$$
$$= \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Áp dụng ví dụ 1, ta có

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Ví dụ 3. Giả sử ta có một số lượng đủ lớn các loại hoa quả gồm táo, mận, lê, đào. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp một giỏ gồm n trái cây thoả mãn các yêu cầu sau đây:

- Số quả táo phải chẵn.
- Số quả mận phải chia hết cho 5.
- Số quả lê không vượt quá 4.
- Số quả đào không nhiều hơn 1.

Lời giải. Gọi a_n, b_n, c_n, d_n tương ứng là số cách chọn n quả: táo, mận, lê, đào thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó số cách chọn n trái cây thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$S_n = \sum_{p+q+r+s=n} a_p b_q c_r d_s.$$

Ta có:

Hàm sinh của dãy (a_n) là

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Hàm sinh của dãy (b_n) là

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots = \frac{1}{1-x^5}.$$

Hàm sinh của dãy (c_n) là

$$C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

Hàm sinh của dãy (d_n) là $D(x) = 1 + x$.

Do $S_n = \sum_{p+q+r+s=n} a_p b_q c_r d_s$ nên hàm sinh của dãy S_n là

$$\begin{aligned} S(x) &= A(x)B(x)C(x)D(x) \\ &= \frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^5}.\frac{1-x^5}{1-x}.(1+x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Khai triển $S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ theo chuỗi luỹ thừa ta có

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Vậy $S_n = n+1$.

Ví dụ 4. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m,$$

trong đó m, n là các số nguyên dương cho trước.

Lời giải. Gọi $a(p,q)$ là số cách chọn $x_p = q$. Khi đó, số nghiệm của phương trình đã cho là

$$S_m = \sum_{q_1+q_2+...+q_n=m} a(1,q_1).a(2;q_2)...a(n;q_n)$$

Vì $a(p;q) = 1, \forall p, q$ nên với mỗi p, hàm sinh của dãy $a(p;q)$ là

$$A_p(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Suy ra, hàm sinh của dãy S_m là

$$S(x) = A_1(x)A_2(x)...A_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Ta có

$$S^{(k)}(x) = \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{(1-x)^{n+k}} = \frac{k!C^k_{n+k-1}}{(1-x)^{n+k}}.$$

Suy ra

$$S^{(k)}(0) = k!C^k_{n+k-1}.$$

Khai triển $S(x)$ theo chuỗi luỹ thừa ta được

$$S(x) = S(0) + \frac{S^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{S^{(2)}(0)}{2!}x^2 + ...$$

Do đó

$$S_m = \frac{S^{(m)}(0)}{m!} = \frac{m!C^m_{n+m-1}}{m!} = C^m_{n+m-1}.$$

9.5 Bài tập

9.5.1 Bài tập luyện tập

1. Cho dãy (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2^n, \forall n \geq 0.$$

   Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy đã cho?

2. Xét dãy (a_n) xác định bởi

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = 1.a_{n-1} + 2.a_{n-2} + ... + (n-1)a_1, \forall n \geq 3.$$

   Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy đã cho?

3. Xét dãy Catalan:

$$a_0 = a_1 = 1, a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + ... + a_{n-1}a_0, \forall n \geq 2.$$

   Hãy tìm công thức tường minh cho a_n?

4. Có bao nhiêu cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và 2 dollars?

5. Cho $n > 1$. Hỏi có bao nhiêu đa thức $P(x)$ có hệ số thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; 3\}$ thoả mãn: $P(2) = n$?

6. Cho n là số nguyên dương. Với mỗi $1 \leq k \leq n+1$, xét phương trình nghiệm nguyên

$$kx + (k+1)y = n + 1 - k.$$

   Gọi s_k là số nghiệm nguyên không âm của phương trình nói trên.

   Chứng minh rằng

$$s_1 + s_2 + ... + s_{n+1} = n + 1.$$

9.5.2 Bài tập tự giải

1. Cho dãy (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy đã cho?

2. Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_0 = 1, a_n = 2a_{n-1} + n.3^n, \forall n \geq 1.$$

3. Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_0 = 2, a_2 = 5, a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2, \forall n \geq 2.$$

4. Tìm dãy (a_n) thoả mãn

$$a_0 = 0, a_1 = 2, a_{n+2} + 4a_{n+1} + 8a_n = 0, \forall n \geq 0.$$

5. Tìm dãy (a_n) thoả mãn

$$a_0 = a_1 = 0, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n, \forall n \geq 0.$$

6. Cho dãy (a_n) thoả mãn

$$a_1 = 1, a_{2n} = a_n, a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Tính a_n?

7. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương lẻ bằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương khác nhau.

8. Cho n là số nguyên dương. Xét bộ số $x = (1; 2; 3; ...; n)$. Hãy tìm số hoán vị không có điểm bất động của bộ số nói trên?

9. Cho n là số nguyên dương và $1 \leq k \leq n$. Xét tập $X = \{1; 2; ...; n\}$. Tìm số tập con A của X gồm k phần tử sao cho trong A không có hai phần tử liên tiếp nào?

10. Cho hữu hạn cấp số cộng sao cho mỗi số tự nhiên khác 0 là một phần tử của đúng một cấp số cộng. Chứng minh rằng có hai cấp số cộng trong số các cấp số cộng nói trên có cùng công sai.

9.6 Hướng dẫn giải bài tập

1. Xét chuỗi
$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$
Ta có
$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + (3a_0 + 2)x + (3a_1 + 2^2)x^2 + \dots \\ &= 3x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (1 + 2x + 2^2x^2 + \dots) \\ &= 3xS(x) + \frac{1}{1-2x}. \end{aligned}$$
Suy ra
$$S(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}.$$
Ta có
$$S(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}.$$
Do đó
$$S(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1} - 2^{n+1})x^n.$$
Vậy $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2. Xét chuỗi
$$S(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$$
Ta có
$$\begin{aligned} S(x)(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) &= a_1x^2 + (1.a_2 + 2a_1)x^3 + \dots \\ &= S(x) - x. \end{aligned}$$
Suy ra $S(x).\dfrac{1}{(1-x)^2} = S(x) - x$ hay $S(x) = x + 1 + \dfrac{3x-1}{x^2-3x+1}$.

Để khai triển $S(x)$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa ta viết $\dfrac{3x-1}{x^2-3x+1}$ dưới dạng
$$\frac{A}{1-r_1x} + \frac{B}{1-r_2x},$$

trong đó $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bằng phương pháp đồng nhất hệ số ta được

$$A = \frac{3-r_1}{r_1-r_2} = \frac{r_2}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{r_2-3}{r_1-r_2} = -\frac{r_1}{\sqrt{5}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S(x) &= x+1+A(1+r_1x+r_1^2x^2+\ldots)+B(1+r_2x+r_2^2x^2+\ldots) \\ &= A+B+1+(Ar_1+Br_2+1)x+(Ar_1^2+Br_2^2)x^2+\ldots \end{aligned}$$

Vậy

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right), \forall n \geq 2.$$

3. Xét chuỗi

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Ta có

$$\begin{aligned} S^(x) &= a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \ldots \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots \\ &= \frac{S(x)-1}{x}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Khai triển cả hai hàm nói trên theo chuỗi luỹ thừa và chú ý rằng trong khai triển của $S(x)$ các hệ số đều dương ta được

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= 1 + \frac{2}{2!}x + \frac{1.3}{3!}2^2x^2 + \frac{1.3.5}{4!}2^3x^3\ldots \end{aligned}$$

Vậy

$$a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(n+1)!}2^n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

4. Gọi a_n là số cách đổi n dollars thành các đồng 1 và b_n là số cách đổi n dollars thành các đồng 2 dollars. Khi đó, số cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và 2 dollars là

$$S_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Hàm sinh của dãy (a_n) là

$$A(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Hàm sinh của dãy (b_n) là

$$B(x) = 1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1-x^2}.$$

Suy ra, hàm sinh của dãy S_n là

$$S(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Bây giờ ta đi khai triển hàm số $S(x)$ thành chuỗi luỹ thừa. Ta có

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right). \\
&= \frac{1}{2}\left((1 + 2x + 3x^2 + ...) + (1 + x^2 + x^4 + ...)\right) \\
&= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + 3x^3 + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right).
\end{aligned}$$

5. Đặt $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_mx^m$, trong đó $c_i \in \{0; 1; 2; 3\}, \forall i = \overline{1; m}$. Ta có

$$P(2) = n \Leftrightarrow c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + ... + 2^mc_m = n.$$

Do đó, số đa thức $P(x)$ thoả mãn yêu cầu bài toán bằng số bộ $(c_0; c_1; ...; c_m) \in \{0; 1; 2; 3\}^{m+1}$ thoả mãn

$$c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + ... + 2^mc_m = n.$$

Do $c_i \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên hàm sinh của số cách chọn $2^i c_i$ là

$$A_i(x) = 1 + x^{2^i} + x^{2.2^i} + x^{3.2^i} = \frac{1 - x^{4.2^i}}{1 - x^{2^i}}.$$

Gọi S_n là số đa thức $P(x)$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có, hàm sinh của dãy (S_n) là

$$S(x) = \prod_{i=1}^{\infty} A_i(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Theo bài trên ta có $S_n = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

6. Xét hàm sinh:

$$\begin{aligned} S_k(x) &= (1 + x^k + x^{2k} + ...)(1 + x^{k+1} + x^{2(k+1)} + ...) \\ &= \frac{1}{1-x^k} \cdot \frac{1}{1-x^{k+1}}. \end{aligned}$$

Ta có, s_k là hệ số của x^{n+1-k} trong khai triển chuỗi luỹ thừa của $S_k(x)$. Suy ra s_k là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa của

$$T_k(x) = x^{k-1} S_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}.$$

Đặt $S_n = s_1 + s_2 + ... + s_{n+1}$ thì S_n là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa của

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x) + ... + T_{n+1}(x)$$

Bằng cách tách

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} = \frac{1}{x(1-x)} \left(\frac{1}{1-x^k} - \frac{1}{1-x^{k+1}} \right)$$

ta tính được

$$T(x) = \frac{1}{x(1-x)} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{n+2}} \right).$$

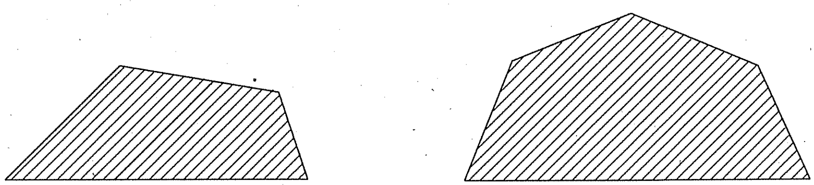
Bây giờ chỉ việc khai triển $T(x)$ theo chuỗi luỹ thừa ta được $S_n = n + 1$.

Chuyên đề 10

Hình lồi và định lí Helly

Trong hình học tổ hợp thì hình lồi là một trong các đối tượng quan trọng, được nhiều người quan tâm, do nó có những tính chất đặc biệt. Liên quan đến hình lồi ta có định lí Helly với những ứng dụng đặc sắc. Trong chuyên đề này chúng ta sẽ nghiên cứu những ứng dụng đặc sắc của định lí này.

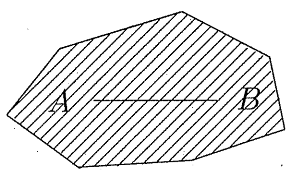
Trong chương trình phổ thông chúng ta đã làm quen với khái niệm tứ giác lồi, ngũ giác lồi....



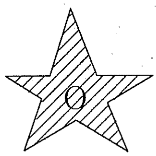
Mở rộng khái niệm đó chúng ta có khái niệm hình lồi.

10.1 Hình lồi

Hình $\mathcal{H}$ gọi là hình lồi nếu với mọi cặp điểm A, B thuộc $\mathcal{H}$ thì đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trong $\mathcal{H}$.

$(\mathcal{H})$: 

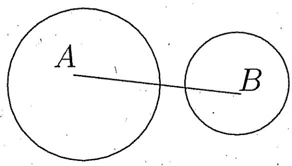
Hình $\mathcal{H}$ gọi là hình sao tại điểm $O \in \mathcal{H}$ nếu với mọi điểm M thuộc $\mathcal{H}$ thì đoạn thẳng OM nằm hoàn toàn trong $\mathcal{H}$. Một hình lồi thì là hình sao nhưng ngược lại không đúng, chẳng hạn hình ngôi sao.



Bao lồi của hình $\mathcal{H}$ là hình lồi nhỏ nhất chứa $\mathcal{H}$ và kí hiệu là $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Chẳng hạn, $\mathcal{B}(M,N) = [MN]$, $\mathcal{B}(M,N,P) = [MNP]$.

Định lí 1. *Giao của một họ hình lồi, khác rỗng là một hình lồi, nhưng hợp của một họ hình lồi chưa chắc đã là một hình lồi.*

Chứng minh. Xét hai hình lồi rời nhau, chẳng hạn hai hình tròn nằm ngoài nhau. Dễ thấy hợp của hai hình tròn này không phải là một hình lồi.



Ta chứng minh giao khác rỗng của họ hình lồi $(\mathcal{H}_i), i \in I$ là một hình lồi. Thật vậy, đặt

$$\mathcal{H} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Xét hai điểm $A, B \in \mathcal{H}$ tuỳ ý. Ta có

$$A, B \in \mathcal{H}_i, \forall i \in I.$$

Do $\mathcal{H}_i$ là hình lồi nên $AB \subset \mathcal{H}_i, \forall i \in I$. Suy ra $AB \subset \mathcal{H}$. Vậy $\mathcal{H}$ là hình lồi.

Định lí 2. *Bao lồi của hình $\mathcal{H}$ là giao của tất cả các hình lồi chứa $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{B}$ là giao của tất cả các hình lồi chứa $\mathcal{H}$. Theo định lí 1 thì $\mathcal{B}$ là một hình lồi. Do $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ là một trong số các hình lồi chứa $\mathcal{H}$ nên $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nhưng do $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ là hình lồi nhỏ nhất chứa $\mathcal{H}$ nên $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. □

Định lí 3. *Hình $\mathcal{H}$ là hình lồi nếu và chỉ nếu $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.*

Chứng minh. Ta luôn có $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nếu $\mathcal{H}$ là hình lồi thì do $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ là hình lồi nhỏ nhất chứa $\mathcal{H}$ nên $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ thì hiển nhiên $\mathcal{H}$ là hình lồi. □

Định lí 4. *Trong mặt phẳng cho họ các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Khi đó, điểm M thuộc bao lồi của họ các điểm nói trên khi và chỉ khi tồn tại các số thực dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ có tổng bằng 1 sao cho*

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1.\overrightarrow{OA_1} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{OA_n}$$

Chứng minh. Đặt $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(A_1, ..., A_n)$ và

$$\mathcal{M} = \left\{ M : \overrightarrow{OM} = \alpha_1.\overrightarrow{OA_1} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{OA_n}, \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + ... + \alpha_n = 1 \right\}.$$

Dễ thấy $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_n$. Để chứng minh $\mathcal{M} = \mathcal{B}_n$ ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{M}$ là hình lồi. Lấy hai điểm $A, B \in \mathcal{M}$ tùy ý, với mọi điểm M thuộc đoạn thẳng AB đều tồn tại hai số thực dương a, b có tổng $a + b = 1$ sao cho

$$\overrightarrow{OM} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{n} (a.a_i + b.b_i)\overrightarrow{OA_i}$$

Vì

$$\sum_{i=1}^{n} (a.a_i + b.b_i) = a.\sum_{i=1}^{n} a_i + b.\sum_{i=1}^{n} b_i = a + b = 1$$

nên $M \in \mathcal{M}$.

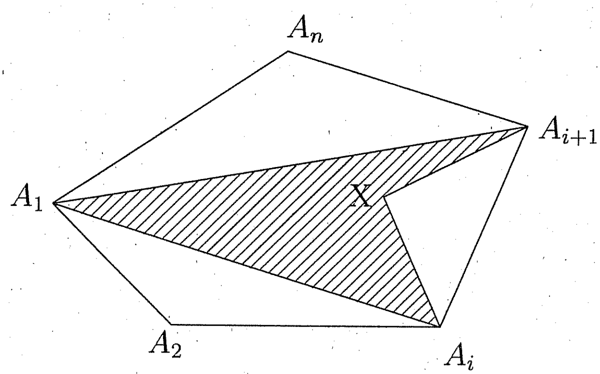
Vậy $\mathcal{M}$ là hình lồi.

Định lí Randong. *Trong $\mathbb{E}^n$ cho tập $A \neq \emptyset$. Khi đó, mọi điểm của bao lồi $\mathcal{B}(A)$ đều là tổ hợp lồi của không quá $n+1$ điểm của A.*

Tức là, $M \in \mathcal{B}(A) \Leftrightarrow \exists \{A_1, ..., A_{n+1}\} \subset A : \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{OA_i}$, trong đó $\alpha_i \geq 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

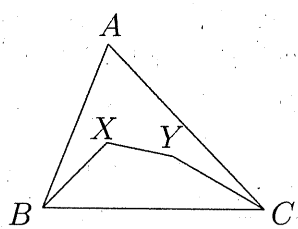
Ví dụ 1. (Đề thi vô địch Ba Lan - 1968). Trên mặt phẳng cho n điểm, biết rằng 4 điểm bất kì trong đó là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng, n điểm đã cho là đỉnh của một n giác lồi.

Lời giải. Xét bao lồi của n điểm đã cho $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(A_1, A_2, ..., A_n)$. Nếu $\mathcal{B}_n$ không là một n giác thì tồn tại một điểm X trong n điểm đã cho nằm bên trong $\mathcal{B}_n$. Chia đa giác $\mathcal{B}_n$ thành các tam giác không có phần trong chung bởi các đường chéo. Giả sử điểm X nằm bên trong tam giác $A_1A_iA_{i+1}$. Khi đó, bốn điểm A_1, A_i, A_{i+1} và X không phải là bốn đỉnh của một tứ giác lồi, trái với giả thiết.



Ví dụ 2. Trên mặt phẳng cho năm điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng, trong số đó có bốn điểm là bốn đỉnh của một tứ giác lồi.

Lời giải. Xét bao lồi $\mathcal{B}$ của các điểm đã cho. Nếu $\mathcal{B}$ là tứ giác hay ngũ giác thì ta có điều phải chứng minh. Nếu $\mathcal{B}$ là một tam giác, giả sử là ABC thì hai điểm còn lại X, Y phải nằm trong tam giác ABC.



Giả sử đường thẳng XY cắt hai cạnh AB, AC. Khi đó $BXYC$ là một tứ giác lồi.

10.2 Định lí Helly

Năm 1921, Helly đã chứng minh một kết quả rất nổi tiếng và có nhiều ứng dụng về sau này trong toán học. Đó là định lí mang tên ông.

Định lí 1. *Trên một đường thẳng cho n đoạn thẳng sao cho hai đoạn bất kì đều có ít nhất một điểm chung. Khi đó, cả n đoạn thẳng đã cho có ít nhất một điểm chung.*

Chứng minh. Coi đường thẳng đã cho là một trục tọa độ và mỗi điểm X có tọa độ tương ứng là x. Giả sử các đoạn thẳng đã cho là A_iB_i với $a_i < b_i$.

Gọi $m = \max(a_i)$ và $k = \min(b_i)$ đoạn thẳng A_mB_k chứa trong tất cả các đoạn đã cho.

Hệ quả. *Nếu trên một đường thẳng có n đoạn thẳng sao cho hai đoạn bất kì đều có ít nhất một điểm trong chung thì có thể vẽ được một đoạn thẳng nằm trong tất cả các đoạn đã cho.*

Định lí 2. *Trong mặt phẳng cho n hình lồi, trong đó 3 hình bất kì đều có điểm chung. Khi đó, n hình lồi đã cho có ít nhất một điểm chung.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 4$, kí hiệu các hình lồi đã cho là $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ và A_i là điểm chung của các hình trừ hình $\mathcal{M}_i$. Xét $\mathcal{M} = \mathcal{B}(A_1, A_2, A_3, A_4)$. Nếu $\mathcal{M}$ là một đoạn thẳng, chẳng hạn đoạn A_1A_4 thì A_3 thuộc A_1A_4 và như vậy A_3 thuộc cả bốn hình đã cho. Nếu $\mathcal{M}$ là một tam giác, chẳng hạn tam giác $A_1A_2A_3$ thì A_4 nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$ và như vậy A_4 thuộc cả bốn hình đã cho. Nếu $\mathcal{M}$ là một tứ giác thì giao hai đường chéo của tứ giác này thuộc bốn hình đã cho. Vậy bốn hình đã cho có ít nhất một điểm chung.

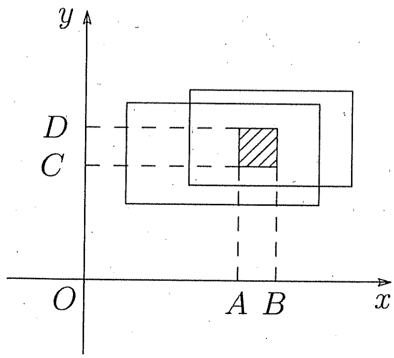
Giả sử mệnh đền đúng đến n. Xét $n+1$ hình lồi $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, ..., \mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{n+1}$. Gọi $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}_{n+1}$. Sử dụng trường hợp $n = 4$ ta suy ra ba hình $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j, \mathcal{M}$ có điểm chung. Sử dụng giả thiết quy nạp cho n hình $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, ..., \mathcal{M}_{n-1}, \mathcal{M}$ ta có điều phải chứng minh.

Định lí 3. *Nếu trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ cho trước một số hữu hạn các hình lồi mà trong đó mỗi bộ $n+1$ hình đều có giao khác rỗng thì thì tất cả các hình đã cho có giao khác rỗng.*

Ví dụ 1. (Đề thi vô địch Ba Lan - 1970). Trong mặt phẳng cho n hình chữ nhật có cạnh tương ứng song song và hai hình bất kì đều có điểm trong chung. Chứng minh rằng, có thể vẽ được một hình chữ nhật nằm trong tất cả các hình chữ nhật đã cho.

Lời giải. Xét hệ trục tọa độ Oxy có các trục song song với các cạnh của các hình chữ nhật.

Chiếu các hình chữ nhật lên trục Ox theo phương Oy, ta được n đoạn thẳng mà hai đoạn bất kì đều có điểm chung. Theo **định lí 1** thì n đoạn thẳng này cùng chứa một đoạn thẳng AB. Tương tự, chiếu các hình chữ nhật lên trục Oy theo phương Ox, ta được n đoạn thẳng cùng chứa đoạn thẳng CD.



Giả sử $A(a;0), B(b;0), C(0;c), D(0,d)$, trong đó $a < b, c < d$. Khi đó hình chữ nhật có các đỉnh $M(a;c), N(a;d), P(b;d), Q(b;c)$ nằm hoàn toàn trong các hình chữ nhật đã cho.

Ví dụ 2. (Đề thi vô địch Hungari - 1951). Mặt phẳng bị phủ hoàn toàn bởi n nửa mặt phẳng (không kể biên). Chứng minh rằng, có thể chọn ra trong số đó 3 nửa mặt phẳng mà vẫn phủ kín mặt phẳng đã cho.

Lời giải. Gọi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$ là các nửa mặt phẳng đã cho (không kể biên) và $\mathcal{B}_i = \mathbb{E}^2 \setminus \mathcal{A}_i$. Giả sử không có ba tập nào trong số $\mathcal{A}_i, i = 1, 2, ..., n$ phủ kín $\mathbb{E}^2$. Khi đó, ba tập bất kì trong số $\mathcal{B}_i$ đều có giao khác rỗng. Theo định lí Helly thì n tập $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_n$ có giao khác rỗng và như vậy n tập $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ không phủ kín $\mathbb{E}^2$, trái với giả thiết.

Ví dụ 3. Trên đường tròn có một số cung có số đo nhỏ hơn 180^0 và ba cung bất kì trong chúng đều có ít nhất một điểm chung. Chứng minh rằng, tất cả các cung đã cho có ít nhất một điểm chung.

Lời giải. Gọi $\mathcal{V}_i$ là hình viên phân ứng với cung thứ i. Do các cung có số đo nhỏ hơn 180^0 nên các hình viên phân $\mathcal{V}_i$ là các hình lồi và không chứa O. Vì ba cung bất kì đều có điểm chung nên ba hình viên phân bất kì cũng có ít nhất một điểm chung. Theo định lí Helly thì tất cả các hình viên phân có ít nhất một điểm chung. Giả sử điểm chung đó là M thì giao điểm N của OM với đường tròn sẽ thuộc tất cả các cung tròn đã cho.

Ví dụ 4. Trên mặt phẳng cho n điểm. Biết rằng ba điểm bất kì trong chúng đều nằm trong một hình tròn bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng, n điểm đã cho đều nằm trong một hình tròn bán kính $R = 1$.

Lời giải. Xét tất cả các đường tròn bán kính $R = 1$ và có tâm là các điểm đã cho. Dễ thấy ba đường tròn bất kì trong số đó đều có ít nhất một điểm chung (chẳng hạn là tâm của đường tròn chứa ba điểm là tâm của ba đường tròn đang xét). Theo định lí Helly thì các đường tròn này có ít nhất một điểm chung O. Đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ chứa toàn bộ n điểm đã cho.

10.3 Bài tập

10.3.1 Bài tập luyện tập

1. Chứng minh rằng với mọi đa giác lồi không phải là hình bình hành, ta luôn có thể chọn ra ba cạnh mà các đường thẳng chứa chúng cắt nhau tạo thành một tam giác bao đa giác đã cho.

2. Trong một hình $n-$giác lồi ($n \geq 3$), người ta vẽ các đường chéo không cắt nhau ở trong $n-$giác sao cho các đường chéo này chia $n-$giác thành các hình tam giác. Chứng minh rằng

   a) Số hình tam giác không phụ thuộc vào cách chia.

   b) Số đường chéo phải dùng cũng không phụ thuộc vào cách chia.

3. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 4$. Chứng minh rằng ta có thể ghép n tam giác bằng nhau thành một hình lục giác lồi.

4. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_7$. Người ta kẻ tất cả các đường chéo của đa giác này, các đường chéo chia đa giác đã cho thành các đa giác lồi nhỏ hơn. Hỏi số cạnh nhiều nhất của một đa giác nhỏ là bao nhiêu?

5. Trên mặt phẳng cho n đoạn thẳng song song sao cho hai đoạn bất kì có một đường thẳng cắt và vuông góc với cả hai đoạn thẳng đó ($n \geq 3$). Chứng minh rằng có một đường thẳng cắt và vuông góc với cả n đoạn thẳng đã cho.

6. Trên mặt phẳng cho n hình bình hành có các cạnh song song với hai đường thẳng cắt nhau cho trước ($n \geq 3$). Biết rằng, hai hình bình hành bất kì trong số n hình bình hành đã cho đều có điểm chung. Chứng minh rằng cả n hình bình hành đã cho có điểm chung.

7. Chứng minh rằng, mọi đa giác lồi diện tích bằng 1 luôn có thể đặt trong một hình bình hành có diện tích bằng 2.

8. Trong hình vuông cạnh 1 vẽ một lục giác đều có diện tích S. Tìm giá trị lớn nhất của S.

9. (Đề thi vô địch Hunggari - 1962). Chứng minh rằng, không thể chọn quá n đường chéo trong một n giác lồi sao cho hai đoạn bất kì trong chúng đều có điểm chung.

10. (Định lí Mincôpxki). Trong mặt phẳng tọa độ cho hình lồi $\mathcal{H}$ có diện tích $S > 4$ và nhận $O(0,0)$ làm tâm đối xứng. Chứng minh rằng, ngoài điểm O, hình $\mathcal{H}$ còn chứa ít nhất một điểm nguyên khác.

11. Trên mặt phẳng cho đa giác lồi $\mathcal{H}$. Bên trong $\mathcal{H}$ ta vẽ n hình tròn đôi một không cắt nhau. Chứng minh rằng, có thể chia đa giác đã cho thành các đa giác lồi nhỏ hơn sao cho trong mỗi đã giác đó chứa đúng một hình tròn trong số n hình tròn đã vẽ.

12. Trên mặt phẳng cho n hình tròn ($n \geq 3$). Biết rằng với ba hình tròn bất kì trong số n hình tròn đã cho đều tồn tại một hình tròn bán kính r cho trước cắt cả ba hình tròn đó. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn (C) bán kính r cắt tất cả n hình tròn đã cho.

13. Trong mặt phẳng cho n điểm $A_1A_2...A_n$ trong đó khoảng cách giữa hai điểm bất kì đều nhỏ hơn hoặc bằng 2. Chứng minh rằng các điểm đã cho nằm trong một đường tròn bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

10.3.2 Bài tập tự giải

1. Cho hai hình lồi $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ có tâm đối xứng. Chứng minh rằng, nếu có thể dùng $\mathcal{H}_1$ để phủ $\mathcal{H}_2$ thì có thể dùng $\mathcal{H}_1$ để phủ $\mathcal{H}_2$ sao cho tâm đối xứng của chúng trùng nhau.

2. Chứng minh rằng từ 9 điểm đã cho trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta luôn chọn được 5 điểm là đỉnh của một ngũ giác lồi.

3. (Đề thi vô địch Hungari - 1967). Một đa giác lồi được chia thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau. Mỗi đỉnh của đa giác là đỉnh của một số lẻ các tam giác đã dựng. Chứng minh rằng, số cạnh của đa giác chia hết cho 3.

4. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng ($n > 3$), trong số đó không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. Chứng minh rằng, trong số các phần của mặt phẳng chia ra bởi các đường thẳng nói trên có không ít hơn $\frac{2}{3}(n-1)$ tam giác.

5. (Đề thi vô địch Ba Lan - 1967). Chứng minh rằng, nếu một đa giác có số lẻ cạnh, nội tiếp trong một đường tròn và tất cả các góc bằng nhau thì nó là một đa giác đều.

6. Chứng minh rằng, mọi n giác lồi ($n \geq 6$) đều có thể cắt ra thành các ngũ giác lồi.

7. Chứng minh rằng không thể ghép các hình tam giác đều đôi một khác nhau lại để được một hình đa giác lồi.

8. (Đề thi vô địch toàn liên bang Xô Viết - 1975). Trên mặt phẳng cho n đa giác (không nhất thiết phải lồi) sao cho hai đa giác bất kì đều có điểm chung. Chứng minh rằng, có một đường thẳng cắt tất cả các đa giác ấy.

9. Cho một số hữu hạn các đoạn thẳng song song sao cho ba đoạn bất kì đều có một đường thẳng cắt chúng. Chứng minh rằng, có một đường thẳng cắt tất cả các đoạn thẳng này.

10. Trên mặt phẳng cho n đoạn thẳng và một điểm O không thuộc chúng. Biết rằng, với hai đoạn bất kì ta luôn kẻ được một đường thẳng qua O và cắt chúng. Chứng minh rằng, ta luôn kẻ được một đường thẳng qua O và cắt tất cả các đoạn thẳng đã cho.

11. Trong một buổi sáng hai người bất kì đến thư viện đều gặp mặt nhau. Chứng minh rằng, tồn tại một thời điểm mà trong thư viện có mặt tất cả những người đến thư viện vào sáng hôm đó.

12. Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm. Chứng minh rằng, trong số đó luôn chọn được một điểm sao cho gần với nó nhất có không quá 3 điểm trong số đã cho.

13. Chứng minh rằng, mọi đa giác lồi diện tích bằng 1 luôn có thể đặt trong một hình chữ nhật có diện tích bằng 2.

14. Chứng minh rằng, mọi đa giác lồi diện tích bằng 1 luôn có thể đặt trong một tam giác có diện tích bằng 2.

15. Cho đa giác lồi $\mathcal{H}$ có diện tích S và chu vi P. Chứng minh rằng ta có thể vẽ được một đường tròn bán kính $R = \dfrac{S}{P}$ nằm hoàn toàn trong $\mathcal{H}$.

16. Bên trong $2n$ giác lồi lấy một điểm P. Qua mỗi đỉnh của đa giác và điểm P ta kẻ một đường thẳng. Chứng minh rằng, luôn tìm được một cạnh của đa giác không có điểm trong chung với các đường thẳng vừa kẻ.

17. Trên mặt phẳng cho $n \geq 4$ điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng, nếu mỗi bộ ba điểm trong số đó luôn tìm được điểm thứ tư trong số đã cho cùng với ba điểm đó tạo thành một hình bình hành thì $n = 4$.

18. Trên mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm, đồng thời không phải tất cả đều nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng, tồn tại một đường tròn đi qua 3 trong số các điểm đã cho vào không chứa điểm nào trong số còn lại.

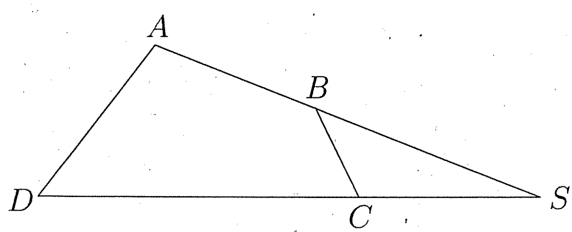
19. Trên mặt phẳng cho $2n+3$ điểm, trong số đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng, từ các điểm đó có thể chọn ra 3 điểm sao cho có đúng n điểm trong số còn lại nằm trong đường tròn đi qua 3 điểm đã chọn còn n điểm kia thì nằm ngoài.

20. (**Định lí Young.**) Cho X là hình lồi trong không gian và có đường kính không vượt quá 2. Chứng minh rằng, X nằm trọn trong một hình cầu bán kính $R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

10.4 Hướng dẫn giải bài tập

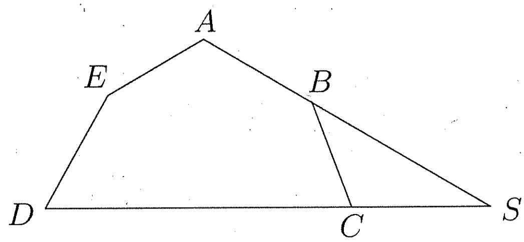
1. Trước tiên ta xét một số trường hợp đặc biệt:

Trường hợp 1. Đa giác đã cho là tứ giác lồi $ABCD$.

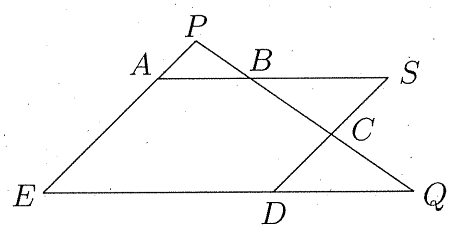


Do $ABCD$ không là hình bình hành nên có hai cạnh đối không song song, giả sử là AB và CD. Gọi S là giao điểm của AB và CD. Giả sử được B nằm giữa S và A. Khi đó tam giác SAD chứa toàn bộ tứ giác $ABCD$.

Trường hợp 2. Đa giác đã cho là ngũ giác $ABCDE$.

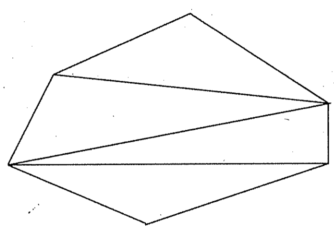


Xét cạnh CD. Một trong hai cạnh đường thẳng chứa hai cạnh AB, AE phải cắt đường thẳng CD. Giả sử AB cắt CD tại S. Khi đó, tứ giác $SAED$ chứa ngũ giác đã cho. Nếu tứ giác $SAED$ không là hình bình hành thì ta đưa về trường hợp 1. Nếu tứ giác $SAED$ là hình bình hành thì đường thẳng chứa cạnh BC cắt các đường thẳng chứa các cạnh EA, ED tạo thành tam giác EPQ chứa ngũ giác đã cho:



Bây giờ xét đa giác $A_1A_2...A_n$ với $n \geq 6$. Xét cạnh A_1A_n. Khi đó, một trong các đường thẳng chứa các cạnh còn lại phải cắt A_1A_n và ta đưa bài toán về trường hợp số cạnh nhỏ hơn n. Cứ tiếp tục làm như vậy ta đưa về hai trường hợp đặc biệt đã xét ở trên.

2. a) Giả sử số hình tam giác là s. Vì không có hai đường chéo nào cắt nhau ở trong $n-$giác nên tổng các góc của các tam giác bằng tổng các góc của $n-$giác.



Do đó ta có

$$k.180^0 = (n-2)180^0$$

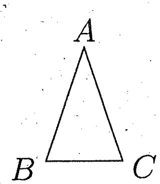
hay $k = n - 2$.

b) Giả sử ta phải dùng p đường chéo. Ta đi đếm số cạnh của các tam giác bằng hai cách khác nhau: Do có $n-2$ tam giác nên có $3(n-2)$ cạnh (kể cả lặp). Mỗi cạnh của tam giác là đường chéo của $n-$giác được tính hai lần, mỗi cạnh của tam giác là cạnh của $n-$giác được tính một lần. Do đó ta có

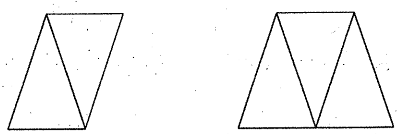
$$3(n-2) = 2p + n$$

hay $p = n - 3$.

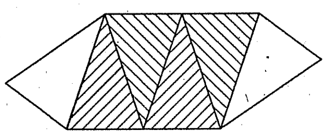
3. Xét tam giác cân T với góc ở đỉnh A đủ nhỏ:



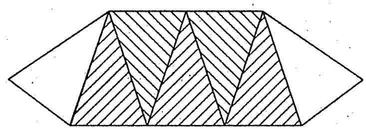
Ta thấy, cứ hai tam giác T ta có thể ghép thành một hình bình hành và ba tam giác T thì có thể ghép được thành một hình thang:



Do đó, nếu n chẵn thì có thể ghép $n-2$ tam giác thành một hình bình hành và ghép thêm hai tam giác nữa như hình vẽ dưới đây để được một lục giác lồi:

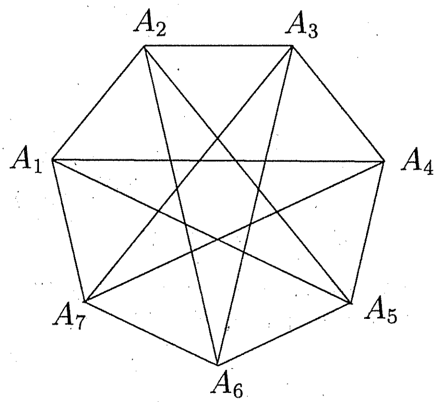


Nếu n lẻ thì có thể ghép $n-2$ tam giác thành một hình thang và ghép thêm hai tam giác nữa như hình vẽ dưới đây để được một lục giác lồi:

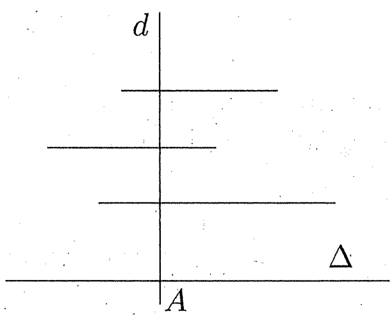


4. Xét đa giác nhỏ T. Vì T là đa giác lồi nên có không quá hai cạnh của T nằm trên các đường chéo cùng xuất phát từ một đỉnh của đa giác đã cho. Như vậy, qua mỗi đỉnh của đa giác đã cho có không quá hai cạnh của T. Qua 7 đỉnh của đa giác đã cho có không quá $7.2 = 14$ cạnh của T. Trong số 14 cạnh này, mỗi cạnh được tính hai lần nên số cạnh của T không quá 7.

   Bây giờ ta chỉ ra một đa giác lồi $A_1A_2...A_7$ mà đa giác đa giác nhỏ nhận được có 7 cạnh, chẳng hạn đa giác đều như hình vẽ dưới đây:

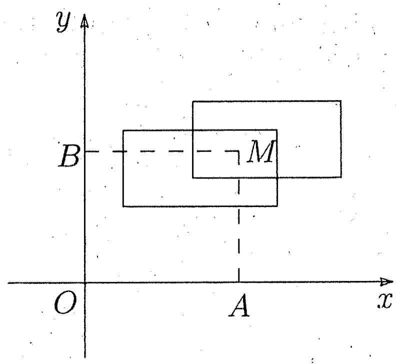


5. Xét đường thẳng Δ song song với n đoạn thẳng đã cho.

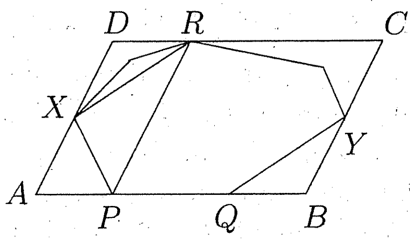


   Chiếu theo phương vuông góc với Δ lên Δ ta được n đoạn thẳng trên Δ mà hai đoạn bất kì đều có điểm chung. Theo **định lí 1** thì n đoạn thẳng này có điểm chung A. Đường thẳng d vuông góc với Δ tại A cắt tất cả n đoạn thẳng đã cho.

6. Chọn hệ toạ độ Afin Oxy có các trục song song với hai đường thẳng đã cho. Chiếu theo phương Oy lên trục Ox, mỗi hình bình hành biến thành một đoạn thẳng. Ta có n đoạn thẳng, hai đoạn bất kì có điểm chung nên n đoạn thẳng nói trên có điểm chung $A(a;0)$. Tương tự, chiếu theo phương Ox lên Oy, ta nhận được n đoạn thẳng có điểm chung $B(0;b)$. Dễ thấy điểm $M(a;b)$ thuộc tất cả n hình bình hành đã cho.



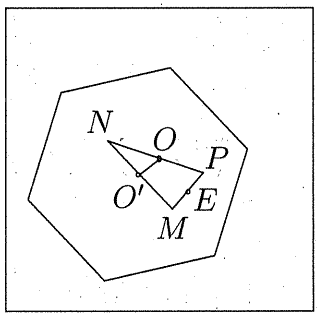
7. Xét đa giác lồi $\mathcal{M}$ có diện tích bằng 1. Ta vẽ hình bình hành $ABCD$ chứa $\mathcal{M}$ sao cho mỗi cạnh của hình bình hành $ABCD$ đi qua ít nhất một đỉnh của $\mathcal{M}$ như sau:



Đầu tiên, chọn lấy một cạnh PQ của $\mathcal{M}$ (tuỳ ý) và vẽ đường thẳng d_1 đi qua P, Q. Tiếp theo, chọn đỉnh R nằm cách xa d_1 nhất, vẽ đường thẳng d_2 qua R và song song với d_1. Nối P với R. Về hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng PR, chọn hai đỉnh X và Y (nếu có) cách xa PR nhất. Qua X, Y vẽ các đường thẳng d_3, d_4 song song với PR. Bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 cắt nhau tạo thành hình bình hành $ABCD$. Ta có:

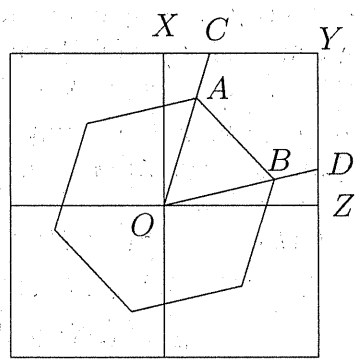
$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(APRD) + S(PRCB) \\ &= 2S(XPR) + 2S(YPR) \\ &\leq 2S(\mathcal{M}) \leq 2. \end{aligned}$$

8. Trước tiên ta chứng minh rằng, nhờ phép tịnh tiến ta có thể đưa lục giác đã cho về một lục giác mới có tâm trùng với tâm của hình vuông và vẫn nằm trong hình vuông đã cho. Thật vậy, gọi O và O' tương ứng là tâm của hình vuông và của lục giác. Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O'O}$. Lấy điểm M tùy ý nằm bên trong lục giác (kể cả biên). Do tính chất đối xứng ta suy ra điểm N đối xứng với M qua O' cũng thuộc lục giác và do đó thuộc hình vuông. Gọi P là điểm đối xứng của N qua O thì P thuộc hình vuông. Qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{O'O}}$ điểm M biến thành trung điểm E của MP thuộc hình vuông.



Vậy phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{O'O}}$ biến lục giác đã cho thành một lục giác có tâm O và nằm trong hình vuông đã cho.

Trở lại bài toán, ta chỉ cần xét lục giác đều có tâm trùng với tâm O của hình vuông. Chia hình vuông thành bốn phần bằng nhau bởi các đường thẳng qua tâm và song song với các cạnh. Khi đó, tồn tại một phần chứa hai đỉnh của lục giác. Giả sử hai đỉnh A, B của lục giác rơi vào hình vuông nhỏ $OXYZ$. Giả sử OA cắt XY tại C và OB cắt YZ tại D.



Đặt $\widehat{XOA} = \alpha$ ta có

$$\begin{aligned} S(OAB) &= \frac{1}{4}OA^2 \leq \frac{1}{4}.\min(OC^2, OD^2) \\ &= \frac{1}{16}.\min\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}, \frac{1}{\cos^2(30-\alpha)}\right). \end{aligned}$$

Vì một trong hai góc α và $30^0 - \alpha$ không vượt quá 15^0 nên $S(OAB)$ max khi $\alpha = 15^0$.

9. Giả sử chọn được m đường chéo thỏa mãn. Ta quy ước đỉnh X của n giác đã cho gọi là có bậc k nếu qua X có k đường chéo trong số m đường trên. Gọi a_i là số đỉnh bậc i ta có

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = n$$

Suy ra, $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n$.

Xét một đỉnh A bậc k $(k > 2)$ tùy ý. Giả sử các đường chéo được nối với A là $AA_1, AA_2, ..., AA_k$ và AA_1, AA_k là hai đường chéo ngoài cùng. Khi đó, mỗi đường chéo đi qua A_i với $1 < i < k$ hoặc không cắt AA_1 hoặc không cắt AA_k nên A_i có bậc 1 với mọi $1 < i < k$. Như vậy, mỗi đỉnh bậc k với $k > 2$ được nối với ít nhất $k - 2$ đỉnh bậc 1. Suy ra,

$$a_1 \geq a_3 + 2a_4 + 3a_5 + ... + (n-2)a_n$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} 2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + na_n \\ &= a_1 + 2(a_2 + a_3 + ... + a_n) + (a_3 + 2a_4 + ... + (n-2)a_n) \\ &\leq 2(a_1 + a_2 + ... + a_n) \leq 2n \end{aligned}$$

Suy ra $m \leq n$.

10. Xét tất cả các ảnh $\mathcal{H}_i, i \in I$ của $\mathcal{H}$ qua các phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến có các tọa độ chẵn. Ta chứng minh trong số đó có hai hình giao nhau khác rỗng. Thật vậy, giả sử các $\mathcal{H}_i$ đôi một giao nhau bằng rỗng. Bao $\mathcal{H}$ bởi hình tròn bán kính R (R nguyên). Với mỗi n, trong hình vuông tâm O cạnh $a = 2(n + R)$ có ít nhất $(n+1)^2$ hình $\mathcal{H}_i$. Suy ra

$$(n+1)^2 S \leq 4(n+R)^2$$

Vì $S > 4$ nên bất đẳng thức trên không thể đúng với mọi n. Vậy phải có hai hình $\mathcal{H}_i$ nào đó có giao khác rỗng. Giả sử $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ có chung điểm A. Gọi O_1, O_2 là tâm đối xứng của $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ và M là trung điểm của O_1O_2. Gọi B là điểm đối xứng của A qua M. Ta có $B = S_M(A)$ và $S_M(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$ nên $B \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Suy ra, $M \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Vì M có tọa độ nguyên nên ảnh ngược của điểm M trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO_1}$ là điểm N có tọa độ nguyên và thuộc $\mathcal{H}$.

Nhận xét: từ chứng minh trên ta còn có điểm N' là ảnh ngược của điểm M trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO_2}$ cũng thuộc $\mathcal{H}$ và có tọa độ nguyên.

11. Giả sử $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$ là n hình tròn đã vẽ. Ta biết rằng tập hợp

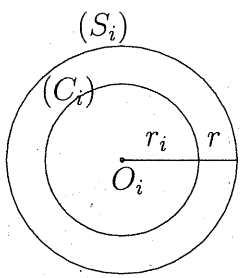
$$\mathcal{X} = \{X : X/(\mathcal{C}_j) \geq X/(\mathcal{C}_i)\}$$

là một nửa mặt phẳng chứa S_i, bờ là trục đẳng phương của (C_i) và (C_j). Suy ra các đa giác $\mathcal{D}_i$ xác định bởi

$$\mathcal{D}_i = \{X \in \mathcal{H} : X/(\mathcal{C}_j) \geq X/(\mathcal{C}_i), \forall j \neq i\}$$

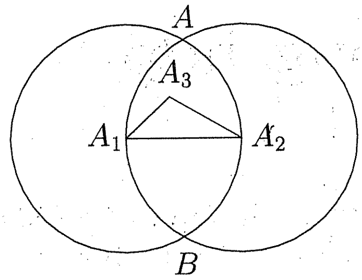
thỏa mãn yêu cầu bài toán.

12. Giả sử n hình tròn đã cho là $(C_1), (C_2), ..., (C_n)$ và giả sử (C_i) có tâm là O_i và bán kính là r_i. Khi đó, để hình tròn (C) bán kính r cắt hình tròn (C_i) thì tâm của (C) phải nằm trong hình tròn (S_i) có tâm O_i và bán kính $R_i = r + r_i$.



Xét 3 hình tròn $(S_m), (S_p), (S_q)$ trong số n hình tròn $(S_i), i = \overline{1;n}$. Do với ba hình tròn $(C_m), (C_p), (C_q)$ tồn tại một hình tròn bán kính r cắt cả ba hình tròn đó nên tâm của hình tròn này thuộc cả ba hình tròn $(S_m), (S_p), (S_q)$. Điều đó có nghĩa là ba hình tròn bất kì trong số n hình tròn $(S_i), i = \overline{1;n}$ đều có điểm chung. Theo định lí Helly thì n hình tròn $(S_i), i = \overline{1;n}$ có điểm chung O. Hình tròn (C) có tâm O, bán kính r thoả mãn yêu cầu bài toán.

13. Trước tiên, ta đi nghiên cứu một số trường hợp đặc biệt của n. Trường hợp $n = 1$ và trường hợp $n = 2$ là hiển nhiên. Xét trường hợp $n = 3$:



Trong ba điểm đã cho ta chọn hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Giả sử hai điểm đó là A_1 và A_2. Lấy A_1 và A_2 làm tâm vẽ hai đường tròn bán kính $R = A_1A_2$. Gọi A, B là giao điểm của hai đường tròn vừa vẽ. Khi đó A_3 nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác AA_1A_2 hoặc nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1A_2. Cả hai tam giác này đều là tam giác đều có cạnh $A_1A_2 \leq 2$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp

$$R = \frac{A_1A_2}{\sqrt{3}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Bây giờ xét $n \geq 3$ bất kì: Lấy A_i làm tâm, vẽ đường tròn (C_i) bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Xét ba đường tròn $(C_p), (C_q), (C_r)$ bất kì trong số n đường tròn vừa vẽ. Do A_p, A_q, A_r nằm trong đường tròn bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ nên tâm của đường tròn này nằm trong cả ba đường tròn $(C_p), (C_q), (C_r)$. Như vậy, ba đường tròn bất kì trong số n đường tròn $(C_i), i = \overline{1;n}$ đều có điểm chung. Theo định lí Helly thì n đường tròn trên có điểm chung O. Đường tròn tâm O, bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ chứa toàn bộ n điểm $A_1, A_2, .., A_n$ đã cho.

Bài tập tổng hợp

1. Xét tập $X = \{1; 2; ...; 10\}$. Tập con A của X gọi là có tính chất T nếu với mọi $x, y \in A$ ta có $x + y \neq 11$. Hỏi

   a) Số phần tử lớn nhất của tập con A của X có tính chất T là bao nhiêu?

   b) Có bao nhiêu tập con A của X có tính chất T.

2. Xét tập hợp $X = \{1; 2; 3; ...; 2009\}$. Hỏi có bao nhiêu cách chia tập X thành 3 tập khác rỗng sao cho trong mỗi tập đều không có hai phần tử liên tiếp nào?

3. Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương luôn tồn tại số A có n chữ số, chia hết cho 2^n và trong biểu diễn thập phân của A không có chữ số 0 nào.

4. Cho dãy các số $a_1, a_2, ..., a_{99} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ thỏa mãn: nếu $a_n = 1$ thì $a_{n+1} \neq 2$ và nếu $a_n = 3$ thì $a_{n+1} \neq 4$ với mọi $n = \overline{1, 98}$. Chứng minh rằng, tồn tại $k \neq m$ sao cho $a_k = a_m$ và $a_{k+1} = a_{m+1}$.

5. Xét tập tất cả các bộ số $w = (a_0, a_1, ..., a_n)$ $(n \geq 1)$ trong đó

   $a_i \in \{0; 1\}, \forall i = \overline{0, n}$. Hãy chỉ ra một cách sắp 2^{n+1} bộ trên theo thứ tự

   $$w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_{2^{n+1}}$$

   sao cho mỗi bộ w_{i+1} chỉ khác w_i đúng một tọa độ.

6. Tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ gọi là có tính chất T nếu A có không ít hơn 4 phần tử và với mọi a, b, c, d phân biệt thuộc A ta có $ab + cd \in A$.

   a) Hãy chỉ ra một tập A gồm 4 phần tử và có tính chất T.

   b) Hỏi có hay không tập $A \subset (0; +\infty)$ gồm 4 phần tử và có tính chất T?

7. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $S(n)$ là số dãy nguyên

$$n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k \geq 0$$

sao cho $2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_k} = n$.

Chứng minh rằng $S(2^n) \geq 2^n$.

8. Cho đa giác lồi 12 cạnh $A_1A_2...A_{2009}$. Với mỗi điểm X ta kí hiệu

$$S(X) = XA_1 + XA_2 + ... + XA_{2009}.$$

Hỏi có hay không hai điểm P, Q nằm trong đa giác đã cho sao cho

$$PQ = 1 \text{ và } |S(P) - S(Q)| = 2007.$$

9. Trên mặt phẳng cho 2009 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và tổng độ dài các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong số các điểm đã cho bằng 2008. Chứng minh rằng

a) Tồn tại một đường gấp khúc kín nối 2009 điểm đã cho và có độ dài không vượt quá 2.

b) Tồn tại một đường tròn có đường kính bằng 1 và chứa toàn bộ 2009 điểm đã cho.

10. Cho $m, n \geq 5$. Chứng minh rằng, ta có thể viết trong mỗi ô của bảng $m \times n$ một số chính phương sao cho các số trong bảng đôi một khác nhau và tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều là một số chính phương.

11. Trong các ô của bảng ô vuông $n \times n, n \in \mathbb{N}^*$ ta viết một số nguyên sao cho hai ô bất kì có chung một cạnh thì hai số trong hai ô đó hơn kém nhau không quá một đơn vị. Chứng minh rằng, có ít nhất một số xuất hiện trong bảng không ít hơn n lần.

12. Cho các số $a_1, a_2, ..., a_{2002}; b_1, b_2, ..., b_{2003}$ và các số dương $p_1, p_2, ..., p_{2002}$; $q_1, q_2, ..., q_{2003}$. Lập bảng 2002×2003, trong mỗi ô (i, j) ta đặt số $\dfrac{a_i + b_j}{p_i + q_j}$. Chứng minh rằng, tồn tại một số trong bảng sao cho số này không nhỏ hơn bất kì số nào đứng cùng hàng với nó và không lớn hơn bất kì số nào đứng cùng cột với nó.

13. Trong một số ô của bảng $n \times m, m > n$ ta đặt một dấu $(*)$ sao cho trong mỗi cột có ít nhất một dấu $(*)$. Chứng minh rằng, có một dấu $(*)$ mà số dấu $(*)$ trong dòng chứa nó nhiều hơn số dấu $(*)$ trong cột chứa nó.

14. Xét bảng ô vuông $n \times n$. Trong ô giao của hàng thứ i và cột thứ j ta viết số $a_{ij} = a_i + b_j$ sao cho tích các số trong các cột bằng nhau. Chứng minh rằng tích các số trong các hàng cũng bằng nhau.

15. Cho $n > 1$. Xét bảng $n \times n$, mỗi ô của bảng ta viết một số thực sao cho khi chọn ra n số bất kì $x_1, x_2, ..., x_n$ mà không có hai số nào thuộc cùng một hàng và hai số nào thuộc cùng một cột thì tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n$ không đổi. Từ mỗi hàng ta lấy ra số lớn nhất. Gọi m là số nhỏ nhất trong các số đó. Từ mỗi cột ta lấy ra số nhỏ nhất. Gọi M là số lớn nhất trong các số đó. Chứng minh rằng $M = m$.

16. Xét góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ (kể cả biên). Một con châu chấu nhảy trong góc đó theo nguyên tắc sau: Từ điểm $M(x; y)$ nó có thể nhảy đến điểm $N(x-5; y+7)$ hoặc $P(x+1; y-1)$ nếu N, P vẫn còn ở trong góc phần tư thứ nhất. Hãy xác định vùng giới hạn điểm ban đầu $M(x_0; y_0)$ sao cho con châu chấu không thể nhảy xa cách gốc tọa độ một khoảng lớn hơn 1000. Hãy vẽ miền này và tính diện tích của nó.

17. Xét bàn cờ $n \times n$, với n là số nguyên dương, $n \geq 3$. Hỏi con mã muốn đi từ một ô góc tới ô góc đối diện thì cần ít nhất bao nhiêu bước?

18. Hai người luôn phiên viết các số 0 hoặc 1 vào các ô của bảng 1993×1994. Giả sử A_n và B_n tương ứng là giá trị lớn nhất của tổng các số thuộc cùng một hàng và giá trị lớn nhất của tổng các số thuộc cùng một cột. Người thứ nhất thắng nếu $A_n > B_n$. Hỏi ai có chiến lược thắng?

19. Hai người chơi một trò chơi như sau: Trên bảng cho trước một số nguyên dương $n_0 \geq 2$. Người thứ nhất được phép viết lên bảng số n_1 sao cho $n_0 \leq n_1 \leq n_1^2$, người thứ hai được phép viết lên bảng số n_2 sao cho tỉ số $\dfrac{n_1}{n_2}$ có dạng p^s, trong đó p là số nguyên tố và $s \in \mathbb{N}^*$. Sau đó thay giá trị của n_0 bởi n_2 và trò chơi lại tiếp tục. Người thứ nhất sẽ thắng nếu viết được số 2001 và người thứ hai sẽ thắng nếu viết được số 1. Giả thiết rằng hai người chơi rất giỏi, hỏi ai là người chiến thắng?

20. Hai bạn A và B chơi trò chơi sau với các số nguyên dương: Nếu trong tay bạn nào có số n thì bạn đó chuyển cho bạn còn lại số n' bằng tổng của n với một ước thực sự của n. Bạn nào chuyển được số $n \geq 2006$ vào

tay đối phương thì thắng cuộc. Giả sử hai bạn đều rất thông minh và ban đầu ta trao vào tay A số $a = 2$, hỏi bạn nào sẽ thắng?

21. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm. Hai người luôn phiên đánh dấu các điểm này. Người thắng cuộc là người có tổng tất cả các khoảng cách giữa các điểm mình đánh dấu lớn hơn. Giả thiết rằng các tổng nói trên phân biệt, hỏi ai là người có chiến lược thắng?

22. Trên bảng cho dãy số $1; 2; 3; ...; 2008$. Hai người lần lượt đặt trước mỗi số một dấu $(+)$ hoặc $(-)$ nếu số đó chưa được đặt dấu (số được đặt dấu được chọn tuỳ ý). Mục tiêu của người thứ nhất là kết quả nhận được có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất. Mục tiêu của người thứ hai là kết quả nhận được có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Với cách chơi T, kí hiệu $S(T)$ là giá trị tuyệt đối của tổng nhận được. Chứng minh rằng tồn tại cách chơi T_0 sao cho

    a) Người thứ nhất có chiến lược chơi để $S(T) \leq S(T_0)$.

    a) Người thứ hai có chiến lược chơi để $S(T) \geq S(T_0)$.

23. Cho n là số nguyên dương lẻ. Cho phép đặt vào mỗi ô của bảng $n \times n$ không quá một viên đá. Tìm số nhỏ nhất các viên đá mà ta phải đặt sao cho với mỗi ô trống, tổng số viên đá trong hàng và trong cột chứa nó không nhỏ hơn n.

24. Trên mặt phẳng cho 21 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{21}$, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Biết rằng, mỗi màu có không ít hơn 6 điểm được tô.

    a) Tìm số lớn nhất các cặp điểm cùng màu.

    b) Chứng minh rằng tồn tại ba điểm khác màu A_m, A_n và A_p sao cho $m = n + p$.

25. Cho n là số nguyên dương. Xét tập $S = \{1; 2; 3; ...; n\}$. Hãy xác định số tập con T của S sao cho không có hai phần tử a, b nào của T mà $|a - b| \in \{1; n\}$.

26. Trên mặt phẳng có 6 người A, B, C, X, Y, Z chuyển động thẳng đều với vận tốc không đổi. Biết: A gặp C và Y cùng một lúc; B gặp A và Z cùng một lúc; C gặp B và X cùng một lúc; A gặp X ở giữa (trung điểm) đoạn đường mà A gặp B và C; B gặp Y ở giữa đoạn đường mà B gặp C và A; C gặp Z ở giữa đoạn đường mà C gặp A và B. Chứng minh rằng, X, Y, Z gặp nhau cùng một lúc.

27. Có 5 tàu đi trên biển, chuyển động thẳng đều và chuyển động với vận tốc khác nhau. Trời mưa bão, các con tàu mất liên lạc. Tàu 5 nhận được tín hiệu từ đài chỉ huy trên đất liền rằng 4 tàu kia đều gặp nạn, mỗi tàu va chạm với tàu khác 3 lần. Giả sử sau khi va chạm các con tàu vẫn chuyển động như cũ. Biết tàu 5 đã va phải hai tàu khác. Chứng minh rằng, tàu 5 còn va chạm với ít nhất một tàu nữa.

28. Trong một cuộc thi hoa hậu, mỗi giám khảo được đề nghị 10 thí sinh vào vong chung kết. Một nhóm thí sinh được gọi là chấp nhận được đối với giám khảo A nếu trong nhóm đó có ít nhất một thí sinh mà giám khảo A đã đề nghị. Biết rằng, với 6 giám khảo bất kì đều tồn tại một nhóm gồm đúng 2 thí sinh là nhóm chấp nhận được đối với cả 6 giám khảo đó. Chứng minh rằng, tồn tại một nhóm gồm 10 thí sinh là nhóm chấp nhận được đối với mọi thành viên của ban giám khảo.

29. Trong một nước có n thành phố, các thành phố có thể đi đến nhau một cách tùy ý. Biết rằng mỗi chuyến đi giữa các thành phố đều có một giá tiền cụ thể (cho mỗi tuyến đường). Người ta lập ra hai hành trình đi qua các thành phố, trong mỗi hành trình mỗi thành phố được đi qua đúng một lần. Khi lập hành trình thứ nhất ta đi theo quy tắc: điểm xuất phát được chọn tùy ý, ở mỗi bước tiếp theo, trong các thành phố chưa đi qua ta chọn thành phố mà giá tiền đi đến đó (từ thành phố trước đó) là rẻ nhất (nếu có nhiều thì ta chọn một thành phố bất kì). Trong hành trình thứ hai, ở mỗi bước tiếp theo, trong các thành phố chưa đi qua ta chọn thành phố mà giá tiền đi đến đó là đắt nhất. Chứng minh rằng, tổng giá tiền của toàn bộ hành trình thứ nhất không nhiều hơn tổng giá tiền của toàn bộ hành trình thứ hai.

30. Trên mặt phẳng tọa độ cho một hình vuông với các cạnh là các đường lưới. Chia hình vuông đó thành 64 phần bằng nhau bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Chứng minh trong 64 hình vuông con nhận được có ít nhất một hình vuông sao cho trong hình vuông này không có một điểm $M(x, y)$ nào mà các tọa độ của nó thỏa mãn:

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad y = At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

trong đó a, b, c, d, A, B, C, D là các số thực cho trước và $t \in \mathbb{R}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Hải Châu, đề thi vô địch Toán quốc tế. NXB Thành phố Hồ Chí Minh, 1992.

[2] Lê Hải Châu, Các đề thi học sinh giỏi toán PTTH toàn quốc. NXB Giáo dục Việt Nam, 1994.

[3] Phạm Minh Phương, Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi THCS. NXB Giáo dục Việt Nam, 2005.

[4] Vũ Dương Thụy - Nguyễn Văn Nho: 40 năm Olympic Toán học quốc tế, Tập 1 + 2. NXB Giáo dục Việt Nam, 2001.

[5] Dusan Djukic- Vladimir Jankovic- Ivan Matic-Nikola Petrovic, The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads, 1959-2004. Springer, 2006.

[6] Titu Andreescu and Zuming Feng, 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team. Bikhauser, 2002.

[7] Titu Andreescu and Zuming Feng, A path to combinatorics for undergraduates counting strategies. Bikhauser, 2004.

[8] Titu Andreescu, Razvan Gelca, Mathematical Olympiad Challenges. Bikhauser, 2000.

[9] Titu Andreescu and Zuming Feng, Mathematical Olympiads 1998 - 1999 Problems and Solutions From Around the World. Published and distributed by The Mathematical Association of America, 2000.

[10] Titu Andreescu and Zuming Feng, Mathematical Olympiads 1999 - 2000 Problems and Solutions From Around the World. Published and distributed by The Mathematical Association of America, 2002.

[11] Arthur Engel, Problem - Solving Strategies. Springer, 1998.

[12] Loren C. Larson, Problem - Solving Through Problems. Springer, 1983.

[13] Walter Mientka et al., Mathematical Olympiads 1996 - 1997, Problems and Solutions From Around the World, MMA 1997.

[14] Walter Mientka et al., Mathematical Olympiads 1997 - 1998, Problems and Solutions From Around the World, MMA 1998.

[15] Các đề dự tuyển (Shortlist) của các năm.

[16] Tạp chí Crux.

[17] Tài liệu trên internet, đặc biệt là các website: www.diendantoanhoc.net, mathscope.org, www.mathlinks.ro.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc công ti cổ phần Dịch vụ Xuất bản Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung và sửa bản in:
LÊ THỊ THANH HẰNG

Trình bày bìa:

NGUYỄN BÍCH LA

Chế bản:

TRẦN THỊ THU THỦY

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN TỔ HỢP BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THPT
Mã số : C3T09H0 - CPD

In 3.000 cuốn (QĐ số 96), khổ 17 x 24 cm, tại Công ty CP In - Phát hành sách và Thiết bị trường học Quảng Nam, 260 Hùng Vương, TP Tam Kỳ. Số XB : 575 - 2010/CXB/39-924/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2010.