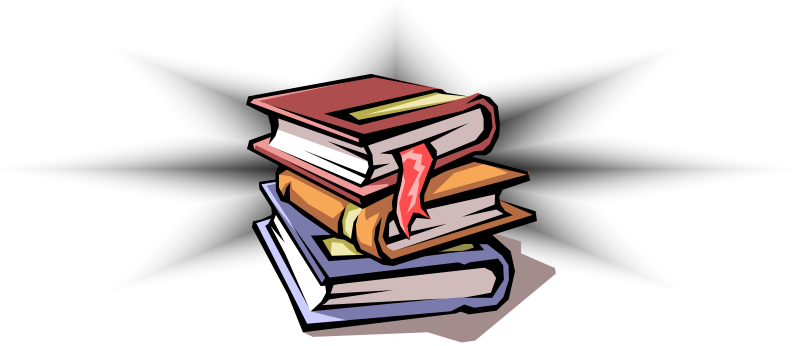
thuvientoan.net



9 CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

ÔN THI VÀO CHUYÊN TOÁN

TÀI LIỆU SƯU TẦM

Chuyên đề 1

BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Các bài toán trong chuyên đề này bao gồm các nội dung:

- Các phép tính về đa thức. Phân tích đa thức thành nhân tử.
- Rút gọn phân thức đại số. Các phép tính về phân thức. Giá trị của phân thức.
- Các phép tính về căn bậc hai, căn bậc ba.

Trong các biến đổi đồng nhất biểu thức đại số, các hằng đẳng thức có một vai trò quan trọng. Ngoài các hằng đẳng đáng nhớ trong Sách giáo khoa, cần biết thêm các hằng đẳng thức sau:

1) Bình phương của một đa thức:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

2) Lập phương của một tổng ba số, tổng các lập phương của ba số:

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

3) Lũy thừa bậc bốn, bậc năm của một nhị thức:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

4) Với số nguyên dương n, ta có:

$$a^n-b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

5) Với só lẻ n, ta có:

$$a^n+b^n = (a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

Bài toán thực tế

TỈ LỆ KHI PHA TRỘN

Tú được giao một nhiệm vụ như sau: Pha một lượng dung dịch có nồng độ 5% muối với một lượng dung dịch có nồng độ 30% muối để được hỗn hợp có nồng độ 20% muối.
Tú cần pha hai dung dịch trên với tỉ lệ nào? Bạn hãy giúp Túc giải quyết bài toán.

Giải:

Gọi lượng dung dịch có nồng độ muối 5% và 30% theo thứ tự là x và y (gam) (x, y > 0)

Ta có: $\frac{5}{100}x+\frac{30}{100}y=\frac{20}{100}(x+y)$

$\Leftrightarrow 5x+30y=20(x+y)\Leftrightarrow (30-20)y=(20-5)x\Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

Tỉ lệ khối lượng các dung dịch có nồng độ a% và b% cần pha với nhau là $\frac{2}{3}$

Trong thực hành, ta thường viết theo sơ đồ sau:

Tổng quát, tỉ lệ khối lượng các dung dịch có nồng độ a% và b% cần pha với nhau để được hỗn hợp có nồng độ c% là $\frac{|c-b|}{|c-a|}(c\neq a, c\neq b)$

I. ĐA THỨC

Ví dụ 1. Cho $x+y=a+b$ (1)

$x^3+y^3=a^3+b^3$ (2)

Chứng minh rằng $x^2+y^2=a^2+b^2$

Giải:

Từ (1) suy ra $(x+y)^2=(a+b)^2\Rightarrow x^2+y^2+2xy=a^2+b^2+2ab$ (3)

Ta có hằng đẳng thức

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Kết hợp (1) với (2) suy ra 3xy = 3ab hay xy = ab (4)

Từ (3) và (4) suy ra $x^2+y^2=a^2+b^2$

Ví dụ 2. Phân tích thành nhân tử:

a) x^4+4x^2+16

b) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

Giải

a) $x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2=(x^2+4)^2-(2x)^2=(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)$

b) Cách 1.

Áp dụng nhiều lần công thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ta có:

$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=[(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b)^3+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$=3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)$

$=3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]=3(a+b)(b+c)(c+a)$

Cách 2. Phương pháp xét giá trị riêng

Đặt $A=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

Với $a+b=0$ thì $a^3+b^3=0$ nên $A=c^3-c^3=0$, suy ra A chứa nhân tử a + b. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên A chứa nhân tử $(a+b)(b+c)(c+a)$

Do mọi hạng tử của A đều có bậc 3 nên $A=k(a+b)(b+c)(c+a)$ với k là hằng số.

Ta có với mọi a, b, c: $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=k(a+b)(b+c)(c+a)$ (1)

Thay a = b = 1 và c = 0 vào (1) được $2^3-2=k.2.1.1\Rightarrow k=3$

Vậy $A=3(a+b)(b+c)(c+a)$

Ví dụ 3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp xét giá trị riêng:

$A=(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

Giải

Thay a bởi b thì A = 0 nên A chứa nhân tử a – b

Do A không đổi khi hoán vị vòng quanh $a\to b\to c\to a$ nên A chứa nhân tử $(a-b)(b-c)(c-a)$ và có dạng

$A=B(a-b)(b-c)(c-a)$ (1)

Do mọi hạng tử của A đều có bậc 5 nên mọi hạng tử của B đều có bậc 2, do đó B có dạng**:**

$B=m\left(a^2+b^2+c^2\right)+n(ab+bc+ca)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có với mọi a, b, c :

$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=(a-b)(b-c)(c-a)\left[m\left(a^2+b^2+c^2\right)+n(ab+bc+ca)\right]$ (3)

Thay $a=0; b=1; c=2$ vào (3) được $-1-1+32=(-1)(-1).2.(2m-n)$ hay $15=2m+n$ (4)

Thay $a=-1; b=0; c=1$ vào (3) được $-1-1+32=(-1)(-1).2.(2m-n)$ hay $15=2m-n$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\begin{cases}5m+2n=15\\2m-n=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=-5\end{cases}$

Thay $m=5, n=-5$ vào (3) được $A=5(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Ví dụ 4. Rút gọn phân thức $A=\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$

Giải.

Xét $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{a^2+ac-ac-bc}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{a(a+c)-c(a+b)}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{c}{a+c}$

Tương tự, $\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}=\dfrac{b}{b+a}-\dfrac{c}{b+c}, \dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{c}{c+a}-\dfrac{b}{c+b}$

Do đó $A=\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{b}{b+a}-\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}-\dfrac{b}{c+b}=\dfrac{a+b}{a+b}-\dfrac{b+c}{b+c}=1-1=0$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số hữu tỉ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x-y}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Giải

Cách 1. $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{(x^2+y^2)(x-y)^2 + x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2}$

Ta sẽ chứng minh tử là bình phương của một số hữu tỉ.

Đặt tử bằng B ta có: $B = (x-y)^2\left[(x-y)^2 + 2xy\right] + x^2y^2$

$= (x-y)^4 + 2xy(x-y)^2 + x^2y^2 = \left[(x-y)^2 + xy\right]^2$

Vậy $A = \left[\frac{(x-y)^2 + xy}{xy(x-y)}\right]^2$

Cách 2. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Nếu a + b + c = 0 thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$

Thật vậy, ta có $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc}$

$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(c+b+a)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Trở lại bài toán, ta viết A dưới dạng $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(-y)^2} + \frac{1}{(y-x)^2}$

Áp dụng bổ đề trên với $a = x, b = -y, c = y - x$ thì a + b + c = 0 nên

$$A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{-y} + \frac{1}{y-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{x-y}\right)^2$$

Ví dụ 6. Cho các số a, b, c khác 0 và khác nhau đôi một thỏa mãn $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = k$.

Chứng minh rằng k = 1 hoặc $k = -1$

Giải.

Từ $a + \frac{1}{b} = k$ suy ra $a = k - \frac{1}{b} = \frac{bk-1}{b}$

Từ $b + \frac{1}{c} = k$ suy ra $c = \frac{1}{k-b}$

Kết hợp với $c + \frac{1}{a} = k$ được $\frac{1}{k-b} + \frac{b}{bk-1} = k$

$\Rightarrow bk - 1 + bk - b^2 = k(k-b)(bk-1)$

$\Rightarrow bk - 1 + bk - b^2 = bk^3 - k^2 - b^2k^2 + bk$

$\Rightarrow -1 + bk - b^2 = k^2\left(bk - 1 - b^2\right)$

$\Rightarrow \left(k^2-1\right)\left(bk-1-b^2\right)=0$

Nếu $bk-1-b^2=0$ thì $k=\dfrac{b^2+1}{b}=b+\dfrac{1}{b}$

Kết hợp với $k=b+\dfrac{1}{c}$ suy ra b = c, trái với giả thiết $b\neq c$

Vậy $k^2-1=0$, tức là $k=\pm 1$

Lưu ý

k = 1 khi, chẳng hạn, $a=2, b=-1, c=\dfrac{1}{2}$

$k=-1$ khi, chẳng hạn, $a=-2, b=1, c=-\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 7. Có bao nhiêu số nguyên dương $n\leq 1000$ sao phân số $\dfrac{n+4}{n^2+7}$ là phân số tối giản?

Giải

$\dfrac{n+4}{n^2+7}$ tối giản $\Leftrightarrow \dfrac{n^2+7}{n+4}$ tối giản $\Leftrightarrow \dfrac{n^2-16+23}{n+4}$ tối giản $\Leftrightarrow \dfrac{23}{n+4}$ tối giản.

Trước hết ta tìm xem có bao nhiêu giá trị của n $(1\leq n\leq 1000)$ để phân số $\dfrac{23}{n+4}$ không tối giản.

$\dfrac{23}{n+4}$ không tối giản $\Leftrightarrow n+4\in\{23; 46; 69; ...; 989\}$, tập hợp gồm $\dfrac{989-23}{23}+1=43$ (số)

Vậy có 1000 – 43 = 957 (số) làm cho $\dfrac{n+4}{n^2+7}$ là phân số tối giản.

Ví dụ 8. Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)...\left(15^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)...\left(16^4+\frac{1}{4}\right)}$.

Giải

Nhân biểu thức trong mỗi dấu ngoặc với 4 ta được

$$A=\frac{\left(4.1^4+1\right)\left(4.3^4+1\right)\left(4.5^4+1\right)...\left(4.15^4+1\right)}{\left(4.2^4+1\right)\left(4.4^4+1\right)\left(4.6^4+1\right)...\left(4.16^4+1\right)}.$$

Ta có

$$4n^4+1=\left(2n^2+1\right)^2-\left(2n\right)^2=\left(2n^2+1-2n\right)\left(2n^2+1+2n\right)=\left[\left(n-1\right)^2+n^2\right]\left[n^2+\left(n+1\right)^2\right]$$

Nên $A=\dfrac{\left(0^2+1^2\right)\left(1^2+2^2\right)}{\left(1^2+2^2\right)\left(2^2+3^2\right)}.\dfrac{\left(2^3+3^2\right)\left(3^2+4^2\right)}{\left(3^2+4^2\right)\left(4^2+5^2\right)}.....\dfrac{\left(14^2+15^2\right)\left(15^2+16^2\right)}{\left(15^2+16^2\right)\left(16^2+17^2\right)}=\dfrac{0^2+1^2}{16^2+17^2}=\dfrac{1}{545}$.

III. CĂN THỨC

Ví dụ 9. Rút gọn biểu thức với a > 0: $A=\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)}$.

Giải

Đặt $2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)=B^2$ thì

$$B^2=2\left[a^2+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}+a\right]=a^2+1+2a-2(a+1)\sqrt{a^2+1}+\left(a^2+1\right)=\left(a+1-\sqrt{a^2+1}\right)^2.$$

Do a > 0 nên $B=a+1-\sqrt{a^2+1}$.

Vậy $A=\sqrt{a^2+1}+\left(a+1-\sqrt{a^2+1}\right)=a+1$.

Ví dụ 10. Tìm các số hữu tỉ a và b sao cho $1+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+1=0$.

Giải

Thay $1+\sqrt{3}$ vào phương trình, ta được: $\left(1+\sqrt{3}\right)^3+a\left(1+\sqrt{3}\right)^2+b\left(1+\sqrt{3}\right)+1=0$.

Rút gọn ta được $(2a+b+6)\sqrt{3}+(4a+b+11)=0$. (1)

Vì (1) phải đúng với mọi a và b nên $\begin{cases}2a+b+6=0\\4a+b+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2,5\\b=-1.\end{cases}$

Ví dụ 11. Cho $a\left(a^2-3b^2\right)=9$ (1)

$b\left(b^2-3a^2\right)=13.$ (2)

Tìm giá trị của biểu thức a^2+b^2.

Giải

Từ (1) suy ra $a^2\left(a^4-6a^2b^2+9b^4\right)=81$.

Từ (2) suy ra $b^2\left(b^4-6a^2b^2+9b^4\right)=169$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được

$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=250\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)^3=250\Rightarrow a^2+b^2=\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$.

Ví dụ 12. a) Lập một phương trình bậc ba với hệ số nguyên, có nghiệm là $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

b) Đặt $m=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $\left(m^3+3m-1\right)^{100}$.

Giải

Gọi $m=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=a$ và $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=b$ thì $a^3+b^3=2$ (1)

$ab=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=-1.$ (2)

Từ hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ ta có $m^3 = 2 - 3m$ nên $m^3 + 3m - 2 = 0$.

Phương trình lập được là $x^3 + 3x - 2 = 0$.

b) Từ câu a suy ra $m^3 + 3m - 2 = 0$ nên $m^3 + 3m - 1 = 1$.

Do đó $\left(m^3 + 3m - 1\right)^{100} = 1$.

BÀI TẬP

Đa thức

1. Chứng minh hằng đẳng thức $\left(a^2 - c^2\right)\left(b^2 - d^2\right) = (ab - cd)^2 - (ad - bc)^2$.

2. Cho a + b +c = 0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$.

3. Tính tổng các chữ số của n^2, biết n = n = $\underbrace{99....9}_{50 \text{ chu so}}$

4. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^8 + x + 1$; b) $a^3\left(b^2 - c^2\right) + b^3\left(c^2 - a^2\right) + c^3\left(a^2 - b^2\right)$;

c) $(x+y)^5 - x^5 - y^5$; d) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$.

6. Phân tích thành nhân tử phương pháp xét giá trị riêng:

$(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.

7. Cho (ad + bc)(ac + bd) = cd và a + b = 1. Chứng minh rằng a = 0, hoặc b = 0 hoặc c = d

8. Cho $x^2 - yz = a; y^2 - xz = b; z^2 - xy = c.$. Chứng minh rằng

$ax + by + cz = (a+b+c)(x+y+z)$.

9. Tìm bốn số không âm sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng ba số còn lại.

Phân thức đại số

10. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

11. Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn a + b + c = 0. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

12. Cho ax + by = c; bx + xz = a; cz + ax = b và a + b + c ≠ 0. Tính giá trị biểu thức:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}.$$

13. Cho abc = 1 và $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c^2}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng bình phương của một trong hai số còn lại.

14. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3+4}\right)...\left(1 - \frac{1}{1+2+...+100}\right)$;

b) $B=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{98}{99}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{98}{99}\right)$;

c) $C=\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)\left(1-\frac{4}{7^2}\right)...\left(1-\frac{4}{99^2}\right)$;

d) $D=\frac{3^3+1^2}{2^2-1^2}+\frac{5^3+2^3}{3^3-2^3}+\frac{7^3+3^3}{4^3-3^3}+...+\frac{41^3+20^3}{21^3-20^3}$.

Căn thức

15. Cho $m \geq 0$. Tính x và y theo m, biết rằng: $\sqrt{x+y-m}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{m}$.

16. Cho dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1=\sqrt{2}-1, a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$ với n = 1, 2, 3…Tính a_{100}.

17. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Rút gọn biểu thức

$$A=a\sqrt{\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}}+b\sqrt{\frac{(c^2+1)(a^2+1)}{b^2+1}}+c\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}.$$

18. Cho $m=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Lập phưng trình bậc 6 với hệ số nguyên, nhận m làm một nghiệm.

Chuyên đề 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Chuyên đề này đi sâu vào hai loại phương trình gần gũi với chúng ta là phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai, bao gồm:

Phưng trình bậc nhất một ẩn, trong đó có các phương trình đưa được về phương trình bậc nhất một ẩn như phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Phương trình bậc hai một ẩn, điều kiện để phương trình có nghiệm, hệ thức Vi-ét.

Quan hệ giữa đường thẳng và parabol thể hiện quan hệ giữa hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai.

Bài toán cổ

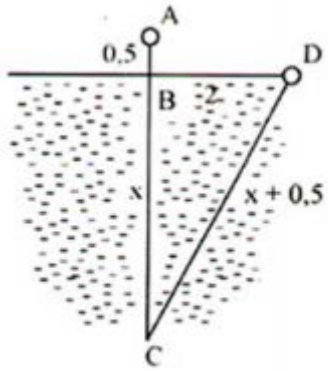
BÔNG SEN TRÊN HỒ

Bài toán của Bát –xca-ra *(Bhaskara)*, nhà toán học Ấn Độ (1114 – khoảng 1178)

Cành sen nhỏ mọc trong hồ nước
Bông sen tròn nửa thước nhô lên.
Bổng đâu gió thổi sang bên
Bông hoa dạt xuống nằm trên mặt hồ
Cành cành cũ được vừa hai thước
(Cứ sát theo mặt nước mà đo).
Nhờ ai thạo tính giúp cho

Hồ sâu mấy thước, lí do thế nào?

Giải (h.1)



Hình 1

Gọi độ sâu của hồ là BC = x (thước), phần cây sen nhỏ lên mặt hồ là AB = 0, 5 thước.

Khi bông sen dạt xuống đến vị trí D, ta có CD = AC = x + 0,5 (thước).

Ta giác CBD vuông tại B nên $BC^2 + BD^2 = CD^2$.

Do đó $x^2 + 2^2 = (x + 0,5)^2$.

Giải phương trình trên, ta được x = 3,75.

Hồ nước sâu 3,75 thước.

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Cần chú ý đến các dạng phương trình đưa được về phương trình bậc nhất một ẩn.

1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ở dạng này, giá trị tìm được của ẩn phải thỏa mãn điều kiện cho mẫu thức khác 0 (điều kiện của phương trình).

Ví dụ 13. Giải phương trình (a, b là tham số):

$$\frac{ax-1}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình là $x \neq \pm 1$.

Với điều kiện đó thì $(1) \Leftrightarrow (ax-1)(x+1)+b(x-1)=a\left(x^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)x = a+b+1. \qquad (2)$$

Nếu a + b ≠ 1 thì $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$. Giá trị này là nghiệm nếu $\begin{cases} \frac{a+b+1}{a+b-1} \neq 1 \\ \frac{a+b+1}{a+b-1} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow a+b \neq 0.$

Nếu $a+b=1$ thì trở thành $0x=2$, vô nghiệm.

Kết luận:

Với $a+b \neq 1$ và $a+b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$

Còn lại vô nghiệm.

2. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ở dạng này, ta thường khử dấu giá trị tuyệt đối theo định nghĩa

$$|A| = \begin{cases} A & A \geq 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 14: Một học sinh giải phương trình $|x+1| + 3x = -5$ (1) như sau:

$$(1) \Leftrightarrow |x+1| = -3x-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = -3x-5 \\ x+1 = 3x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = -6 \\ -2x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Cách giải trên có đúng không?

Giải:

Giá trị $x = -\dfrac{3}{2}$ không thỏa mãn (1) nên loại.

Cách giải đúng như sau:

Cách 1. Với điều kiện $-3x-5 \geq 0$ (2) thì

$$|x+1| = -3x-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = -3x-5 \\ x+1 = 3x+5 \end{array}\right.$$

Giải như trên, loại $x = -\dfrac{3}{2}$ vì trái với (2), chọn $x = -2$ vì thỏa mãn (2).

Cách 2. Xét $x \geq -1$ thì $(1) \Leftrightarrow x+1+3x = -5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$, không thỏa mãn $x \geq -1$.

Xét $x < -1$ thì $(1) \Leftrightarrow -x-1+3x = -5 \Leftrightarrow x = -2$, thỏa mãn $x < -1$.

Kết luận: $x = -2$

Lưu ý: $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 15. Tìm giá trị của tham số a để phương trình $|2x-a| = x+1$ (1) có nghiệm duy nhất.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \dfrac{a}{2} \\ 2x - a = x + 1 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x \leq \dfrac{a}{2} \\ a - 2x = x + 1 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 1 \\ x \geq \dfrac{a}{2} \end{cases}, a + 1 \geq \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \geq -2$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-1}{3} \\ x \leq \dfrac{a}{2} \end{cases}, \frac{a-1}{3} \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \geq -2$$

Để (1) có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} a + 1 = \dfrac{a-1}{3} \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Cần chú ý đến các kiến thức sau:

1) Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm là $\Delta \geq 0$.

2) *Hệ thức Vi –ét:* Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có các nghiệm x_1 và x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

3) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $a \neq 0$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Ví dụ 16. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0$.

Tìm giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 8$.

Giải

Phương trình đã cho có nghiệm với mọi m vì

$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m) = 1 > 0$.

Theo hệ thức Vi-ét, $x_1 + x_2 = 2m + 2, x_1 x_2 = m^2 + 2m$.

Ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (2m+2)^2 - 4(m^2 + 2m) = 4$ nên $|x_1 - x_2| = 2$.

Ta lại có $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (2m+2)^2 - (m^2 + 2m) = 3m^2 + 6m + 4 > 0$

Do đó $|x_1^3 - x_2^3| = 2(3m^2 + 6m + 4)$

Giải phương trình $2(3m^2 + 6m + 4) = 8$ được $m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -2$

Đáp số: $m \in \{0; -2\}$

Ví dụ 17. Cho phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$. Tìm giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 = 2$.

Giải

Điều kiện để phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ có nghiệm là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 4$

Theo hệ thức Vi – ét: $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1x_2 = 1$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2$ nên
$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (m^2 - 2)^2 - 2 = m^4 - 4m^2 + 2$

Giải phương trình $x_1^4 + x_2^4 = 2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m^2(m^2 - 4) = 0$

Loại $m^2 = 0$ vì trái với (1), ta được $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Đáp số: $m = \pm 2$

Ví dụ 18. Cho các phương trình

$x^2 + mx - 5 = 0$ (1)

Và $5x^2 - mx - 1 = 0$ (2)

a) Chứng minh rằng các phương trình trên có nghiệm.

b) Gọi x_1 là nghiệm dương của (1), x_2 là nghiệm dương của (2). Chứng minh rằng $x_1 + x_2 \geq 2$.

Giải

a) Các phương trình (1) và (2) đều có $ac < 0$ nên đều có hai nghiệm trái dấu.

b) Do x_1 là nghiệm của (1) nên $x_1^2 + mx_1 - 5 = 0 \Rightarrow 1 + m.\frac{1}{x_1} - \frac{5}{x_1^2} = 0$

$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 - m\frac{1}{x_1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}$ là nghiệm dương của (2)

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow x_1x_2 = 1.$

Do x_1, x_2 dương nên $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2} = 2$

Ví dụ 19. Cho các phương trình

$$x^2 + x + a = 0 \qquad (1)$$

Và $$x^2 + 4x + b = 0 \qquad (2)$$

Tìm giá trị của a và b sao cho các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) và các nghiệm x_3, x_4 của phương trình (2) thỏa mãn:

$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Giải

Điều kiện để (1) và (2) có nghiệm là

$$\begin{cases} 1 - 4a \geq 0 \\ 4 - b \geq 0 \end{cases} \Delta ABC \begin{cases} a \leq \dfrac{1}{4} \\ b \leq 4 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{x_4}{x_3} = \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_1} = k$ thì $x_2 = kx_1, x_3 = kx_2 = k^2x_1, x_4 = kx_3 = k^3x_1$.

Theo hệ thức Vi – ét:

$$x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_1 + kx_1 = -1 \Rightarrow x_1(1+k) = -1 \qquad (3)$$

$$x_3 + x_4 = -4 \Rightarrow k^2x_1 + k^3x_1 = -4 \Rightarrow k^2x_1(1+k) = -4 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $k^2 = 4$ nên $k = \pm 2$.

- Xét $k = 2$, thay vào (3) được $x_1 = -\dfrac{1}{3}, x_2 = -\dfrac{2}{3}, x_3 = -\dfrac{4}{3}, x_4 = -\dfrac{8}{3}$.

Suy ra $a = x_1x_2 = \dfrac{2}{9}, b = x_3x_4 = \dfrac{32}{9}$, thỏa mãn $a \leq \dfrac{1}{4}$ và $b \leq 4$.

Đáp số: $a = \dfrac{2}{9}, b = \dfrac{32}{9}$ hoặc $a = -2, b = -32$.

III. QUAN HỆ GIỮA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho parabol $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và đường thẳng $y = mx + n$. Hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là nghiệm của phương trình $ax^2 = mx + n$ hay $ax^2 - mx - n = 0$. (1)

Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng cắt parabol.

Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì đường thẳng tiếp xúc với parabol.

Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì đường thẳng không giao với parabol.

Ví dụ 20. Cho parabol $y = x^2$. Gọi A và B là hai điểm thuộc parabol có hoành độ theo thứ tự là a và b . Gọi C là điểm thuộc parabol có hoành độ bằng $a+b$. Chứng minh rằng OC song song với AB.

Giải. (h.2)

Kẻ AE, BF, CK vuông góc với Ox, kẻ AH vuông góc với BF.

Ta có $A(a;a^2), B(b;b^2), C(a+b,(a+b)^2)$.

Đường thẳng AB có hệ số góc là $m = \frac{BH}{AH} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = b+a$.

Đường thẳng OC có hệ số góc là $n = \frac{CK}{OK} = \frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b$

Do $m = n$ nên $AB//OC$.

Ví dụ 21. Cho parabol $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng d có phương trình $y = x+4$. Tìm tọa độ các điểm A và B sao cho A thuộc parabol, B thuộc đường thẳng d và độ dài AB nhỏ nhất.

Giải. (h.3)

Gọi d' là đường thẳng có phương trình $y = x+k$ thì $d'//d$.

Điều kiện để d' tiếp xúc parabol là phương trình $-\frac{x^2}{4} = x+k$, tức là $x^2+4x+4k=0$ (1) có nghiệm kép.

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4-4k = 0 \Leftrightarrow k = 1.$

Đường thẳng d' song song với d và tiếp xúc với parabol có phương trình $y = x+1$.

Tiếp điểm của d' và parabol là $A(-2;-1)$.

Ta lập phương trình đường thẳng d_1 đi qua A và vuông góc với d.

Gọi phương trình của d_1 là $y = mx+n$.

Do $d_1 \perp d$ nên $m.1 = -1$, do đó $m = -1$.

Do đường thẳng $y = -x+n$ đi qua $A(-2;-1)$ nên $-1 = -(-2)+n \Rightarrow n = -3.$

Đường thẳng d_1 có phương trình $y=-x-3$

Giải phương tình $x+4=-x-3$ được $x=-3,5$; khi đó $y=x+4=-3,5+4=0,5$

Tọa độ giao điểm B của d và d_1 là $(-3,5;0,5)$

Điểm $A(-2;-1)$ thuộc parabol, điểm $B(-3,5;0,5)$ thuộc đường thẳng d và độ dài AB nhỏ nhất.

BÀI TẬP

Phương trình bậc nhất một ẩn

19. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}+\dfrac{x-a-b}{c}=3;$

b) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right);$

c) $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}=2$

20. Giải các phương trình sau:

a) $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=4;$

b) $|x-3|+|x-1|+|x+1|+|x+3|+|x+5|=12$

21. Tìm giá trị của a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$|x-a|-|2x-4|=1$$

Phương trình bậc hai một ẩn

22. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+(m-1)(m+3)=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để $-2<x_1<x_2<3$.

23. Cho các phương trình: $x^2+ax+b=0$ (1) và $x^2+a^2x-ab=0$ (2)

Tìm giá trị của a và b để phương trình (1) có các nghiệm x_1 và x_2, phương trình (2) có các nghiệm x_1-1 và x_2-1.

24. Cho phương trình $x^2+ax-1=0$ có các nghiệm x_1 và x_2, phương trình $x^2+bx+1=0$ có các nghiệm x_1 và x_3. Chứng minh rằng $(x_1-x_2)(x_1-x_3)=ab$.

25. Cho phương trình $(m-1)x^2+(m+1)x+2=0$ với $m\neq 1$.

Tìm giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $|x_1^2-x_2^2|=3$.

26. Cho phương trình $x^2+(m+1)x+2=0$.

Tìm giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^2+x_2^2$ nhỏ nhất.

27. Cho phương trình $x^2-(2m+1)x-(m^2+2)=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $A=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ (x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình).

28. Cho bốn phương trình với a, b, c khác nhau đôi một:

$x^2+ax+1=0$ (1) $\quad$ $x^2+bx+c=0$ (2)

$x^2+cx+b=0$ (3) $\quad$ $x^2+x+a=0$ (4)

Biết các phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là m, các phương trình (3) và (4) có nghiệm chung là n.

a) Tính m và n.

b) Tính tổng $a+b+c$.

Quan hệ giữa parabol và đường thẳng

29. Cho parabol $y=x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y=mx+3$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để độ dài AB nhỏ nhất.

30. Cho parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng d có phương trình $y=mx+2$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để tam giác OAB có diện tích bằng $2\sqrt{5}$.

31. Cho parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng d có phương trình $y=x+4$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

32. Cho parabol $y=x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y=x+n$.

a) Tìm giá trị của n để đường thẳng d luôn cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mọi giá trị của n thỏa mãn điều kiện của câu a thì điểm I chuyển động trên một đường thẳng cố định.

33. Cho parabol $y=x^2$. Gọi M và N là các điểm thuộc parabol có hoành độ theo thứ tự là -1 và 1. Gọi A và C là các điểm thuộc parabol có hoành độ theo thứ tự là -2 và $-\dfrac{1}{3}$. Vẽ các dây AB và CD của parabol đi qua điểm $I(0;1)$. Gọi giao điểm của AC và BD với MN theo thứ tự là P và Q.

a) Tìm tọa độ các điểm B và D.

b) Tìm tọa độ các điểm P và Q.

c) Chứng minh rằng $IP = IQ$.

Chuyên đề 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Nội dung về hệ phương trình trong chuyên đề này bao gồm:

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Hệ phương trình bậc cao hai ẩn.
- Hệ phương trình ba ẩn, bốn ẩn.

Các phương pháp thường dung để giải các hệ phương trình trên là:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.
- Phương pháp dùng bất đẳng thức.

Đại số và Số học

CÁCH GIẢI ĐẠI SỐ GIÚP TÌM RA CÁCH GIẢI SỐ HỌC

Bài toán

Anh Việt đi từ A và đã đến B gặp bạn đúng giờ hẹn. Anh nói với bạn rằng:

- Nếu tôi đi với vận tốc ít hơn vận tốc đã đi $6\ km/h$ thì sẽ đến B sau giờ hẹn 2 giờ, còn nếu tôi đi với vận tốc nhiều hơn vận tốc đã đi $10\ km/h$ thì sẽ đến B trước giờ hẹn 2 giờ.

Bạn hãy tính thời gian anh Việt đã đi quãng đường AB.

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Gọi vận tốc anh Việt đã đi quãng đường AB là $v\ (km/h)$, thời gian đã đi quãng đường AB là t (giờ).

Trong trường hợp thứ nhất, vận tốc là $v-6\ (km/h)$, thời gian là $t+2$ (giờ).

Ta có phương trình: $(v-6)(t+2) = vt$.

Trong trường hợp thứ hai, vận tốc là $v+10\ (km/h)$, thời gian là $t-2$ (giờ).

Ta có phương trình: $(v+10)(t-2) = vt$.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(v-6)(t+2)=vt\\(v+10)(t-2)=vt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}vt+2v-6t-12=vt\\vt-2v+10t-20=vt\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2v-6t=12\\-2v+10t=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t=32\\v-3t=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=30\\t=8\end{cases}.$$

Thời gian anh Việt đi quãng đường AB là 8 giờ.

Tìm cách giải số học cho bài toán.

Để tìm ra cách giải bài toán trên bằng phương pháp số học, ta thực hiện các biến đổi đại số khác với cách giải trên đôi chút.

Cách giải đại số	**Cách giải số học**
Gọi vận tốc anh Việt đã đi đoạn AB là $v\ (km/h)$, thời gian anh Việt đã đi đoạn AB là t (giờ). Gọi vận tốc và thời gian đi trong trường hợp thứ nhất là v_1 và t_1. Gọi vận tốc và thời gian đi trong trường hợp thứ hai là v_2 và t_2.	Giả sử có xe 1 và xe 2 cùng đi từ A với thời gian anh Việt đã đi đoạn AB.
Ta có: $vt=v_1t_1=v_2t_2,\ v-v_1=6,\ v_2-v=10$. $t_1-t=2,\ t-t_2=2$. $v_1t_1=vt\Rightarrow v_1(t+2)=vt\Rightarrow v_1t+2v_1=vt$. (1) $v_2t_2=vt\Rightarrow v_2(t-2)=vt\Rightarrow v_2t-2v_2=vt$. (2)	Xe 1 đi chậm hơn anh Việt $6\ (km/h)$. Xe 1 đi nhanh hơn anh Việt $10\ (km/h)$.  Khi anh Việt đi đoạn AB thì: xe 1 đi đoạn AC (chưa đến B), xe 2 đi đoạn AD (đi quá B). Xe 1 đi tiếp đoạn CB gần 2 giờ, xe 2 đi đoạn BD trong 2 giờ.
Ta có: $v_2-v_1=(v_2-v)+(v-v_1)=10+6=16$ nên $2(v_2-v_1)=2.16=32$ (3)	Do vận tốc xe 2 lớn hơn vận tốc xe 1 là: $10+6=16\ (km/h)$ nên đoạn BD dài hơn đoạn CB là: $16.2=32\ (km)$.

Từ (1) suy ra: $2v_1 = (v - v_1)t = 6t$. (4) Từ (2) suy ra: $2v_2 = (v_2 - v)t = 10t$. (5)	Giả sử cũng với thời gian anh Việt đi đoạn AB, có xe 3 đi đoạn CB, xe 4 đi đoạn BD thì: vận tốc xe 3 bằng $6\ (km/h)$, vận tốc xe 4 bằng $10\ (km/h)$.
Từ (4) và (5) suy ra: $2v_2 - 2v_1 = 10 - 6t \Rightarrow 2v_2 - 2v_1 = 4t$. (6)	Vận tốc xe 4 (đi BD) lớn hơn vận tốc xe 3 (đi BC) là: $10 - 6 = 4\ (km/h)$.
Từ (3) và (6) suy ra: $4t = 32 \Rightarrow t = \frac{32}{4} = 8$.	Vậy thời gian xe 3 đi CB (cũng là thời gian xe 4 đi BD, cũng là thời gian anh Việt đi AB) là: $32 = 4 = 8$ (giờ).
Thời gian anh Việt đã đi đoạn AB là 8 giờ.	

Để tìm ra cách giải số học, cần tạo ra các đại lượng tương ứng với các biểu thức đại số và sử dụng phương pháp giải thiết tạm:

- Tạo ra xe 1 và xe 2 có vận tốc tương ứng với trường hợp 1 và trường hợp 2, nhưng đi với thời gian bằng thời gian t mà anh Việt đi đoạn AB.

- Có sự tương ứng

$AB = vt,\ AC = v_1t,\ AD = v_2t,\ CB = 2v_1,\ BD = 2v_2,\ BD - CB = 2(v_2 - v_1)$

- Tạo r axe 3 đi đoạn CB, xe 4 đi đoạn BD cũng với thời gian t nói trên. Từ đó, tính thời gian t bằng cách lấy hiệu quãng đường BD và CB mà xe 4 và xe 3 đã đi (là $32\ km$) chia cho hiệu vận tốc của hai xe đó (là $10 - 6 = 4\ km/h$).

- Trong biến đổi đại số cần giảm bớt các biến đổi trung gian và giữ lại những biểu thức liên quan đến các số liệu trong đề bài để tạo ra sự tương ứng với các giải số học.

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ví dụ 22. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ 2mx + m(m-1)y = 3 & (2) \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ phương trình:

a) Có nghiệm duy nhất.
b) Vô nghiệm.

Giải:

a) Với $m=0$ thì (2) là $0x+0y=3$, vô nghiệm.

Với $m\neq 0$, điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là

$\frac{2m}{1}\neq\frac{m(m-1)}{m}\Leftrightarrow 2m\neq m-1\Leftrightarrow m\neq -1$.

Vậy giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất là $m\neq 0$ và $m\neq -1$.

b) Với $m=0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Với $m\neq 0$, điều kiện để hệ vô nghiệm là

$\frac{2m}{1}=\frac{m(m-1)}{m}\neq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2m=m-1\neq\frac{1}{3}\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy giá trị của m để hệ vô nghiệm là $m=0$ hoặc $m=-1$.

Lưu ý: Có thể giải bằng cách rút x từ (1) rồi thay vào (2) và rút gọn được $m(m+1)y=2m-3$.

Với $m\neq 0$ và $m\neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m=0$ hoặc $m=-1$ thì hệ vô nghiệm.

Ví dụ 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=m & (1)\\ mx-(m+1)y=2m+2 & (2)\end{cases}$.

Tìm giá trị của để hệ phương trình có nghiệm (x,y) duy nhất thỏa mãn tích xy nhỏ nhất.

Giải:

Rút từ (1) ta được $y=m-2x$. Thay vào (2) ta được

$mx-(m+1)(m-2x)=2m+2$

$\Leftrightarrow mx-3m(m+1)+(2m+2)x=2m+2$

$\Leftrightarrow (3m+2)x=2m+2+3m^2+3m$

$\Leftrightarrow (3m+2)x=5m+2+3m^2$

$\Leftrightarrow (3m+2)x=(3m+2)(m+1)$

Nếu $m\neq -\frac{2}{3}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m+1\\ y=m-2\end{cases}$

Khi đó $xy=(m-1)(m+2)=m^2-m-2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geq -\frac{9}{4}$.

$\min(xy)=-\frac{9}{4}$ tại $m=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn $m\neq -\frac{2}{3}$).

II. Hệ phương trình bậc cao hai ẩn.

Hệ phương trình bậc cao hai ẩn không được học chính thức trong chương trình đại số 9, nhưng về kiến thức hệ phương trình (bậc nhất hai ẩn) và phương trình bậc hai một ẩn ta có thể giải phương trình bậc cao hai ẩn.

Các phương pháp thường dung để giải hệ phương trình bậc cao hai ẩn là phương pháp thế, phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp dung bất đẳng thức.

1. Phương pháp thế

Trong phương pháp thế, từ một phương trình ta biểu thị một ẩn theo ẩn kia (hoặc tìm giá trị của một ẩn) rồi thay thế vào phương trình còn lại.

Ví dụ 24. Cho hệ phương trình $\begin{cases} xy-3x-y=1 & (1) \\ x^3-y^3+x^2y-x^2y=0 & (2) \end{cases}$.

Giải:

$(2) \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

Loại $x=y=0$ vì không thỏa mãn (1).

Thay vào (1) ta được $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{5}$.

Đáp số: Nghiệm của hệ là $(2+\sqrt{5},2+\sqrt{5}),(2-\sqrt{5},2-\sqrt{5})$.

Ví dụ 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x^4-y^4=7x-y & (2) \end{cases}$.

Giải:

Thay $x+y=1$ vào ta được (2) $(x^2+y^2)(x-y)=7x-y$.

$\Leftrightarrow (1-2xy)(x-y)=7x-y$

$\Leftrightarrow 2x(y^2-xy-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ y^2-xy-3=0 & (3) \end{array}\right.$

Với $x=0$ thì $y=1$.

Với $x\neq 0$ thay y bởi $1-x$ vào (3) ta được $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đáp số: Nghiệm (x,y) của hệ là $(0,1),(2,-1),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

2.Phương pháp cộng.

Trong phương pháp cộng, ta cộng hoặc trừ từng vế hai phương trình để khử một ẩn hoặc để tìm một quan hệ giữa hai ẩn.

Ví dụ 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-1=2y & (1) \\ y^3-1=2x & (2) \end{cases}$.

Giải:

Lấy (1) trừ (2) ta được $x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$.

Do $x^2+xy+y^2+2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2>0$ nên $y=x$.

Thay $y=x$ vào (1) ta được $x^3-1=2x$.

$\Leftrightarrow x^3+1-2x=2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đáp số: Nghiệm (x,y) của hệ là $(-1,-1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lưu ý: Trong hệ phương trình trên, khi thay y bởi x thay x bởi y thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) , phương trình (2) trở thành (1).Ta gọi đó là phương trình trên là hệ đối xứng loại II.

Để giải hệ phương trình đối xứng loại II, ta trừ vế theo vế hai phương trình và nhận được phương trình tích.

3.Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-xy=-2 & (1) \\ x^2+y^2=20 & (2) \end{cases}$.

Giải:

Đặt $x+y=a, xy=b$ ta có

$$\begin{cases} (x+y)-xy=2 \\ (x+y)^2-2xy=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 & (1) \\ a^2-2b=20 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2-2(a+2)=20 \Leftrightarrow a^2-2a-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-4 \end{array}\right.$.

Với $a=6$ thì $b=8$. Ta có x và y là nghiệm phương trình $X^2-6X+8=0$ nên $X\in\{2,4\}$. Khi đó (x,y) là $(2,4),(4,2)$.

Với $a=-4$ thì $b=-2$. Ta có x và y là nghiệm phương trình $X^2+4X-2=0$ nên $X=2\pm\sqrt{6}$. Khi đó (x,y) là $\left(2-\sqrt{6},2-\sqrt{6}\right),\left(2+\sqrt{6},2+\sqrt{6}\right)$.

Lưu ý: Trong hệ phương trình trên, khi x thay bởi y , thay y bởi x thì mỗi hệ phương trình của hệ đều không đổi. Ta gọi hệ phương trình trên là hệ đối xứng loại I.

Để giải hệ phương trình đối xứng loại I, ta thường đặt ẩn phụ và (giữa a và b có mối quan hệ $b^2>4a$).

Ví dụ 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$.

Giải:

Cách 1: Đặt $x+y=a, xy=b$ ta có

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2b=1 & (1) \\ a^3-3ab=1 & (2) \end{cases}.$$

Từ (1) suy ra $b=\dfrac{a^2-1}{2}$. Thay vào (2) ta được

$$a^3-3a\frac{a^2-1}{2}=1 \Leftrightarrow a^3-3a+2=0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=1 \end{array}\right.$$

Với $a=1$ thì $b=0$. Ta có x và y là nghiệm phương trình $X^2-X=0$ nên $X\in\{0,1\}$. Khi đó (x,y) là $(0,1),(1,0)$.

Với $a=-2$ thì $b=\dfrac{3}{2}$. Ta có x và y là nghiệm phương trình $X^2+2X+\dfrac{3}{2}=0$ vô nghiệm (có thể loại $a=-2$ và $b=\dfrac{3}{2}$ do $a^2>4b$)

Đáp số: Nghiệm (x,y) của hệ là $(1,0),(0,1)$.

Cách 2: Trừ vế theo vế hai phương trình, ta được

$$x^3-x^2+y^3-y^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+y^2(y-1)=0 (3)$$

Do $x^2+y^2=1$ nên $x^2\le 1$ suy ra $x\le 1$. Tương tự $y\le 1$.

Suy ra $x^2(x-1)\le 0$ và $y^2(y-1)\le 0$.

Kết hợp với (3) suy ra $x^2(x-1)=y^2(y-1)=0$.

Vậy $x=0, y=1$ hoặc $x=1, y=0$.

Ví dụ 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Giải:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{5}{12} & (1) \\ (x+y)^2-2xy=1 & (2) \end{cases}.$$

Đặt $a=xy$ từ (1) ta có $x-y=\dfrac{5}{12}a$. Thay vào (2) ta được $\left(\dfrac{5}{12}a\right)^2+2a=1$.

$$\Leftrightarrow 25a^2+288a-144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{12}{25} \\ a=-12 \end{array}\right.$$

Với $a=\dfrac{12}{25}$ thì $x-y=\dfrac{5}{12}.\dfrac{12}{25}=\dfrac{1}{5}$.

Ta có $(x+y)^2=1+2a=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2$.

Từ $\begin{cases} x+y=\dfrac{7}{5} \\ x-y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x+y=-\dfrac{7}{5} \\ x-y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{4}{5} \end{cases}$.

Với $a=-12$ thì $(x+y)^2=1+2a=1-24=<0$ (loại).

Đáp số: Nghiệm (x,y) của hệ là $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right),\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

Ví dụ 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 & (1) \\ 2x^2-xy+3y^2=12 & (2) \end{cases}$.

Giải:

Nhân hai vế (1) với (4) rồi trừ đi (2) vế theo vế ta được

$4\left(x^2-xy+y^2\right)-\left(2x^2-xy+3y^2\right)=0 \Leftrightarrow 2x^2-3xy+y^2=0$.

Đặt $k=\dfrac{x}{y}$ thì $y=x$ ta được $2k^2-3k+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $k=1$ thay vào (1) ta được $x^2-x^2+x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Khi đó $(\mathrm{x};\mathrm{y})$ là $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

Với $k=\dfrac{1}{2}$ thay vào (1) ta được $x^2-2x^2+4x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Khi đó $(\mathrm{x};\mathrm{y})$ là $(1;2);(-1;-2)$.

Đáp số: Nghiệm $(\mathrm{x};\mathrm{y})$ là $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right);(1;2);(-1;-2)$.

Lưu ý: Trong hệ phương trình trên, mỗi phương trình đều có vế trái là các hạng tử bậc hai, vế phải là hằng số. Ta gọi hệ phương trình trê là hệ đẳng cấp bậc hai.

Để giải hệ phương trình đẳng cấp bậc hai, thường khử hằng số rồi chia hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$ và đặt ẩn phụ $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}=\mathrm{k}$. cũng có thể biến đổi (3) thành $(\mathrm{x}-\mathrm{y})(2\mathrm{x}-\mathrm{y})=0$.

4. Phương pháp dùng hằng đẳng thức:

Ví dụ 31. Giải hệ phương trình sau với x, y không âm $\begin{cases} x^2+xy(x+y)=3 & (1) \\ y^2+x+y-6xy=-3 & (2) \end{cases}$

Giải:

cộng (1) với (2) được $x^2+y^2+xy(x+y)+(x+y)-6xy=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+(x+y)(xy+1)=8xy$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+xy+1)=8xy$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+1)(y+1)=8xy. \quad (3)$

Do x, y không âm nên $x+y \ge 2\sqrt{xy}, x+1 \ge 2\sqrt{x}, y+1 \ge 2\sqrt{y}$

Nên $(x+y)(x+1)(y+1)$ $(x+y)(x+1)(y+1) \ge 8xy. \quad (4)$

Do (3) nên ở (4) phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là $x=y=1$.

Nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$.

III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN.

Ví dụ 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=2x-y \\ y^2=2y-z \\ z^2=2z-x. \end{cases}$

Giải

$$\begin{cases} x^2=2x-y \\ y^2=2y-z \\ z^2=2z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=1-y \\ (y-1)^2=1-z \\ (z-1)^2=1-x \end{cases}.$$

Đặt $1-x=a$; $1-y=b$,$1-z=c$, ta có

$$\begin{cases} a^2=b \\ b^2=c \\ c^2=a \end{cases} \text{ nên } a^8=b^4=c^2=a \text{, do đó } a^8-a=0 \Leftrightarrow a(a^7-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right..$$

Vậy $a=b=c=0$ hoặc $a=b=c=1$

Nghiệm $(x;y;z)$ là $(0;0;0)$, $(1;1;1)$.

Ví dụ 33. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)^2=4z-1 & (1) \\ (y+z)^2=4x-1 & (2) \\ (z+x)^2=4y-1 & (3) \end{cases}$$

Giải

Từ (1) suy ra $4z-1 \ge 0$ nên $z \ge \frac{1}{4}$. Tương tự, $x \ge \frac{1}{4}$ và $y \ge \frac{1}{4}$.

Do $x, y, z \ge \frac{1}{4}$ nên từ hệ đã cho ta có

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}$$

Cộng từng vế các phương trình, ta được

$$2x+2y+2z=\sqrt{4z-1}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}$$

$\Leftrightarrow\ 4x+4y+4z-2\sqrt{4z-1}-2\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4y-1}=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{4x-1}\right)^2+\left(1-\sqrt{4y-1}\right)^2+\left(1-\sqrt{4z-1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1}=\sqrt{4y-1}=\sqrt{4z-1}=1$

$\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{2}$

Nghiệm (x,y,z) là $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Ví dụ 34. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2=y\left(x^2+1\right) & (1)\\ 2y^2=z\left(y^2+1\right) & (2)\\ 2z^2=x\left(z^2+1\right) & (3)\end{cases}$$

Giải

Cách 1. Từ các phương trình đã cho ta thấy $x,y,z=0$. Nếu một trong ba số x,y,z bằng 0 thì hai số kia cũng bằng 0. Xét trường hợp x,y,z đều dương.

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2}=\dfrac{2}{y}\Leftrightarrow\ 1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{y}=0 \qquad (4)$

Tương tự $(2)\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2}{z}=0 \qquad (5)$

$(3)\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{2}{x}=0 \qquad (6)$

Từ $(4),(5),(6)$ suy ra $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{z}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{z}=0\Leftrightarrow\ x=y=z=1$

Thế vào hệ thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm (x,y,z) là $(0;0;0)$, $(1;1;1)$

Cách 2. Từ các phương trình đã cho ta thấy $x,y,z\ge 0$.

Nếu một trong ba bộ số x,y,z bằng 0 thì hai số kia bằng 0. Xết trường hợp x,y,z đều dương. Nhân $(1),(2),(3)$ theo từng vế ta được

$8x^2y^2z^2=xyz\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)=8xyz\ (4)$.

Ta lại có

$x^2+1\ge 2x>0$

$y^2+1\ge 2y>0$.

$z^2+1\ge 2z>0$

Nên $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\ge 8xyz \qquad (5)$.

Từ (4) và (5) suy ra $x=y=z=1$ (thỏa mãn hệ).

Nghiệm $(x;y;z)$ là $(0;0;0),(1;1;1)$.

Ví dụ 35: cho hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^3 = 3y^2 - 3y + 1 & (1) \\ y^3 = 3z^2 - 3z + 1 & (2) \\ z^3 = 3x^2 - 3x + 1 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) x, y, z đều dương.

b) $x = y = z = 1$.

Giải.

a) Từ (1) có $x^2 = 3y^2 - 3y + = 3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$.

Tương tự từ (2) và (3) suy ra $y > 0, z > 0$.

b) cộng $(1),(2),(3)$ theo vế ta được $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$ (4).

giả sử $x < 1$ thì $x^3 < 1 \Rightarrow 3y^2 - 3y + 1 < 1 \Rightarrow 3y(y-1) < 0$.

Do $y > 0$ nên $y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1$.

Do $y < 1 \Rightarrow y^3 < 1 \Rightarrow 3z^2 - 3z + 1 < 1 \Rightarrow 3y(y-1) < 0$.

Do $z > 0$ nên $z < 1$.

Do $x < 1, y < 1, z < 1$ nên (4) không xảy ra, loại.

Giả sử $x > 1$. Ta cũng suy ra $y > 1, z > 1$ nên (4) không xảy ra. Loại.

Vậy $x = 1$. Từ (1) suy ra $y = 1$. Từ (3) suy ra $z = 1$.

Do đó $x = y = z = 1$.

BÀI TẬP

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

34. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m + 1 \end{cases}$.

Tìm giá trị của m để nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình thỏa mãn $x - 2y$ có giá trị lớn nhất.

35. Một người mang một số tiền đi mua táo. Nếu quả táo giảm đi 2 nghìn đồng một quả tảo thì số táo mua tặng thêm được 6 quả. Nếu gia táo tăng thêm 2 nghìn đồng một quả thì số táo mua giảm đi 4 quả. Tính giá một quả táo.

Hệ phương trình bậc cao hai ẩn

36. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} xy - x - y = -1 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy + x - y = 7 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases}$

37. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x + 2y + 2xy = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 - 2x^2y + 3y = 0 \\ 2xy - y^2 = 3 \end{cases}$

38. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 - 3y = 2 \\ y^3 - 3x = 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy = 12 \end{cases}$.

39. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 24xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 8xy \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 6 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 16 \end{cases}$.

40. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} 2x + 2y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2 = y^3 + my \\ y^2 = x^3 + mx \end{cases}$.

41. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$.

b) $\begin{cases} xy(x+2)(y+2) = m \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) = m + 1 \end{cases}$.

42. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = m - 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 0,\ y < 0$.

43. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ y + z + yz = 9 \\ z + x + xz = 14 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2 + 4 = 4y \\ y^2 + 4 = 4z \\ z^2 + 4 = 4x \end{cases}$.

44. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=21 \\ 2x+xy+3y=17 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$.

45. Tìm các số dương x , y , z sao cho: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \end{cases}$.

46. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2=4y-1 \\ y^2=4z-1 \\ z^2=4x-1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^3=6y^2-12y+8 \\ y^3=6z^2-12z+8 \\ z^3=6t^2-12t+8 \\ t^3=6x^2-12x+8 \end{cases}$.

Chuyên đề 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA, PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Các bài toán trong chuyên đề này bao gồm các nội dung sau:

- Phương trình bậc ba một ẩn.
- Phương trình bậc bốn một ẩn.
- Phương trình dạng phân thức.

Các phương pháp thường dùng để giải các phương trình trên là:

- Phân tích đa thức thành nhân tử, trong đó chú ý đến việc phát hiện nghiệm của một đa thức để đưa về phương trình tích.
- Đặt ẩn phụ.
- Đưa phương trình về dạng $A^2=B^2$.

30 đề toán giải phương trình bậc ba, làm trong hai giờ. Và kết quả thật khó tin: Tac-ta-li-a đã thắng với tỉ số $30-0$, tức là ông đã làm hết cả 30 bài toán mà đối phương đưa ra, còn đối phương thì không giải được một bài toán nào của ông.

Sở dĩ Tac-ta-li-a đã giành chiến thắng tuyệt đối vì, rất may cho ông, chỉ 8 ngày trước khi diễn ra trận so tài, ông đã tìm ra cách giải phương trình bậc ba dạng $x^3+ax+b=0$ với a và b bất kì, trong khi các học trò của Fe-rô chỉ mới biết giải phương trình $x^3+ax=b$ với a và b là các số dương.

Lưu ý. Phương trình bậc ba nào cũng dễ dàng đưa về $y^3+my^2+ny+c=0$, sau đó bằng cách đặt $y=x-\frac{m}{3}$ đưa về dạng $x^3+ax+b=0$.

Chẳng hạn, với phương trình $y^3+6y^2+8y-315=0$, bằng cách đặt $y=x-2$ ta đưa được phương trình $x^3-4x-315=0$.

Bạn đọc muốn tìm hiểu thêm về vấn đề này, xem cuốn Nâng cao và phát triển Toán 9 tập hai trong bài đọc thêm Phương trình đại số bậc cao.

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA MỘT ẨN

Để giải phương trình bậc ba một ẩn, ta thường phân tích đa thức bậc ba thành tích của một nhân tử bậc nhất và một nhân tử bậc hai (nếu có thể).

Cần nhớ các cách phát hiện nghiệm của một đa thức:

1) Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 0 thì 1 là một nghiệm của đa thức.
2) Nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì -1 là một nghiệm của đa thức.
3) Nếu đa thức có các hệ số nguyên thì:

- Nghiệm nguyên của đa thức (nếu có) là ước của hệ số tự do.
- Nghiệm hữu tỉ của đa thức (nếu có) có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số bậc cao nhất (chẳng hạn đa thức $3x^3-x^2+x+2$ có nghiệm hữu tỉ là $\frac{-2}{3}$)

Ví dụ 36. Giải các phương trình:

a) $x^3-12x+16=0$ b) $x^3-12x+9$.

Giải

a) $x^3-12x+16=0 \Leftrightarrow x^3-8-12x+24=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)-12(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x-8\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

b) $x^3-12x+9=0 \Leftrightarrow x^3-27-12x+36=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+9\right)-12(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^2+3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$.

Ví dụ 37. Tìm các giá trị của a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow x^3-3x^2a+3ax^2-a^3-x^3+3x^2b-3xb^2+b^3=b^3-a^3$

$\Leftrightarrow (3b-3a)x^2+\left(3a^2-3b^2\right)x=0 \Leftrightarrow x(b-a)(x-b-a)=0$.

Nghiệm duy nhất của phương trình là $x=0$ với điều kiện $a\neq b$ và $a+b=0$.

Ví dụ 38. Giải phương trình với a, b là tham số $(a+b+x)^3-4\left(a^3+b^3+x^3\right)=12abx$ (1).

Hướng dẫn: Đặt $a+b=m$, $a-b=n$.

Giải

Ta có $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2=m^2-n^2$

$$a^3+b^3=(a+b)\left[(a-b)^2+ab\right]=m\left(n^2+\frac{m^2-n^2}{4}\right)=m.\frac{m^2+3n^2}{4}=\frac{m^3+3mn^2}{4}.$$

$(1)\Leftrightarrow(m+x)^3-4\left(a^3+b^3\right)-4x^3-12abx=0$

$\Leftrightarrow m^3+3m^2x+3mx^2+x^3-m^3-3mn^2-4x^3-3m^2x+3n^2x=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-m)-n^2(x-m)=0\Leftrightarrow(x-m)(x+n)(x-n)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-n\\x=n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a+b\\x=b-a\\x=a-b\end{array}\right..$$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN MỘT ẨN

Ngoài cách giải đưa về phương trình trùng phương, cách phân tích đa thức thành nhân tử để đưa về phương trình tích, cần chú ý đến các phương pháp sau:

1. Phương pháp 1. Đặt ẩn phụ để đưa về phương trình trùng phương

Dạng 1a.

Với phương trình $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ đặt ẩn phụ $y=x+\frac{a+b}{2}$.

Dạng 1b.

Với phương trình $x^4+4x^3+ax^2+bx+c=0$ trong đó $b=2a-8$ đặt ẩn phụ $y=x+1$.

Dạng 1c.

Với phương trình $x^4-4x^3+ax^2+bx+c=0$ trong đó $b=8-2a$ đặt ẩn phụ $y=x-1$.

Ví dụ 39. Giải phương trình $x^4+4x^3+3x^2-2x-12=0$ (1)

Giải

Đặt $y=x+1$ thì $x=y-1$. Ta có

$(1)\Leftrightarrow(y-1)^4+4(y-1)^3+3(y-1)^2-2(y-1)-12=0$

Rút gọn được $y^4-3y^2-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y^2=5\\y^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{5}$.

Đáp số: $x=-1\pm\sqrt{5}$.

2. Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ là một đa thức bậc hai

Dạng 2a.

Với phương trình $\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+d\right)=m$ ta đặt $y=ax^2+bx$ (hoặc $y=ax^2+bx+\frac{c+d}{2}$).

Dạng 2b (*trường hợp đặc biệt của dạng 2a*)

Với phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ trong đó $a+d=b+c$, ta tính $(x+a)(x+d)$ và $(x+b)(x+c)$ rồi đưa về dạng 2a.

Ví dụ 40. Giải phương trình: $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=7$.

Giải

Nhân hai vế của phương trình với 8 ta được $(8x+7)^2(8x+6)(8x+8)=56$.

Đặt $8x+7=y$ ta có $y^2(y-1)(y+1)=56 \Leftrightarrow y^4-y^2-56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=8 \\ y^2=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$.

Do đó $x=\dfrac{-7\pm 2\sqrt{2}}{8}$.

3. Phương pháp 3. Đặt ẩn phụ sau khi chia hai vế của phương trình cho x^2.

Dạng 3a.

Với phương trình đối xứng $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ ta chia hai vế cho x^2 rồi đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Dạng 3b.

Với phương trình $ax^4-bx^3+cx^2-bx+a=0$ ta chia hai vế cho x^2 rồi đặt $y=x-\dfrac{1}{x}$.

Dạng 3c.

Với phương trình đối xứng $x^4+ax^3+bx^2+akx+k^2=0$ ta chia hai vế cho x^2 rồi đặt $y=x+\dfrac{k}{x}$.

Dạng 3d.

Với phương trình $\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+dx+c\right)=mx^2$ ta chia hai vế cho x^2, từ đó xuất hiện cách đặt ẩn phụ.

Dạng 3e (trường hợp đặc biệt của dạng 3d)

Với phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$, trong đó $ad=bc$, ta tính $(x+a)(x+d)$ và $(x+b)(x+c)$ rồi đưa về dạng 3d.

Ví dụ 41. Giải phương trình $x^4+x^3-6x^2-2x+4=0$ (1)

Giải

Do $x\neq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x^2+x-6-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-6=0$ (2)

Đặt $x-\dfrac{2}{x}=y$ thì $x^2+\dfrac{4}{x^2}=y^2+4$. Ta có

$(2)\Leftrightarrow \left(y^2+4\right)+y-6=0 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$

Với $y=1$ ta có $x-\dfrac{2}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với $y=-2$, ta có $x-\dfrac{2}{x}=-2 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$.

Đáp số: Bốn nghiệm $-1;\ 2;\ -1\pm\sqrt{3}$.

Ví dụ 42. Giải phương trình $\left(2x^2-7x+6\right)\left(2x^2+x-2\right)=9(x-1)^2$ (1)

Giải

Đặt $x-1=y$ thì $x=y+1$. Thay vào (1) rồi rút gọn được

$\left(2y^2-3y+1\right)\left(2y^2+5y+1\right)=9y^2$.

Chia hai vế cho $y^2\neq 0$ được

$\frac{2y^2-3y+1}{y}.\frac{2y^2+5y+1}{y}=9\Leftrightarrow\left(2y-3+\frac{1}{y}\right)\left(2y+5+\frac{1}{y}\right)=9$.

Đặt $2y+\frac{1}{y}+1=a$ ta có $(a-4)(a+4)=9\Leftrightarrow a=\pm 5$.

Với $a=5$ thì $2y+\frac{1}{y}+1=5\Leftrightarrow 2y^2-4y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $x=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$.

Với $a=-5$ thì $2y+\frac{1}{y}+1=-5\Leftrightarrow 2y^2+6y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Do đó $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$.

Đáp số: Phương trình có bốn nghiệm $\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$

4. ***Phương pháp 4. Thêm cùng một biểu thức vào hai vế để đưa phương trình về dạng*** $A^2=B^2$.

Ví dụ 43. Giải phương trình $x^4=2x^2-8x+3$

Giải

Cộng $2x^2+1$ vào hai vế được $x^4+2x^2+1=4x^2-8x+4\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=(2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=2x-2\\x^2+1=2-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-2x+3=0 & (1)\\x^2+2x-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

(1) Vô nghiệm; (2) có nghiệm $-1\pm\sqrt{2}$.

Đáp số: Hai nghiệm $-1\pm\sqrt{2}$

III. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Một số cách thường dùng khi giải phương trình dạng phân thức:

- Nhân hai vế với mẫu thức chung rồi đưa về phương trình tích.
- Chia cả tử và mẫu của phân thức cho x rồi đặt ẩn phụ.
- Đưa phương trình về dạng $A^2=B^2$.
- Đặt hai ẩn phụ rồi giải hệ phương trình.

Ví dụ 44. Giải phương trình $\frac{x^2}{(x+1)^2}=3-4x$ (1)

Giải

Cách 1. ĐKXĐ: $x\neq 1$. Với điều kiện đó thì

$(1) \Leftrightarrow x^2 = (x+1)^2(3-4x) \Leftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(2x+3) - (2x+3) = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(2x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Ba nghiệm: $-\dfrac{3}{2}$; $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2. $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow \left(x + 1 - \dfrac{x}{x+1}\right)^2 = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 - \dfrac{x}{x+1} = x - 2 \\ x + 1 - \dfrac{x}{x+1} = 2 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 45. Giải phương trình:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 3x - 2} - \frac{x^2 - 4x - 2}{x^2 - 5x - 2} = 2. \qquad (1)$$

Giải:

Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho $x \neq 0$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x - 2 - \dfrac{2}{x}}{x - 3 - \dfrac{2}{x}} - \dfrac{x - 4 - \dfrac{2}{x}}{x^2 - 5 - \dfrac{2}{x}} = 2.$

Đặt $x - \dfrac{2}{x} = y$, ta có $\dfrac{y-2}{y-3} - \dfrac{y-4}{y-5} = 2. \qquad (2)$

Với $y \neq 3, y \neq 5$ thì:

$(2) \Leftrightarrow (y-2)(y-5) - (y-3)(y-4) = 2(y-3)(y-5)$

$\Leftrightarrow (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, thỏa mãn.

Từ $x - \dfrac{2}{x} = 4$, ta được $x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Đáp số: Hai nghiệm: $2 \pm \sqrt{6}$.

Ví dụ 46. Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{2}.$$

Giải:

ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq 4$.

Đặt: $4 - x = y$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $xy = a \neq 0$, ta có:

$$\frac{(x+y)^2 - 2a}{a^2} = \frac{1}{2} \text{ nên } 32 - 4a = a^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -8. \end{array}\right.$$

Với xy = 4 thì x, y là nghiệm của pương trình

$X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm 2\sqrt{3}.$

Đáp số: Ba nghiệm: $2; 2 \pm 2\sqrt{3}.$

Ví dụ 47. Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{5}{4}. \qquad (1)$$

Giải:

ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 2.\frac{1}{x}.\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + 2.\frac{1}{x}.\frac{1}{x+1} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + 2.\frac{1}{x(x+1)} - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]^2 + 2.\frac{1}{x(x+1)} - \frac{5}{4} = 0.$$

Đặt $\dfrac{1}{x(x+1)} = y$ ta có $y^2 + 2y - \dfrac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Với $y = \dfrac{1}{2}$ thì $x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $y = -\dfrac{5}{2}$ thì $x(x+1) = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 2 = 0$, vô ngiệm

Đáp số: Hai nghiệm: 1 và -2.

BÀI TẬP

Phương trình bậc ba

47. Giải các phương trình:

a) $x^3 - 39x + 70 = 0;$

b) $x^3 - 9x + 28 = 0;$

c) $x^3 - x - \sqrt{2} = 0;$

d) $x^3-3x^2+3x+7=0;$

e) $x^3+6x^2-12x+8=0;$

48. Giải các phương trình:

$x^3-3abx+\left(a^3+b^3\right)=0$ với a, b là các tham số, $a\neq b.$

Phương trình bậc bốn

49. Giải các phương trình:

a) $x^4-4x^3-3x^2+14x+6=0;$

b) $(x+1)(2x+1)(3x+1)(6x-1)=120;$

c) $x^4-x^3-14x^2-3x+9=0;$

d) $\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+9x+18\right)=168x^2.$

50. Giải các phương trình:

a) $\left(x^2-x+1\right)^4+4x^4=5x^2\left(x^2-x+1\right)^2;$

b) $x^2+(x+1)^3+(x+2)^4=2;$

c) $x^4-2x^2-64x-255=0;$

d) $x^4+(x-2)\left(x^2-2x+4\right)=0.$

51. Cho phuong trình $2x^4-4x^2+1=0.$ Không tìm ngiệm cụ thể, hãy:

a) Chứng minh rằng phương trình có bón nghiệm phân biệt.

b) Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình.

Phương trình dạng phân thức

52. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x}{x^2-3x+1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1};$

b) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16;$

c) $\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x^2-x+2\right)^2}=\dfrac{5}{4};$

d) $\dfrac{2x+1}{x^4+1}=x^3-1.$

53. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3x^2-16x+8;$

b) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{8}{(2x+1)^2}.$

Chuyên đề 5

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Ta gọi phương trình chứa căn thức bậc hai là phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai. Đây là dạng toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi vì nó đòi hỏi sự thành thạo và sáng tạo của học sinh.

Chuyên đề giới thiệu những phương pháp thường dùng để giải phương trình chứa căn thức bậc hai như:

- Bình phương hai vế của phương trình.
- Đưa phương trình về dạng $A^2 = B^2$.
- Đưa phương trình về dạng $A^2 + B^2 = 0$.
- Đặt nhân tử chung.
- Dùng biểu thức liên hợp.
- Dùng bất đẳng thức.

Bài toán cổ

BÀI TOÁN CỦA BÁT-XCA-RA

Tìm các cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng số đo cạnh huyền và số đo diện tích biểu thị bởi cùng một số.

Giải

Gọi x và y là độ dài các cạnh góc vuông thì độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{x^2+y^2}$ và diện tích bằng $\frac{xy}{2}$.ta cs phương trình:

$$\frac{xy}{2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow xy = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 = 4\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow x^2\left(y^2-4\right) = 4y^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4y^2}{y^2-4}.$$

Bài toán có vô số đáp số là $\left(\frac{2y}{\sqrt{y^2-4}}; y\right)$ với y tùy ý lớn hơn 2.

Chẳng hạn với y = 6, ta có: $x = 2\sqrt{3}$.

I. BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Bình phương hai vế của phương trình giúp khử dấu căn bậc hai. Phép bình phương hai vế của phương trình là tương đương nếu có thêm điều kiện hai vế cùng không âm (hoặc cùng không dương).

Ví dụ 48. Giải phương trình:

$$x^2 - x - 2 = 2\sqrt{16x+1} \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge -\frac{1}{16}$. Thêm điều kiện $x^2 - x - 2 \ge 0$ (2) thì:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2\right)^2 = 4(16x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 60x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-5)\left(x^2 + 3x + 12\right) = 0.$$

- x = 0 loại vì trái với (2).
- x = 5 thỏa mãn (1) và (2).
- $x^2 + 3x + 12 = 0$ vô nghiệm.

Đáp số: Phương trình có một nghiệm x = 5.

Lưu ý: Cách giải khác, xem ví dụ 53.

Ví dụ 49. Giải phương trình:

$$x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4} \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge -\frac{4}{3}$. Thêm điều kiện $x^2 + 5x + 6 \ge 0$ (2) thì:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2 + 5x + 6\right)^2 = 4(3x+4)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^2 + 8x + 20\right) = 0.$$

- x = -1 thỏa mãn (1) và (2).
- $x^2 + 8x + 20 = 0$ vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm x = -1.

Lưu ý: Các cách giải khác, xem các ví dụ 55, 65, 74.

II. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG $A^2 = B^2$ (tức là $A^2 - B^2 = 0$)

Ví dụ 50. Giải phương trình:

$$4x^2 + 8x = \sqrt{2x+6} \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge -3$. Cộng $2x + 6\frac{1}{4}$ vào hai vế thì

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 10x + 6\frac{1}{4} = 2x + 6 + \sqrt{2x+6} + \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2x+6}\right)^2$$

Xét $2x + 5 = \frac{1}{2} + \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 2x + 2 = \sqrt{2x+6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Xét $2x + 5 = -\frac{1}{2} - \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 2x + 3 = -\sqrt{2x+6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1,5 \\ 4x^2 + 10x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Hai nghiệm: $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$

Ví dụ 51. Giải các phương trình:

a) $x^2 - 10x - 12 = 4\sqrt{2x+3}$.

b) $2x^2 + x - 3 = 2\sqrt{2x+3}$

Giải

a) ĐKXĐ $x \ge \dfrac{-3}{2}$, Cộng $8x+13$ vào hai vế được

$x^2 - 2x + 1 = 4(2x+3) + 4\sqrt{2x+3} + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(1 + 2\sqrt{2x+3}\right)^2$

Xét $x - 1 = 1 + 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x - 2 = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 12x - 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 6 + 2\sqrt{11}$. thoả mãn ĐKXĐ .

Xét $x - 1 = -1 - 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 8x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{7}$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Hai nghiệm: $6 + 2\sqrt{11}; 4 - 2\sqrt{7}$.

b) ĐKXĐ $x \ge \dfrac{-3}{2}$. Nhân hai vế cuat phương trình với 2 được

$4x^2 + 2x - 6 = 4\sqrt{2x+3}$

Cộng $2x+7$ vào hai vế, ta có $4x^2 + 4x + 1 = 2x + 3 + 4\sqrt{2x+3} + 4$

$(2x+1)^2 = \left(2 + \sqrt{2x+3}\right)^2$

Xét $2x + 1 = 2 + \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{2x+3}$

$\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Xét $2x + 1 = -2 - \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 2x + 3 = -\sqrt{2x+3}$

$\begin{cases} x \le -\dfrac{3}{2} \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$, thỏa mãn ĐKXĐ..

Đáp số: hai nghiệm: $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$; $-\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 52. Giải phương trình.

$4x+1-x^2=2\sqrt{2x+1} \qquad (1)$

Giải

ĐKXĐ: $x \geq -\frac{1}{2}$

$(1) \Leftrightarrow x^2-4x-1=-2\sqrt{2x+1}$

Cộng $2x+2$ vào hai vế được $x^2-2x+1=2x+1-2\sqrt{2x+1}+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=\left(1-\sqrt{2x+1}\right)^2$

Xét $x-1=1-\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x-2=-\sqrt{2x+1}$

$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-6x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3-\sqrt{6}$, thỏa mãn ĐKXĐ

Xét $x-1=-1+\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Hai nghiệm: $3-\sqrt{6};1+\sqrt{2}$.

Ví dụ 53. Giải ví dụ 48 bằng cách đưa về dạng $A^2=B^2$

$$4x^2-4x-8=8\sqrt{16x+1}.$$

Giải

ĐKXĐ: $x \geq -\frac{1}{16}$. Nhân hai vế của phương trình với 4 được

$4x^2-4x-8=8\sqrt{16x+1}$.

Cộng $16x+17$ vào hai vế được $4x^2+12x+9=16x+1+8\sqrt{16x+1}+16$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2=\left(4+\sqrt{16x+1}\right)^2$

Xét $2x+3=4+\sqrt{16x+1} \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{16x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-20x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5,$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Xét $2x+3=-4-\sqrt{16x+1} \Leftrightarrow \sqrt{16x+1}=-2x-7$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3,5 \\ x^2+3x+12=0 \end{cases}$ Vô nghiệm.

Đáp án: một nghiệm $x=5$.

Ví dụ 54 Giải phương trình.

$$2x^2-3x+2=x\sqrt{3x-2}.$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge \frac{2}{3}$.

$2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 2x^2 = 3x - 2 + x\sqrt{3x-2}$.

Do $x \ge \frac{2}{3}$ nên $\frac{3x}{2} = \frac{x}{2} + \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ

Đáp số: Hai nghiệm: 1 và 2.

Lưu ý. Cách giải khác, xem Ví dụ 59.

III. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VỀ DẠNG $A^2 + B^2 = 0$

Ví dụ 55. Giải ví dụ 49 bằng cách đưa về dạng $A^2 + B^2 = 0$.

$$x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4}$$

Giải

$x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(1 - \sqrt{3x+4}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \sqrt{3x+4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Đáp số: Một nghiệm $x = -1$.

IV. ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

Ví dụ 56. Giải phương trình

$\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2x^2 + 4x} = 2x.$ $\quad (1)$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2x^2 + 4x} = 2x.$

Ta thấy $x = 0$ thỏa mãn phương trình (1).

Xét $x \ne 0$. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$ được

$\sqrt{x-2} + \sqrt{2(x+2)} = 2\sqrt{x}$.

Bình phương hai vế, ta được

$3x + 2 + 2\sqrt{2(x+2)(x-2)} = 4x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(x+2)(x-2)} = x - 2.$ $\quad (2)$

Ta thấy $x = 2$ thỏa mãn phương trình (2).

Xét $x \ne 2$. Chia hai vế của (2) cho $\sqrt{x-2}$ được

$2\sqrt{2x+4}=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow x=-\frac{18}{7}.$ không thỏa mãn $x\ge 0.$

Đáp số: hai nghiệm : 0 và 2.

V. ĐẶT ẨN PHỤ

Ví dụ 57: Giải phương trình

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=2$$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge -\frac{1}{4}.$

Đặt $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=y\ge 0$ thì $x=y^2-\frac{1}{4}.$ Ta có

$y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}+y}=2\Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=2$

$\Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+y+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 4y^2+4y-7=0\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{2}$

Do $y\ge 0$ ta chọn $y=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}.$ Từ đó $x=2-\sqrt{2}.$

Đáp số: Một nghiệm $x=2-\sqrt{2}.$

Ví dụ 58. Giải phương trình.

$5x^2-2x+1=(4x-1)\sqrt{x^2+1}\qquad (1)$

Giải

Đặt $\sqrt{x^2+1}=a>0$ thì $a^2=x^2+1.$ Ta có

$(1)\Leftrightarrow (x^2+1)-(4x-1)\sqrt{x^2+1}+4x^2-2x$

$\Leftrightarrow a^2-(4x-1)a+2x(2x-1)=0.\qquad (2)$

Xét phương trình (2) với ẩn a, tích hai nghiệm bằng $2x(2x-1)$, tổng hai nghiệm bằng $4x-1$ nên $a=2x$ hoặc $a=2x-1.$

Với $a=2x$ thì $\sqrt{x^2+1}=2x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 3x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Với $a=2x-1$ thì $\sqrt{x^2+1}=2x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x(3x-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$

Đáp số: Hai nghiệm: $\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4}{3}$.

Ví dụ 59. Giải ví dụ 54 bằng phương pháp đặt ẩn phụ:

$2x^2-3x+2=x\sqrt{3x-2}.$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge\frac{2}{3}.$

Đặt $\sqrt{3x-2}=a\ge 0$ thì $3x-2=a^2$. Ta có

$2x^2-(3x-2)=x\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow a^2+xa-2x^2=0 \qquad (1)$

Xét phương trình (1) với ẩn a, tích hai nghiệm bằng -2x.x, tổng hai nghiệm bằng –x nên a=x hoặc a =- 2x.

Với $\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4}{3}$ thì $\sqrt{3x-2}=x$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$ Thỏa mãn ĐKXĐ.

Xét $a=-2x$, do $x\ge\frac{2}{3}$ nên $a<0$, loại.

Đáp số: Hai nghiệm: 1 và 2.

Ví dụ 60. Giải phương trình

$$10\sqrt{x^3+1}=3\left(x^2+2\right) \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge -1.$

Đặt $\sqrt{x+1}=a\ge 0,\sqrt{x^2-x+1}=b>0$, ta có

$a^2+b^2=x+1+x^2-x+1=x^2+2.$ Khi đó

$(1)\Leftrightarrow 10ab=3(a^2+b^2)\Leftrightarrow(a-3b)(3a-b)=0$

Với $a=3b$ thì $\sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0,$ vô nghiệm.

Với $3a=b$ thì $3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x^2-10x-8=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: hai nghiệm: $5\pm\sqrt{33}$

Ví dụ 61: Giải phương trình sau.

$$(2x-1)\sqrt{10-4x^2}=5-2x. \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x^2\le\frac{5}{4}.$

Đặt $2x-1=a,\sqrt{10-4x^2}=b\ge 0$ thì

$a^2+b^2=4x^2-4x+1+10-4x^2=11-4x \qquad (2)$

Ta có $ab=5-2x. \qquad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $a^2+b^2-2ab=11-4x-2\left(5-2x\right)=1$

$\Rightarrow \left(a-b\right)^2=1\Rightarrow a-b=\pm 1.$

Với $a-b=1$ thì $\quad 2x-1-\sqrt{10-4x^2}=1$

$\Leftrightarrow 2x-2=\sqrt{10-4x^2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 4x^2-4x-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ Thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $a-b=-1$ thì $\quad 2x-1-\sqrt{10-4x^2}=-1$

$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{10-4x^2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2-5=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}}{2},$

Đáp số: Hai nghiệm: $\dfrac{3}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 62: Giải phương trình.

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}=2x-4.$$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge \dfrac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=a\ge 0,\sqrt{x+1}=b\ge 0,$ ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2x-4 \\ a^2-b^2=x-2 \end{cases}$

Suy ra $a-b=2\left(a^2-b^2\right)\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(2a+2b-1\right)=0.$

Với $a=b$ thì $2x-1=x+1\Leftrightarrow x=2$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $2a+2b=1$ thì $2\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+1}=1.$

Phương trình vô nghiệm vì với $x\ge \dfrac{1}{2}$ thì $2\sqrt{2x-1}\ge 0$ và $2\sqrt{x+1}>1,$ vế trái lớn hơn 1

Đáp số: một nghiệm x=2.

Lưu ý: Cách giải khác, xem ví dụ 66.

Ví dụ 63. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-3x+10}+\sqrt{2x^2-5x+4}=x+3.$$

Giải

ĐKXĐ: $\Leftrightarrow 2x^2-3x+10\ge 0, 2x^2-5x+4\ge 0.$

Đặt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+10}=a\ge 0,\ \sqrt{2x^2-5x+4}=b\ge 0.$

Ta có $\begin{cases} a+b=x+3 \\ a^2-b^2=2x+6 \end{cases}$

Suy ra $a^2-b^2=2\left(a+b\right)\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-b-2\right)=0$

Với $a+b=0$ thì $a=b=0$ và $x=-3$, không thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $a-b=2$ thì $\sqrt{2x^2-3x+10}=2+\sqrt{2x^2-5x+4}$.

Bình phương hai vế rồi rút gọn được

$$2\sqrt{2x^2-5x+4}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 7x^2-22x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{15}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{15}{7} \end{array}\right.$$

Đáp số: Hai nghiệm: 1 và $\dfrac{15}{7}$.

Lưu ý: Cách giải khác, xem ví dụ 67.

Ví dụ 64. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{5}{12}.$$

Giải

ĐKXĐ: $x^2<1, x\ne 0$.

Đặt $\sqrt{1-x^2}=y>0$ thì $1-x^2=y^2$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên với $y>0$ ta được $x=\dfrac{4}{5}$ (xem ví dụ 29).

Đáp số: Một nghiệm $x=\dfrac{4}{5}$.

VI. DÙNG BIỂU THỨC LIÊN HỢP

Phương pháp dùng biểu thức liên hợp còn được gọi là phương pháp khử căn thức ở tử, thường dùng hơn cả là

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \qquad (1),$$

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} \qquad (2)$$

Trong các công thức (1) và (2), khi nhân và chia vế trái với biểu thức liên hợp của nó, ta được vế phải. Mục đích của việc khử căn thức ở tử nhằm làm xuất hiện nhân tử chung.

Ví dụ 65. Giải ví dụ 49 bằng cách dùng biểu thức liên hợp

$$x^2+5x+6=2\sqrt{3x+4} \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge -\frac{4}{3}$. Với nhận xét -1 là một nghiệm, ta biến đổi

$(1) \Leftrightarrow (x+1)(x+4)+2 = 2\sqrt{3x+4}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 2\left(\sqrt{3x+4}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = \frac{2(3x+4-1)}{\sqrt{3x+4}+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = \frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1}$

Rõ ràng $x=-1$ thỏa mãn phương trình.

Với $x \ne -1$ ta có $x+4 = \frac{6}{1+\sqrt{3x+4}}$ (2)

Với $x > -1$ thì (2) có vế trái lớn hơn 3, vế phải nhỏ hơn 3,vô nghiệm.

Với $-\frac{4}{3} \le x < -1$ thì (2) có vế trái nhỏ hơn 3, vế phải lớn hơn 3,vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=-1$.

Lưu ý. Cách giải khác xem ví dụ 74.

Ví dụ 66. Giải ví dụ 62 bằng cách dùng biểu thức liên hợp

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1} = 2x-4 \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $x \ge \frac{1}{2}$. Với nhận xét 2 là một nghiệm của (1), ta nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp được

$\frac{(2x-1)-(x+1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}} = 2(x-2) \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}} = 2(x-2)$

$x=2$ thỏa mãn (1)

Với $x \ne 2$ ta có $\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}} = 2$ (2)

Do $x \ge \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{x+1} > 1$. Phương trình (2) có vế trái nhỏ hơn 1, vế phải bằng 2 nên vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=2$.

Ví dụ 67. Giải ví dụ 63 bằng cách dùng biểu thức liên hợp

$$\sqrt{2x^2-3x+10}+\sqrt{2x^2-5x+4} = x+3 \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $2x^2-3x+10 \ge 0, 2x^2-5x+4 \ge 0$. Nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp được

$\frac{\left(2x^2-3x+10\right)-\left(2x^2-5x+4\right)}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}} = x+3$ (điều kiện $x \ne -3$)

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+3)}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}}=x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}}=1 \quad (\text{vì } x+3\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+10}=2+\sqrt{2x^2-5x+4}$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn được

$$2\sqrt{2x^2-5x+4}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 7x^2-22x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{15}{7} \end{array}\right.$$

Đáp số: Hai nghiệm: 1 và $\frac{15}{7}$.

Lưu ý. Khi nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp của vế trái, ta nhân và chia với $\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}$, phải có điều kiện khác 0, tức là $2x+6\neq 0$ hay $x+3\neq 0$.

Ví dụ 68. Giải phương trình

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=x^2-6x+9 \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $-2\leq x\leq 3$. Với nhận xét 2 là một nghiệm của (1), ta biến đổi

$(1)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(1-\sqrt{3-x}\right)=x^2-6x+8$ (điều kiện $x\neq -3$)

Nhân và chia biểu thức trong dấu ngoặc với biểu thức liên hợp ta được

$$\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{1-(3-x)}{1+\sqrt{3-x}}=(x-2)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{3-x}}+4-x\right)=0$$

Do $-2\leq x\leq 3$ nên $4-x>0$, do đó biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai dương.

Vậy $x-2=0\Leftrightarrow x=2$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Một nghiệm: $x=2$.

Ví dụ 69. Giải phương trình

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3} \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $x\geq 1$.

Nhân và chia biểu thức trong dấu ngoặc với biểu thức liên hợp ta được

$$\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{(x+8)-(x-3)}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{5}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}+5\sqrt{x-1}=\sqrt{x+8}+\sqrt{x-3} \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) theo vế được

$$6\sqrt{x}+4\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+8}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+8} \quad (3)$$

Do $x \ge 1$ nên $\sqrt{x+8} \le \sqrt{x+8x} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$,

Để xảy ra (3) thì $\begin{cases} 8 = 8x \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$, thỏa mãn (1).

Đáp số: Một nghiệm: $x = 1$.

Ví dụ 70. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right) = 2x \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $-1 \le x \le 1$. Nhân và chia $\sqrt{1+x}-1$ với biểu thức liên hợp

$$\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}\left(\sqrt{1-x}+1\right) = 2x \Leftrightarrow \frac{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1} = 2x$$

Hiển nhiên $x = 0$ thỏa mãn (1).

Với $x \ne 0$ ta có

$$\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = 2$$

Đặt $\sqrt{1+x} = a \ge 0, \sqrt{1-x} = b \ge 0$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{b+1}{a+1} = 2 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 (l) \\ a = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Với $a = \dfrac{1}{5}$ thì $1 + x = \dfrac{1}{25}$ nên $x = \dfrac{-24}{25}$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Hai nghiệm: 0 và $\dfrac{-24}{25}$.

Ví dụ 71. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-3} = \sqrt{2x^2-x-2} - \sqrt{2x^2+1} \qquad \textbf{(1)}$$

Giải

ĐKXĐ: $x^2 + x \ge 0; x^2 - 3 \ge 0; 2x^2 - x - 2 \ge 0$.

Nhân và chia mỗi vế với biểu thức liên hợp được

$$\frac{\left(x^2+x\right)-\left(x^2-3\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-3}} = \frac{\left(2x^2-x-2\right)-\left(2x^2+1\right)}{\sqrt{2x^2-x-2}+\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2-x-2}+\sqrt{2x^2+1}}\right) = 0$$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai dương nên $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Một nghiệm: $x = -3$.

Lưu ý: Phương trình (1) có dạng $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{C} - \sqrt{D}$, trong đó $A - B = D - C$.

VII. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 72: Giải phương trình

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = 6x - 7 - x^2. \qquad (1)$$

Giải:

ĐKXĐ: $3 \le x \le 7$.

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải là B.

Ta có $A^2 = \left(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}\right)^2 = 4+2\sqrt{(x-3)(7-x)} \ge 4$ nên $A \ge 2$.

Mặt khác, $B = 2-(x-3)^2 \le 2$.

Vậy phải có $A = B = 2$. Xảy ra khi $x = 3$.

Đáp số: Một nghiệm $x = 3$.

Ví dụ 73. Giải phương trình

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} = x^2-8x+18. \qquad (1)$$

Giải:

ĐKXĐ: $3 \le x \le 5$.

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải là B.

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$, ta có

$A^2 \le 2(x-3+5-x) = 4$ nên $A \le 2$.

Mặt khác, $B = (x-4)^2+2 \ge 2$.

Vậy phải có $A = B = 2$. Xảy ra khi $x = 4$.

Đáp số: Một nghiệm $x = 4$.

Ví dụ 74. Giải *Ví dụ 49* bằng cách dùng bất đẳng thức:

$$x^2+5x = 6 = 2\sqrt{3x+4}. \qquad (1)$$

Giải.

ĐKXĐ: $x \ge \dfrac{-4}{3}$.

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải là B.

Ta có $B = 2\sqrt{3x+4} = 2.\sqrt{1.(3x-4)} \le 1+3x+4 = 3x+5$;

$A = x^2+5x+6 = (x+1)^2+3x+5 \ge 3x+5$.

Phải có $A = B = 3x+5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+4=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Một nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 75. Giải phương trình

$$3\sqrt{x+1}+3\sqrt{x-1} = 4x+1. \qquad (1)$$

Giải.

Cách 1. (dùng bất đẳng thức).

ĐKXĐ: $x \ge 1$.

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B. Ta có

$A = 3\sqrt{x+1}+3\sqrt{x-1}$

$= 2\sqrt{(x+1).\dfrac{9}{4}}++3.2\sqrt{(x-1).\dfrac{1}{4}} \le \left(x+1+\dfrac{9}{4}\right)+3\left(x-1+\dfrac{1}{4}\right) = 4x+1 = B$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\dfrac{9}{4} \\ x-1=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4},$$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Đáp số: Một nghiệm $x=\frac{5}{4}$.

Cách 2. (dùng biểu thức liên hợp)

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}-\frac{9}{2}+3\sqrt{x-1}-\frac{3}{2}=4x-5$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)+3\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)=4x-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x+1-\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x+1}+\frac{3}{2}}+\frac{3\left(x-1-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}}=4x-5$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x+1}+\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}}\right)=4\left(x-\frac{5}{4}\right)$$

$x=\frac{5}{4}$ thỏa mãn (1).

Với $x \neq \frac{5}{4}$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}}=4$ (2)

Gọi vế trái của (2) là A. Phương trình (2) vô nghiệm vì:

-Nếu $x>\frac{5}{4}$ thì $A<\frac{3}{3}+\frac{3}{1}=4$.

-Nếu $x<\frac{5}{4}$ thì $A>\frac{3}{3}+\frac{3}{1}=4$.

Đáp số: Một nghiệm $x=\frac{5}{4}$

Cách 3. (đưa về dạng $A^2+B^2=0$)

Đặt $\sqrt{x+1}=a, \sqrt{x-1}=b$ thì $a^2+b^2=2x$ và $a^2-b^2=2$.

Ta có $3a+3b=2\left(a^2+b^2\right)+1$

$$\Leftrightarrow 2a^2-3a+2b^2-3b+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)+3\left(b^2-b+\frac{1}{4}\right)+a^2-b^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}.$$

Đáp số: Một nghiệm $x = \dfrac{5}{4}$.

Ví dụ 76. Giải phương trình

$$(x-3)(x+1) - 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3. \qquad (1)$$

Giải.

ĐKXĐ: $x \le -1$ hoặc $x > 3$.

- Xét $x > 3$. Khi đó $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$.

  Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)} = y\,(y \ge 0)$ thì

  $(1) \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

  Với $y = 1$ thì $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5},\ (\text{L}) \end{array}\right.$

  Với $y = 3$ thì $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{13} \\ x = 1 - \sqrt{13},\ (\text{L}) \end{array}\right.$

- Xét $x \le -1$. Khi đó $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -\sqrt{(x-3)(x+1)}$.

  Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)} = y\,(y \ge 0)$ thì

  $(1) \Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1, (\text{L}) \\ x = -3, (\text{L}) \end{array}\right.$

  Đáp số: Hai nghiệm: $1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{13}$.

Ví dụ 77. Giải phương trình.

$$\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-7)} = \sqrt{x(x-23)}. \qquad (1)$$

Giải.

ĐKXĐ: $x \ge 23$ hoặc $x \le 0$.

Xét từng khoảng giá trị của x.

-Xét $x \ge 23$, chia hai vế của (1) cho $\sqrt{x}$ được

$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x-23}$

$\Leftrightarrow x + 14 + 2\sqrt{(x-2)(x-7)} = 0$, vô nghiệm vì $x \ge 23$.

-Với $x = 0$, thỏa mãn (1).

-Với $x < 0$, chia hai vế của (1) cho $\sqrt{-x}$ được

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} = \sqrt{23-x}$

$$\Leftrightarrow 3x^2-64x-140=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{70}{3}(L) \end{array}\right..$$

Đáp số: Hai nghiệm 0 và -2.

Bài tập

Giải các phương trình (từ bài 54 đến 66)

54. a) $x^2+\sqrt{x+7}=7;$

b) $x^2+\sqrt{x+1}=1;$

c) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36;$

d) $x^2-6x-2=2\sqrt{2x+5}$;

e) $3\sqrt{5x-3}=x^2-2x+3$;

g) $1+8x-8x^2=\sqrt{2-x}$;

h) $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5;$

i) $8x^2-1=2x\sqrt{2x+3}$.

55. a) $x^2-6x+26=6\sqrt{2x+1}$

b) $4\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}=x+9$

56. a) $\sqrt{x^2+2x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x-3}$

b) $\sqrt{2x^2-2x-2}+3\sqrt{x+2}=3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x^2-4};$

c) $\sqrt{(x^2-\dfrac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\left(2x^3+x^2+2x+1\right);$

57. a) $x^2-5x+4=(2x-1)\sqrt{x^2-3x+4};$

b) $2\sqrt{(x+2)^3}=6x+3x^2-x^3;$

c) $\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2(x+1)}$.

58. a) $x=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$;

b) $(x-1)^2+x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=2;$

c) $\sqrt{1+x}+\sqrt{3-3x}=\sqrt{4x^2+1}$;

d) $\sqrt{\dfrac{x+56}{16}+\sqrt{x-8}}=\dfrac{x}{8}$.

59. a) $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x};$

b) $4(x+1)^2=\sqrt{2\left(x^4+x^2+1\right)}$.

60. a) $3\sqrt{x-3}-\sqrt{x+5}=2x-8;$

b) $\sqrt{4x^2+2x+3}-2\sqrt{x^2+1}=4x-2.$

61. a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=1;$

b) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}.$

62. a) $\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}=3x-8;$

b) $\sqrt{x^3+10}-\sqrt{x^3+5}=2x+3;$

c) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2+4x+3}=2x+1.$

63. a) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}=-3x^2+2x+5;$

b) $\sqrt{\dfrac{10}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{18}{5-x}}=4.$

64. a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-7}=2x^2-9x+7;$

b) $\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+2}+4\right)=2x-2;$

c) $\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3x-2}.$

65. a) $2x^2-x+3=2\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(x^2-x+1\right)};$

b) $\sqrt{2x^2+4x+6}+\sqrt{x^4-2x^2+2}=2-2x-x^2;$

c) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2;$

d) $\sqrt{3x^2+3x}+\sqrt{x-x^2}=2x+1.$

66. a) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x(x+3)};$

b) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x^2-x}.$

67. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}.$$

Chuyên đề 6

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC, BẬC BA, BẬC BỐN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Nội dung của chuyên đề này bao gồm:

- Phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.
- Phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc bốn.

Chúng ta sẽ thấy những điểm giống nhau và những điểm khác nhau trong cách giải các phương trình trên so với phương trình trên so với phương trình chứa căn thức bậc hai ở Chuyên đề 5.

Thử trí thông minh

VÌ SAO THỪA NGHIỆM?

Bạn Thu phải giải phương trình

$\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}=1. \qquad (1)$

Bạn đã giải như sau:

Lập phương hai vế ta được

$(1) \Leftrightarrow (2x-3)+(x-2)+3\sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}.\left(\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}\right)=1 \quad (2)$

Thay $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}$ bởi 1 vào (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow 3x-5+3\sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}=1 \quad (3)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}=6-3x \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}=2-x$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-3)=(2-x)^3 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Nhưng thay x = 1 vào (1) lại được -2 = 1 (!)

Thu không hiểu tại sao lại như vậy, bạn hãy giải thích giúp.

Giải

Tất cả các phép biến đổi trên đều tương đương, trừ phép biến đổi $(2) \Leftrightarrow (3)$.

Ta chỉ có $(2) \Rightarrow (3)$.. Khi thay $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}$ bởi 1, đã xuất hiện nghiệm ngoại lai x = 1.

Do đó, sau khi tìm được x = 1 và x = 2, phải thử vào (1) để chọn x = 2 và loại x = 1. Phương trình (1) có một nghiệm là x = 2.

I. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC BẬC BA

Một số phương pháp thường dùng để giải phương trình chứa căn thức bậc ba:

- Lập phương hai vế của phương trình.
- Đặt ẩn phụ
- Dùng biểu thức liên lợp, tức là khử căn thức ở tử thức bằng cách nhân và chia với biểu thức liên hợp:

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\frac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}};$$

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}};$$

- Dùng bất đẳng thức.

Ví dụ 78. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x-2}=1 \quad (1)$ bằng các cách khác, ngoài cách lập phương hai vế của phương trình.

Giải

Ngoài cách giải nói trên, còn có một số cách khác.

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{2x-3}=a, \sqrt[3]{x-2}=b.$ Ta có:

$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3-2b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$. Từ đó x = 2.

Cách 3. Ta có x = 2 là nghiệm của phương trình (1).

Với x > 2 thì $\sqrt[3]{2x-3} > 1$ và $\sqrt[3]{x-2} > 0$ nên vế trái của (1) lớn hơn 1, do đó x > 2 không thỏa mãn (1).

Với x < 2 thì $\sqrt[3]{2x-3} < 1$ và $\sqrt[3]{x-2} < 0$ nên vế trái của (1) nhỏ hơn 1, do đó x < 2 không thỏa mãn (1).

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của (1).

Ví dụ 79. Giải phương trình

$$x^3 - 1 = 2\sqrt[3]{2x+1}.$$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{2x+1} = y$ ta có $\begin{cases} x^3 - 1 = 2y \\ y^3 - 1 = 2x \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên (xem Ví dụ 26) ta được x = -1 và $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Đáp số: Ba nghiệm: -1 ; $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 80. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - 4} = 2\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Giải

Đặt $\sqrt[3]{x-2} = a$, $\sqrt[3]{x+2} = b$ ta có:

$a^2 + ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+2b) = 0.$

Với a = b thì x – 2 = x + 2, vô nghiệm.

Với a = - 2b thì $\sqrt[3]{x-2} = -2\sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow x - 2 = -8x - 16 \Leftrightarrow x = -\dfrac{14}{9}$.

Ví dụ 81. Giải phương trình

$\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{3x-2} = (2x-6)\sqrt{x-1}.$ (1)

Giải

ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Với nhận xét 3 là một nghiệm của (1), ta nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp được:

$$\frac{(2x+1)-(3x-2)}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{(2x+1)(3x-2)} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} = 2(x-3)\sqrt{x-1}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{a^2 + ab + b^2} = 2(x-3)\sqrt{x-1}$ với $a = \sqrt[3]{2x+1}$, $b = \sqrt[3]{3x-2}$.

Ta thấy x = 3 thỏa mãn (1). Với x ≠ 3 ta có

$\dfrac{1}{a^2 + ab + b^2} + 2\sqrt{x-1} = 0.$ (2)

Vì (2) có vế trái dương nên vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm x = 3.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC BẬC BỐN

Ví dụ 82. Giải phương trình $\sqrt[4]{x+21} + \sqrt[4]{61-x} = 4$.

Giải

ĐKXĐ: -21 ≤ x ≤ 61.

Đặt $\sqrt[4]{x+21}=a$ $\sqrt[4]{61-x}=b$ ta có $\begin{cases} a^4+b^4=82 & (1) \\ a+b=4 & (2) \end{cases}$

Thay b = 4 – a vào (1) ta được:

$a^4+(4-a)^4=82 \Leftrightarrow a^4+(a-4)^4=82.$

Đặt a – 2 = y ta có $(y+2)^4+(y-2)^4=82 \Leftrightarrow y^4+24y^2-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=1 \\ y^2=-25\ (loai) \end{array}\right.$

Với y = 1 thì a = 3, ta có $x+21=3^4 \Leftrightarrow x=60.$

Với y = - 1 thì a = 1, ta có $x+21=1 \Leftrightarrow x=-20.$

Đáp số: Hai nghiệm: - 20 và 60.

Ví dụ 83. Giải phương trình

$\sqrt[4]{1-2x}+\sqrt[4]{1+2x}+\sqrt[4]{1-4x^2}=3.$

Giải

ĐKXĐ: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}.$

Đặt $\sqrt{1-2x}=a\ge 0, \sqrt{1+2x}=b\ge 0$ ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}=3.$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}\le 3.$

Thật vậy, ta có $\sqrt{a}\le\frac{a+1}{2}, \sqrt{b}\le\frac{b+1}{2}, \sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}\le a+b+1.$

Ta lại có $a=\sqrt{1-2x}=1.\sqrt{1-2x}\le\frac{1+1-2x}{2}=1-x;$

$b=\sqrt{1+2x}=1.\sqrt{1+2x}\le\frac{1+1+2x}{2}=1+x;$

Nên a + b ≤ 2, suy ra a + b + 1 ≤ 3. (3)

Theo đề bài, phải xảy ra dấu bằng ở (3), tức là

$\begin{cases} 1-2x=1 \\ 1+2x=1 \\ a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0,$ thỏa mãn điều ĐKXĐ.

BÀI TẬP

Giải các phương trình (từ bài 68 đến bài 70):

68. a) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$;

b) $2x^3-1=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$;

c) $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt{1-x}=3$;

d) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1.$

69. a) $\sqrt[3]{7+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}=4$;

b) $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x+4}=\sqrt[3]{2x+3}$;

c) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x+5}$;

d) $\sqrt[3]{(5+x)^2}+2\sqrt[3]{(5-x)^2}=3\sqrt[3]{25-x^2}$.

70. a) $\sqrt[4]{20-x}+\sqrt[4]{x-3}=3$;

b) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{4-x}-\sqrt[4]{(x-1)(4-x)}=1$;

c) $\sqrt[4]{8x-1}+\sqrt[4]{9x+1}=3\sqrt[4]{x}$.

Chuyên đề 7
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG ĐA THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Bất đẳng thức và toán cực trị là một nội dung quan trọng và hấp dẫn. Các bài toán trong chuyên đề này bao gồm:

- Bất đẳng thức dạng đa thức, các cách chứng minh một bất đẳng thức, các bất đẳng thức thông dụng, trong đó có bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức B-nhi-a-cốp-xki.
- Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các biểu thức có dạng đa thức với một biến hoặc nhiều biến.

Vài nét lịch sử

CÔ – SI VÀ BU-NHI-A-CỐP-XKI

Cô – si *(Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)* là nhà toán học Pháp, Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pa-ri.

Ông có trên 800 công trình về nhiều lĩnh vực như Số học, Đại số, Giải tích, Cơ học, Quang học, Thiên Văn học. Ông đã xây dựng nhiều vấn đề lí thuyết một cách chặt chẽ, khoa học, giúp cho Toán học có những bước tiến đnags kể.

Bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân của n số không ân là

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}.$$

Bất đẳng thức trên cũng được gọi là *bất đẳng thức Cô – si* đã đưa ra một cách chứng minh độc đáo, mặc dù ông không phải là người đầu tiên đề xuất bất đẳng thức này.

Bu – nhi – a – cốp – xki (*Viktor Bunyakovsky*, 1804 – 1889) là nhà toán học Nga, Phó Chủ tịch Viện Hàn lâm khoa học Pê – tec – bua. Ông học Toán tại Pari và là học trò của Cô – si. Ông có 128 công trình về Lí thuyết số, Lí thuyết xác suất, Giải tích, Hình học và Đại số. Ông có nhiều đóng góp nâng cao trình độ khoa học trong giảng dạy toán học ở các trường đại học và trung học. Để ghi nhớ công lao của ông với nền giáo dục Nga, năm 1875 một giải thưởng mang tên ông đã được lập ra để trao cho những sáng chế về Toán học.

Bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki với hai bộ n số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là

$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$.

Bất đẳng thức trên còn được gọi là bất đẳng thức Cô – si – Bu – nhi – a – cốp – xki – Svac, vì Cô – si đã đề xuất bất đẳng thức đó, Bu – nhi – a – cốp – xki đã mở rộng kết quả cho tích phân, còn Svac (*Schwarz,* nhà toán học Đức, 1843 – 1921) mở rộng kết quả trên cho không gian vectơ

Bài toán thực tế

Khu đất nhốt gia súc

Bác Tâm có một cuốn lưới sắt dài $60m$, bác muốn dùng lưới căng thành ba đoạn thẳng AB, BC, CD cùng với bức tường có sẵn làm thành một hình chữ nhật $ABCD$ để nhốt gia súc.

Hãy tính độ dài AB để khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

Giải

Đặt $AB = CD = x$ (mét) thì $BC = 60 - 2x$.

Diện tích S của hình chữ nhật $ABCD$ bằng

$S = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x = -2(x^2 - 30x) = -2(x^2 - 30x + 225) + 450 = -2(x - 15)^2 + 450 \leq 450.$

$\max S = 450 \Leftrightarrow x = 15$

Độ dài $AB = 15m$, khi đó khu đất có diện tích lớn nhất là $450m^2$

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG ĐA THỨC

1. Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hoặc $a < b, a \geq b, a \leq b$) là một bất đẳng thức

2. Để chứng minh bất đẳng thức, ta thường dùng các cách sau:

- Dùng định nghĩa: Để chứng minh $a > b$ ta chứng minh $a - b > 0$.

- Dùng phép biến đổi tương đương: Chứng tỏ bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đúng.

- Dùng phương pháp phản chứng: Để chứng minh $a \geq b$ ta chứng tỏ $a < b$ là sai.

3. Cần nhớ một số bất đẳng thức thông dụng sau:

a) Liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cô – si)

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ (1)

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

b) Liên hệ giữa tổng các bình phương và bình phương của tổng

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ (2)

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ (3)

Ta còn có $(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

Tổng quát của các bất đẳng thức (2) và (3), ta có bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (4)

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ (5)

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ $(xyz\neq 0)$.

Bất đẳng thức (2) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (4) với $x=y=1$.

Bất đẳng thức (3) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (5) với $x=y=z=1$.

Khi a,b,c,x,y,z không âm thì các bất đẳng thức (4) và (5) còn được viết dưới dạng

$(a+b)(x+y)\geq\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)^2$

$(a+b+c)(x+y+z)\geq\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}\right)^2$

Ví dụ 84. Chứng minh đẳng thức $\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)\leq(ac-bd)^2$ $\quad(1)$

Giải

$(1)\Leftrightarrow a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2\leq a^2c^2-2abcd+b^2d^2$

$\Leftrightarrow 0\leq a^2d^2+b^2c^2-2abcd\Leftrightarrow 0\leq(ad-bc)^2$ $\quad(3)$

Bất đẳng thức (3) đúng. Vậy bất đẳng thức (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$

Ví dụ 85. Chứng minh bất đẳng thức sau với x,y không âm $(x+y)\left(x^3+y^3\right)\geq\left(x^2+y^2\right)^2$

Giải

Cách 1. Xét hiệu hai vế

$(x+y)\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)^2$ $\quad=x^4+xy^3+x^3y+y^4-x^4-2x^2y^2-y^4$

$=xy\left(y^2+x^2-2xy\right)=xy(x-y)^2\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0,$ hoặc $y=0,$ hoặc $x=y$

Cách 2. Với $a,b,x,y\geq 0,$ theo bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki

$(a+b)(x+y)\geq\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)^2$

Với $a=x^3,b=y^3$ ta có $\left(x^3+y^3\right)(x+y)\geq\left(\sqrt{x^3.x}+\sqrt{y^3.y}\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2$

Ví dụ 86. Chứng minh bất đẳng thức $x+y\leq xy+1$ với $x\geq 1,y\geq 1.$

Giải

Do $x\geq 1$ và $y\geq 1$ nên $(x-1)(y-1)\geq 0$ $\Rightarrow xy-x-y+1\geq 0\Rightarrow x+y\leq xy+1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$ và $y=1$

Ví dụ 87. Cho $a+b\geq 2.$ Chứng minh đẳng thức $a^3+b^3\geq a^2+b^2$ $\quad(1)$

Giải

Cách 1. $(1)\Leftrightarrow a^3-a^2+b^3-b^2\geq 0\Leftrightarrow a^2(a-1)+b^2(b-1)\geq 0$ $\quad(2)$

Đặt $a=1+x$ và $b=1+y.$ Do $a+b\geq 2$ nên $x+y\geq 0.$ Ta có

$(2)\Leftrightarrow(1+x)^2x+(1+y)^2y\geq 0$

$\Leftrightarrow x+y+2\left(x^2+y^2\right)+\left(x^3+y^3\right)\geq 0$ $\quad(3)$

Ta có $x^2+y^2\geq 0$ do $x+y\geq 0$ nên $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\geq 0$

Suy ra (3) đúng. Vậy (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$ và $b=1$

Cách 2. Do $a+b\ge 2$ nên $a+b-2\ge 0$. Để chứng minh $a^3+b^3-a^2-b^2\ge 0$. ta sẽ chứng minh $a^3+b^3-a^2-b^2\ge a+b-2 \quad (3)$

$(3)\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2-b^2-a-b+2\ge 0\Leftrightarrow a^3-a^2-a+1+b^3-b^2-b+1\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1)+(b-1)^2(b^2+b+1)\ge 0 \qquad (4)$

Do (4) đúng nên (3) đúng. Vậy (1) đúng

Ví dụ 88. Cho các số a và b không âm thỏa mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $a^3+b^3\le 1$

b) $a^3+b^3\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải

a) Do $a^2+b^2=1$ nên $a\le 1$ và $b\le 1$. Suy ra $a^3\le a^2$ và $b^3\le b^2$.

Do đó $a^3+b^3\le a^2+b^3=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$ và $b=1$

b) Ta chứng minh được $(a+b)(a^3+b^3)\ge (a^2+b^2)^2$ (xem Ví dụ 85)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge \dfrac{(a^2+b^2)^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b} \qquad (1)$

Ta lại có $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)=2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a^3+b^3\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II. CỰC TRỊ DẠNG ĐA THỨC

Ví dụ 89. Tìm giá trị nhỏ nhất (min) của biểu thức $A=x^2-3x+3$ với

a) x bất kì

b) $x\ge 2$

Giải

a) $A=x^2-3x+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4}$

$\min A=\dfrac{3}{4}$ tại $x=\dfrac{3}{2}$.

b) *Cách 1.*

Do $x\ge 2$ ta đặt $x=2+y$ với $y\ge 0$. Ta có $A=(2+y)^2-3(3+y)+3=y^2+y+1\ge 1$ (do $y\ge 0$)

$\min A=1\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow x=2$.

Cách 2. Ta có $A(2)=2^2-3.2+3=1$. Ta sẽ chứng minh với $x\ge 2$ thì $A\ge 1$.

Ta có $A-1=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Với $x\ge 2$ thì $x-1>0, x-2\ge 0$ nên $A-1\ge 0$, do đó $A\ge 1$.

$\min A=1$ tại $x=2$.

Lưu ý. Khi biến x nhận giá trị tùy ý thì tam thức bậc hai $ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$ đạt cực đại tại $x=-\dfrac{b}{2a}$

Khi biến x nhận giá trị hạn chế không chứa $-\dfrac{b}{2a}$ thì tam thức bậc hai đạt cực trị tại giá trị biên của biến.

Ví dụ 90. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A=x^3-48x$ với $x\ge 0$

b) $B=x^4-32x$

Giải

a) $A=x^3-48x=x^3+8x^2-8x^2-64x+16x+128-128$

$=(x^2-8x+16)(x+8)-128=(x-4)^2(x+8)-128\ge -128.$

Vậy $\min A=-128$ tại $x=4$.

b) $B=x^4-32x=x^4+16-8x^2+8x^2+32-32x-48\ =(x^2-4)^2+8(x-2)^2-48\ge -48$

Vậy $\min B=-48$ tại $x=2$.

Ví dụ 91. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x^2(x+4)$ với $x\ge 2$

Giải

Do $x\ge 2$ ta đặt $x=2+y$ với $y\ge 0$.

Ta có $A=(2+y)^2(6+y)=y^3+10y^2+28y+24$

$=y(y^2+10y+25)+3y+24=y(y+5)^2+3y+24\ge 24$

Vậy $\min A=24$ tại $y=0$ tức là $x=2$.

Ví dụ 92. Cho các số x, y không âm thỏa mãn $x^3+y^3=2$. Tìm giá trị lớn nhất (max) của

a) $A=x+y$

b) $B=x^2+y^2$

Giải

a) Ta có $2=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x^2-xy+y^2)A$ (1)

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=A^2-3xy$ (2)

$4xy\le (x+y)^2=A^2\Rightarrow -3xy\ge -\dfrac{3}{4}A^2$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $x^2-xy+y^2\ge A^2-\dfrac{3}{4}A^2=\dfrac{A^2}{4}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $2\ge \dfrac{A^2}{4}.A\Rightarrow A^3\le 8\Rightarrow A\le 2$

$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

b) Với x, y không âm ta có $(x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2$ (theo bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki hoặc theo Ví dụ 85) nên $A.2 \geq B^2 \Rightarrow B^2 \leq 2A \leq 2.2 = 4$

Vậy $\max B = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Ví dụ 93. Cho $x \geq 4$ và $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$

Giải

Chọn x nhỏ nhất là 4. Khi $x = 4$ thì $y \geq 2$. Xét biểu thức $4x + 2y$

Theo bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki $(4^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (4x+2y)^2$ (1)

Do $2x > 8$ và $2x + 2y \geq 12$ nên $4x + 2y \geq 20$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $20A \geq 20^2 \Rightarrow A \geq 20$

$\min A = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} \\ x = 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Ví dụ 94. Cho các số dương a, b thỏa mãn $a + b = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = ab(a^2 + b^2)$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$\sqrt{2A} = \sqrt{2ab(a^2+b^2)} \leq \dfrac{2ab + (a^2+b^2)}{2} = \dfrac{(a+b)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow A \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow A \leq \dfrac{1}{8}$

$maxA = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 95. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(a+c) = 8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = abc(a+b+c)$.

Giải:

Ta có

$(a+b)(a+c) = 8 \Rightarrow a(a+c) + ab + bc = 8$

$\Rightarrow a(a+b+c) + bc = 8.(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$\sqrt{A} = \sqrt{a(a+b+c).bc} \leq \dfrac{a(a+b+c)+bc}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$\Rightarrow A \leq 16$

$A = 16 \Leftrightarrow a(a+b+c) = bc = 4$

$maxA = 16$ khi, chẳng hạn $\begin{cases} b = c = 2 \\ a + 2 = \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 2 \\ a = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

Ví dụ 96. Tìm giá trị lớn nhất của $A = a^2 + b^2 + c^2$ biết $-1 \le a, b, c \le 3$ và:

a) $a + b + c = 5$

b) $a + b + c = 4$

Giải:

a) Do $-1 \le a \le 3$ nên $(a+1)(a-3) \le 0 \Rightarrow a^2 \le 2a + 3$.

Tương tự, $b^2 \le 2b + 3, c^2 \le 2c + 3$ nên $A \le 2(a + b + c) + 9 = 2.5 + 9 = 19$

$maxA = 19$ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 3, một số bằng -1.

b) Do $-1 \le a, b, c \le 3$ nên

$$(a+1)(b+1)(c+1) + (3-a)(3-b)(3-c) \ge 0$$
$$\Rightarrow (a+1)(bc + b + c + 1) + (3-a)(9 - 3b - 3c + bc) \ge 0$$
$$\Rightarrow 4(ab + bc + ac) - 8(a + b + c) + 28 \ge 0 \quad .$$
$$\Rightarrow 4(ab + bc + ac) - 8.4 + 28 \ge 0$$
$$\Rightarrow 2(ab + bc + ac) \ge 2 \qquad (1)$$

Ta có $A = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 16 - 2(ab + bc + ca)$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le 14$

$maxA = 14$ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 3, một số bằng 2, một số bằng -1.

Lưu ý: Cách giải ở câu $a)$ gọn vì ta gặp thuận lợi: cực trị xảy ra khi a, b, c chỉ nhận các giá trị là 3 và -1, tức là nhận các giá trị ở biên của các biến.

Cách giải ở câu $a)$ không vận dụng được cho câu $b)$ vì ở câu $b)$ cực trị xảy ra khi có một số bằng 2, không phải là giá trị ở biên của biến a, b, c. Như vậy cách giải ở câu $b)$ tổng quát hơn.

Ví dụ 97. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của d, biết rằng các số a, b, c, d thỏa mãn

$$\begin{cases} a + b + c + d = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \end{cases}$$

Giải:

Ta có $a + b + c = 5 - d; a^2 + b^2 + c^2 = 7 - d^2$

Áp dụng bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$ được

$3(7 - d^2) \ge (5 - d)^2 \Leftrightarrow 2d^2 - 5d + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow (d - 2)(2d - 1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le d \le 2$

Vậy $\min d = \frac{1}{2}$ tại $a = b = c = \frac{3}{2}$; $\max d = 2$ tại $a = b = c = 1$.

Ví dụ 98. Cho các số a, b, c, d không âm có tổng bằng 2. Tìm giá trị lớn nhất của $A = ab + bc + cd$

Giải:

$A = ab + bc + cd \le ab + bc + cd + ad = (a+c)(b+d) \qquad (1)$

Ta lại có $4(a+c)(b+d) \le (a+c+b+d)^2 = 2^2 = 4$

Nên $(a+c)(b+d) \le 1 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le 1$

Vậy $\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = b+d = 1 \\ ad = 0 \end{cases}$ khi chẳng hạn $a = 0, b = d = \frac{1}{2}, c = 1.$

BÀI TẬP

Bất đẳng thức dạng đa thức

71. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^3b + b^3c + c^3a$ với $a \ge b \ge c$;

b) $3abc(a+b+c) \le 1$ với $ab + bc + ca = 1.$

72. Cho các số a và b nhỏ hơn 2 thỏa mãn $ab < 2$. Chứng minh rằng $a + b < 3.$

73. Cho $ab \ge 1.$ Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \ge a + b.$

74. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dại ba cạnh của một tam giác thì $(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$

75. Cho các số a, b, c thỏa mãn $-1 \le a, b, c \le 1$ và $a + b + c = 0.$ Chứng minh rằng $a^2 + b^3 + c^4 \le 2.$

76. Chứng minh bất đẳng thức $3(a+b+c)^2 \le (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$

77. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d); y = (a+c)(b+d); z = (a+d)(b+c).$

Chứng minh rằng $x < y < z$.

78. Cho 9 số có tổng bằng 8, trong đó tổng của bốn số bất kì đều nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng mọi số đã cho đều dương.

Cực trị dạng đa thức

79. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A = 1 + x - x^2$ với x bất kỳ;

b) $B = 1 + x - x^2$ với $x \le -2$;

c) $C = x^2 - x$ với $0 \le x \le 2$.

80. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = 2x^4 - 2x^3 - x^2$;

b) $B = (x-2)^4 + (x-4)^4 + 6(x-2)^2(x-4)^2$;

c) $C = (x+1)(x+3)^2(x+5).$

81. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x+1| + |x+3| + |x+5| + |x+7| + |x+9|.$

82. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 - xy - y.$

83. Tìm giá trị lớn nhất của tích xy, biết $x^2 + y^2 = x + y.$

84. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

a) $A = 2x + 3y$ biết $x^2 + y^2 = 52$;

b) $B = x^2 + y^2$ biết $x^2 + y^2 = xy + 4$.

85. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = x^2 + y^2$ với $x \geq 2$ và $x + y \geq 3$

b) $B = x^4 + y^4 + z^4$ với $x + y + z = 3$.

86. Cho các số dương x và y thỏa mãn $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = xy$;

b) $B = x + y$.

87. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A = a^3 + b^3 + c^3$, biết $0 \leq c \leq b \leq a \leq 2$ và $a + b + c = 3$;

b) $B = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right)$ biết $a \geq b \geq c \geq 0$ và $a + b + c = 1$.

88. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $A = (a + b + c) - (ab + bc + ca)$ biết $0 \leq a, b, c \leq 1$.

89. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của a, biết:

a) $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ ab + bc + ca = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

90. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = (a + b)(a + b + c)$ biết

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ abcd = \frac{1}{2} \\ a, b, c, d > 0 \end{cases}$$

Chuyên đề 8

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Chuyên đề này bao gồm hai nội dung:

– Bất đẳng thức dạng phân thức, trong đó có bất đẳng thức về cộng mẫu số.

– Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các biểu thức có dạng phân thức, trong đó có bài toán tìm cực trị mà biến nằm trong một khoảng nhất định, khi đó cần dự

đoán giá trị của biến để xảy ra cực trị.

Tính nhẩm vào đời sống

CHIA NHANH

Bạn Vinh cần làm phép chia $1:1,03$ và làm tròn đến hàng phần trăm. Vinh đang loay hoay tính toán vì không có máy tính bỏ túi trong tay . Hà nói với Vinh:

Bạn chỉ cần lấy 1 trừ đi $0,03$ là được! ($0,03$ là *phần hơn* của số chia so với 1)

Vinh rất ngạc nhiên sau đó kiể tra lại bằng máy tính:

$$1:1,03 = 0,9708... \approx 0,97\left(=1-0,03\right).$$

Vinh thử một vài trường hợp khác cũng thấy đúng.

$$1:1,04 = 0,9615... \approx 0,96$$

$$1:1,07 = 0,9345... \approx 0,93$$

a) Bạn hãy giải thích điều đó.

b) Có phải kết quả tính theo cách trên luôn nhỏ hơn kết quả đúng hay không?

Giải:

a) Giả sử cần tính $\frac{1}{1+a}$ trong đó a là số rất nhỏ so với 1.

Khi đó $1 \approx 1-a^2$ nên $\frac{1}{1+a} = \frac{1-a^2}{1+a} = 1-a$.

b) Do $1 > 1-a^2$ nên $\frac{1}{1+a} > \frac{1-a^2}{1+a} = 1-a$

Vậy kết quả tính được theo cách trên luôn nhỏ hơn kết quả đúng.

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG PHÂN THỨC

Ngoài các bất đẳng thức về liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cô-si), liên hệ giữa tổng các bình phương và bình phương của tổng (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki) được nêu ở Chuyên đề 7, cần nhớ các bất đẳng thức về liên hệ giữa tổng các số và tổng các nghịch đảo của chúng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ với } x, y > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \text{ với } x, y, z > 0 \qquad (2)$$

Bạn đọc cũng nên biết các bất đẳng thức tổng quát của các bất đẳng thức trên và cách chứng minh chúng để khi cần, có thể sử dụng chúng như những bổ đề:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{\left(a+b\right)^2}{x+y} \text{ với } x, y > 0 \qquad (3)$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \text{ với } x,y,z>0 \qquad (4)$$

Bất đẳng thức (1) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (3) khi $a=b=1$.
Bất đẳng thức (2) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (4) khi $a=b=c=1$.
Ta gọi các bất đẳng thức trên là các bất đẳng thức về cộng mẫu số.

Ví dụ 99. Chứng minh các bất đẳng thức (3) và (4) nói trên.

Giải:

Chứng minh bất đẳng thức (3) như sau:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\Leftrightarrow\frac{a^2y+b^2x}{xy}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\ge xy\left(a^2+2ab+b^2\right)$$

$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2\ge 2abxy\Leftrightarrow(ay-bx)^2\ge 0$ luôn đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Chứng minh đẳng thức (4) như sau:

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức (3) hai lần ta có:

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\Leftrightarrow\frac{a^2y+b^2x}{xy}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Ví dụ 100. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2} \text{ với } x \text{ và } y \text{ dương}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$(x+y)^2\ge 4xy>0 \qquad (1)$

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 2\frac{1}{x}.\frac{1}{y}>0 \qquad (2)$

Nhân (1) với (2) theo từng vế được

$$(x+y)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ge 8 \Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge \frac{8}{(x+y)^2}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$.

Ví dụ 101. Cho $A=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ và $B=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Chứng minh rằng:

a) $A\ge 2$.

b) $A\ge B$

Giải:

a) Đặt $\frac{a}{b}=x$; $\frac{b}{a}=y$ thì $xy=1$.

$A=x^2+y^2\ge 2|xy|=2$ nên $A\ge 2$ (1).

b) Ta có $x^2+1\ge 2x$; $y^2+1\ge 2y$ nên $x^2+y^2+2\ge 2(x+y)\Rightarrow A+2\ge 2B$ (2)

Từ (1) suy ra $A+A\ge A+2$.

Kết hợp với (2) có $2A\ge 2B$ nên $A\ge B$.

Ví dụ 102. Cho $A=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$ và $B=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Chứng minh rằng:

a) $A\ge 3$.

b) $A\ge B$.

Giải:

a) Đặt $\frac{a}{b}=x$; $\frac{b}{c}=y$; $\frac{c}{a}=z$ thì $xyz=1$.

Xét $A+1=(x^2+y^2)+(z^2+1)\ge 2|xy|+2|z|\ge 4\sqrt{|xyz|}=4$ nên

$A\ge 3$ (1).

b) Ta có $x^2+1\ge 2x$; $y^2+1\ge 2y$; $z^2+1\ge 2z$ nên

$x^2+y^2+z^2+3\ge 2(x+y+z)\Rightarrow A+3\ge 2B$ (2)

Từ (1) suy ra $A+A\ge A+3$ nên $2A\ge A+3$.

Kết hợp với (2) có $2A\ge 2B$ nên $A\ge B$.

Ví dụ 103. Cho $x=\frac{a+b}{a-b}$; $y=\frac{b+c}{b-c}$; $z=\frac{c+a}{c-a}$.

Chứng minh rằng:

a) $xy+yz+zx=-1$.

b) $x^2+y^2+z^2\ge 2$.

Giải:

a) Ta có $x+1=\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{2a}{a-b}$. Từ đó

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\frac{2a}{a-b}.\frac{2b}{b-c}.\frac{2c}{c-a} \qquad (1).$$

Từ đó $x-1=\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{2b}{a-b}$. Từ đó

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{2b}{a-b}.\frac{2c}{b-c}.\frac{2a}{c-a} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

Nhân và rút gọn được $xy+yz+zx=-1$

b) Ta có $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2+2$.

Vậy $x^2+y^2+z^2\ge 2$.

Ví dụ 104. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{3}{2} \text{ với } a\ge b\ge c>0.$$

Giải:

Gọi vế trái là A, ta có:

$$A-\frac{3}{2}=\left(\frac{a}{a+b}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{c+a}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{b-c}{2(b+c)}+\frac{c-a}{2(c+a)}$$

$$=\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{(b-a)+(a-c)}{2(b+c)}+\frac{c-a}{2(c+a)}$$

$$=\frac{a-b}{2}.\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)+\frac{a-c}{2}.\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a-b}{2}.\frac{c-a}{(a+b)(b+c)}+\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)}\left(-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

Vậy $A\ge\frac{3}{2}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi trong a,b,c có ít nhất hai số bằng nhau.

Ví dụ 105. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c \text{ với } a,\ b,\ c \text{ dương.}$$

Giải:

Do $a,\ b,\ c>0$ nên $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b)ab$.

$\Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{2ab} \ge \dfrac{a+b}{2}$. Từ đó

$$\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca} \ge \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 106. Chứng minh bất đẳng thức

$\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{b+c}{b^2+c^2}+\dfrac{c+a}{c^2+a^2} \le 3$ với a, b, c dương và $a+b+c=ab+bc+ca$.

Giải:

Ta có $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.

Do a và b dương nên $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \le \dfrac{2}{a+b}$.

Từ đó

$$A=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \le 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \le \dfrac{9}{x+y+z}$ với $x, y, z>0$ ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{9}{2(a+b+c)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le \dfrac{9}{a+b+c}$.

Cần chứng minh $\dfrac{9}{a+b+c} \le 3$ hay $\dfrac{9}{a+b+c} \le \dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ $\quad (3)$

(Vì $a+b+c=ab+bc+ca$)

$(3) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Dễ dàng thấy bất đẳng thức cuối là đúng.

Vậy bất đẳng thứcc đã được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 107. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a \le b, a \le c$ và $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a+b^2+c^2 \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Giải:

Ta có $a \le b, a \le c$ nên $a^3 \le abc=1$, do đó $a \le 1$.

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$M=\left(a-\frac{1}{a}\right)+b^2+c^2-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ge 0.$$

Ta có $a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}=\left(a^2-1\right)bc$ (vì $\frac{1}{a}=bc$)

Và $b^2+c^2-\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\left(b^2+c^2\right)\left(1-\frac{1}{b^2c^2}\right)$

$=\left(b^2+c^2\right)\left(1-a^2\right)$.

nên

$M=\left(a^2-1\right)bc+\left(b^2+c^2\right)\left(1-a^2\right)$

$=\left(1-a^2\right)\left(b^2+c^2-bc\right)=(1+a)(1-a)\left(b^2+c^2-bc\right)$

Do $a,b,c>0$ và $a\le 1$ nên $1-a^2\ge 0$ $b^2+c^2-bc>0$ suy ra $M\ge 0$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 108. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}\ge\frac{2}{xy+1}$ với $xy\ge 1$.

Giải:

Cách 1. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2+1+y^2+1}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\ge\frac{2}{xy+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+2\right)(xy+1)\ge 2\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+x^2+y^2+2xy+2-2x^2y^2-2x^2-2y^2-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2-xy\right)-\left(x^2+y^2-xy\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $xy\ge 1$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$ hoặc $xy=1$.

Cách 2. Vế trái đã cho tương đương với

$$A=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)+\left(1-x^2y^2\right)}{x^2y^2+x^2+y^2+1}=1+\frac{1-x^2y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}\quad(1)$$

Ta có $x^2y^2+x^2+y^2+1\ge x^2y^2+2xy+1=(xy+1)^2$.

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2y^2+x^2+y^2+1}\le\frac{1}{(xy+1)^2}.$$

Nhân hai vế với $1-x^2y^2$ (do $xy\ge 1\Rightarrow 1-x^2y^2\le 0$) ta được

$$\frac{1-x^2y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}\ge\frac{1-x^2y^2}{(xy+1)^2}=\frac{1-xy}{xy+1}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A\ge 1+\frac{1-xy}{1+xy}=\frac{2}{xy+1}$.

II. CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC.

Ví dụ 109. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{x^2+1}{x}$ với:

a) $0<x\le\dfrac{1}{2}$.

b) $x\ge 2$

Giải:

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x=\dfrac{1}{2}$ tức là $x^2=\dfrac{1}{4}$, ta biến đổi như sau:

$$A=\frac{x^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{x}=\frac{x^2+\frac{1}{4}}{x}+\frac{3}{4x} \qquad (1)$$

Do $x>0$ nên $\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{x}\ge\dfrac{2x.\frac{1}{2}}{x}=1$ (1)

$0<x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x}\ge 2\Rightarrow\dfrac{3}{4x}\ge\dfrac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A\ge 1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$. $\min A=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

b) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x=2$, tức là $x^2=4$ ta biến đổi như sau:

$A=\dfrac{x^2+4-3}{x}=\dfrac{x^2+4}{x}-\dfrac{3}{x}$ (3)

Do $x>0$ nên $\dfrac{x^2+4}{x}\ge\dfrac{2\sqrt{x^2.4}}{x}=4$ (4)

$x\ge 2\Rightarrow\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{-3}{x}\ge\dfrac{-3}{2}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $A\ge 4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$; $\min A=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x=2$

Ví dụ 110. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{x^2+1}{x}$ với:

a) $0<x\le\dfrac{1}{4}$;

b) $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x=\dfrac{1}{4}$, tức là $x^2=\dfrac{1}{16}$, ta biến đổi như sau:

$$A=\frac{x^2+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}}{x}=\frac{x^2+\frac{1}{16}}{x}+\frac{15}{16x} \qquad (1)$$

Do $x>0$ nên $\dfrac{x^2+\frac{1}{16}}{x}\ge\dfrac{1}{2}$ (2)

$0 < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} \ge 4 \Rightarrow \frac{15}{16x} \ge \frac{15}{4}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \ge \frac{1}{2} + \frac{15}{16} = \frac{17}{4}$. $\min A = \frac{17}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

b) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = 3$, tức là $x^2 = 9$, ta biến đổi như sau:

$A = \frac{x^2 + 9 - 8}{x} = \frac{x^2 + 9}{x} - \frac{8}{x}$ (1)

Do $x > 0$ nên $\frac{x^2 + 9}{x} \ge 6$ (2)

$3 \le x \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-8}{x} \ge -\frac{8}{3}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \ge 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$. $\min A = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = 3$

<u>Lưu ý</u>: Xét biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

- $x \ge 2 \Rightarrow \min A = 2\frac{1}{2}$ (ví dụ 109b).

$x \ge 3 \Rightarrow \min A = 3\frac{1}{3}$ (ví dụ 110b).

Tổng quát, $x \ge n \Rightarrow \min A = n\frac{1}{n}$ (hỗn số).

- $0 < x \le \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = 2\frac{1}{2}$ (ví dụ 109a).

$0 < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow \min A = 4\frac{1}{4}$ (ví dụ 110a).

Tổng quát, $0 < x \le \frac{1}{n} \Rightarrow \min A = n\frac{1}{n}$ (hỗn số).

Ví dụ 111. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ với $x \ge 2y > 0$

Lời giải

Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = 2y$, tức là $x^2 = 4y^2$, ta biến đổi như sau:

$A = \frac{x^2 + 4y^2 - 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 4y^2}{xy} - \frac{3y}{y}$ (1)

Do $x, y > 0$ nên $\frac{x^2 + 4y^2}{xy} \ge 4$ (2)

$x \ge 2y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3y}{x} \ge -\frac{3}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \ge 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$

Ví dụ 112. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2 + b^2}$, với $a, b > 0$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $x = a^2 + b^2; y = ab$ ta có $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Do $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow x \geq 2y$.

Bài toán quay về **ví dụ 111**. Suy ra $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$

Cách 2. Đặt $x = \frac{a^2 + b^2}{ab}$. Do $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow x \geq 2$. Quy về bài toán ở **ví dụ 109b.** Vậy $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$

Ví dụ 113. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{y^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Tìm hướng giải

Với $x, y > 0$ ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, nhưng dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$ trái với giả thiết $x^2 + \frac{1}{y^2} = 1$. Ta tìm hướng giải khác bằng cách khai thác giả thiết $x^2 + \frac{1}{y^2} \geq 2\frac{x}{y}$.

Lời giải

Từ $1 = x^2 + \frac{1}{y^2} \geq 2\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$, với dự đoán xảy ra cực trị khi $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 4x^2$, ta biến đổi như sau:

$$A = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{4x^2 + y^2 - 3x^2}{xy} = \frac{4x^2 + y^2}{xy} - \frac{3x}{y} \qquad (1)$$

Do $x > 0, y > 0$ nên $\frac{4x^2 + y^2}{xy} \geq \frac{1.2x.y}{xy} = 4$ (2)

$$0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3x}{y} \geq -\frac{3}{2} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$$\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 114. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + \frac{1}{x}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Lời giải

Do $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ nên $(1 - x)\left(\frac{1}{2} - x\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x + x^2 \leq 0$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}x\Rightarrow x+\frac{1}{2x}\le\frac{3}{2}$ (1)

$x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2x}\le 1$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có $x+\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$. Vậy $\max A=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 115. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A=\frac{x^2}{x^2-x+1}$ với

a) x bất kỳ.

b) $\frac{1}{3}\le x\le 1$.

Lời giải

a) Do $x^2\ge 0$ và $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên $A\ge 0$. $\min A=0\Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ thì $A=0$. Với $x\ne 0$ thì A lớn nhất khi $\frac{1}{A}$ nhỏ nhất.

$\frac{1}{A}=\frac{x^2-x+1}{x^2}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

Đặt $y=\frac{1}{x}$ thì $\frac{1}{A}=1-y+y^2=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\Rightarrow A\le\frac{4}{3}$

$\max A=\frac{4}{3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2$

b) Với $\frac{1}{3}=x$ thì $A=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{7}$

Với $x=1$ thì $A=1$

Ta chứng minh $\frac{1}{7}\le A\le 1$.

- Ta có $A\ge\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-x+1}\ge\frac{1}{7}\Leftrightarrow 6x^2+x-1\ge 0\Leftrightarrow(2x+1)(3x-1)\ge 0$ (1)

Do $x\ge\frac{1}{3}$ nên (1) đúng.

- Ta có $A\le 1\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-x+1}\le 1\Leftrightarrow x^2\le x^2-x+1\Leftrightarrow x\le 1$ (2)

Do giả thiết $\frac{1}{3}\le x\le 1$ nên (2) đúng, hay $A\le 1$.

Vậy $\max A=1\Leftrightarrow x=1$

Ví dụ 116. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}$ với $x>0,\ y>0$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2\ge 2$ và x,y dương nên $\frac{1}{y}\ge\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{x}{y}\ge\frac{2x^2}{x^2+y^2}$

$A=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\ge\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=2$

$\min A=2\Leftrightarrow x=y$

Ví dụ 117. Cho các số dương x,y thỏa $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)$.

b) $B=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$.

Lời giải

a) $A=xy+\frac{1}{xy}+2$.

Ta có $0<\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\le\frac{1}{2}$ nên $0<xy<\frac{1}{4}$.

Đặt $a=xy$ đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $a+\frac{1}{a}$ với $0<a\le\frac{1}{4}$ theo **ví dụ 110a** ta tìm được

$\min\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{17}{4}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

Do đó, $\min A=\frac{17}{4}+2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

b) $B=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}\right)+\frac{1}{xy}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ với a,b dương ta có

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge 4$ (2)

$0<\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow 0<xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\ge 4\Rightarrow\frac{1}{2xy}\ge 2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B\ge 2+4=6$. Vậy $\min B=6\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Ví dụ 118. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}$ với $x,y>0;xy=4$.

Lời giải

$A=\frac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}=\frac{x+y+2}{x+y+xy+1}=\frac{x+y+2}{x+y+5}=1-\frac{3}{x+y+5}$

Ta có: $x+y\ge 2\sqrt{xy}=4\Rightarrow x+y+5\ge 9$

$\Rightarrow \frac{1}{x+y+5} \le \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{-3}{x+y+5} \ge \frac{-1}{3}$

Vậy $A \ge 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\min A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = y = 2$

Ví dụ 119. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = \frac{x+y}{xy}$ b) $B = \frac{x^3 + y^3}{xy}$

Giải

a) Do $x > 0, y > 0$ nên $A = \frac{x+y}{xy} \ge \frac{2\sqrt{xy}}{xy} = \frac{2}{\sqrt{xy}}$ (1)

Ta lại có: $2xy \le x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{xy} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \ge \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \ge 2\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge 2\sqrt{2}$ (3)

$\min A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $B = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy} = A(1 + xy)$ (4)

Ta lại có $2xy \le x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - xy \ge \frac{1}{2}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $B \ge 2\sqrt{2}.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$

$\min B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 120. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2}{y-2} + \frac{y^2}{x-2}$ với $x > 2$ và $y > 2$

Giải

Đặt $x - 2 = a > 0, y - 2 = b > 0$

$A = \frac{(a+2)^2}{a} + \frac{(b+2)^2}{b} \ge \frac{4.a.2}{b} + \frac{4.b.2}{a} = 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge 16$

$\min A = 16 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 4$

Ví dụ 121. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ với $1 \le x \le 2$ và $1 \le y \le 2$

Giải

Do $1 \le x \le 2$ nên $(x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \Rightarrow x + \frac{2}{x} \le 3$

Tương tự, $y+\frac{2}{y}\le 3$. Suy ra $(x+y)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\le 6$ (1)

Ta lại có $(x+y)+\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\ge 2\sqrt{(x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)}=2\sqrt{2A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2\sqrt{2A}\le 6\Rightarrow \sqrt{2A}\le 3\Rightarrow 2A\le 9\Rightarrow A\le \frac{9}{2}$

$\max A=\frac{9}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \end{array}\right.$

Ví dụ 122. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A=4a+\frac{1}{a}$ với $0<a\le \frac{1}{4}$ b) $B=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ với x, y là số dương

Giải

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $a=\frac{1}{4}$, tức là $4a^2=\frac{1}{4}$ ta biến đổi như sau:

$$A=4a+\frac{1}{a}=\frac{4a^2+1}{a}=\frac{4a^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{a}=\frac{4a^2+\frac{1}{4}}{a}+\frac{3}{4a} \quad (1)$$

Do $a>0$ nên $\frac{4a^2+\frac{1}{4}}{a}\ge \frac{2.2a.\frac{1}{2}}{a}=2$ (2)

$0<a\le \frac{1}{4}\Rightarrow \frac{1}{a}\ge 4\Rightarrow \frac{3}{4a}\ge 3$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $A\ge 2+3=5$

$\min A=5\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

b) $B=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$$\Rightarrow B+2=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

Đặt $\frac{xy}{(x+y)^2}=a>0$ thì $B+2=4a+\frac{1}{a}$, trong đó $a\le \frac{1}{4}$ vì $\frac{xy}{(x+y)^2}\le \frac{1}{4}$

Theo câu a ta có $B+2\ge 5\Rightarrow B\ge 3$

$\min B=3\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{xy}{(x+y)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=y$

Ví dụ 123. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}$ với a, b, c dương và $a+b+c=1$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{4}{x+y}$ với x, y dương và $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{4}{c+1}=\frac{4}{c+a+b+c}=\frac{4}{(c+a)+(c+b)}\le\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}$$

Nhân hai vế với số dương ab ta có

$\frac{4ab}{c+1}\le\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}$. Do đó:

$$4A=\frac{4ab}{c+1}+\frac{4bc}{a+1}+\frac{4ac}{b+1}\le\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow 4A\le\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{c+b}+\frac{bc+ca}{a+b}=b+a+c=1$$

$$\max A=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

Ví dụ 124. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ với x,y dương và $x+y=1$;

b) $B=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{4}{z}$ với x,y,z dương và $x+y+z=3+\sqrt{2}$.

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức về cộng mẫu số $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$ với $x,y>0$ (xem ví dụ 99)

$$A=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{y}\ge\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{x+y}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$$

$$\min A=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\sqrt{2}\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}-1\\y=2-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$B=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{y}+\frac{2^2}{z}\ge\frac{\left(1+\sqrt{2}+2\right)^2}{x+y+z}=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}{3+\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$$

$$\text{minB}=3+\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{y}=\frac{2}{z}\\x+y+z=3+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{2}\\z=2\end{cases}$$

Ví dụ 125. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{c+2a}$ với a, b, c dương và $a+b+c=3$.

Giải

Cách 1. Xét $\frac{a^2}{a+2b}+\frac{a+2b}{9}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{a+2b}.\frac{a+2b}{9}}=\frac{2a}{3}$

$\Rightarrow\frac{a^2}{a+2b}\ge\frac{2a}{3}-\frac{a+2b}{9}=\frac{5a-2b}{9}$. Do đó

$$A=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{c+2a}\ge\frac{5a-2b}{9}+\frac{5b-2c}{9}+\frac{5c-2a}{9}=\frac{a+b+c}{3}=1$$

$\min A = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

b) Cách 2. về cộng mẫu số :

$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0$ (xem ví dụ 99)

$$A = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3a+3b+3c} = \frac{a+b+c}{3} = 1$$

$\min A = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Lưu ý. Giải thích việc xét $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{a+2b}{9}$ ở cách 1 như sau:

Với dự đoán cực trị xả ra tại $a = b = c = 1$, ta cần chọn số k như sao cho

$\frac{a^2}{a+2b} + \frac{a+2b}{k}$ tức là $\frac{1}{1+2} = \frac{1+2}{k} \Rightarrow k = 9$

Các cách xét $\frac{a^2}{a+2b} = a + 2b$ hoặc $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{a+2b}{4}$ đều không hiệu quả.

Ví dụ 126. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ với x, y, z dương, ta có:

$$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{3+a+b+c} \geq \frac{9}{4}$$

$\min A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

b) $B = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = \frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+1-1}{b+1} + \frac{c+1-1}{c+1}$

$$B = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c+1}\right) = 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) = 3 - A \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$\max B = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Lưu ý: Câu b có cách giải ngắn gọn hơn trong trường hợp $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 3$ như sau:

Từ bất đẳng thức $4a \leq (a+1)^2$, với $a > 0$ ta có:

$\frac{a}{a+1} \leq \frac{a+1}{4}$. Do đó $B \leq \frac{a+1}{4} + \frac{b+1}{4} + \frac{c+1}{4} = \frac{a+b+c+3}{4} \leq \frac{3}{2}$

$\max B = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 127. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}$ với a,b,c là số dương và $a+b+c=3$

Giải

Ta có $\frac{a}{b^2+1}=\frac{a+ab^2-ab^2}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$

Do đó:

$$A=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\left(a-\frac{ab}{2}\right)+\left(b-\frac{bc}{2}\right)+\left(c-\frac{ca}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2} \qquad (1)$$

Ta lại có $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3\Rightarrow-\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{-3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2};\min A=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 128. Cho biểu thức

$$A=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \text{ với } 1\le a\le b\le c\le 2.$$

a) Chứng minh rằng $A\le\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Giải

a) Ta có $A=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$. Do $1\le a\le b\le c$ nên $(a-b)(b^2-c^2)\ge 0$

$\Rightarrow ab^2-ac^2-b^3+bc^2\ge 0\Rightarrow b^3\le ab^2+bc^2-ac^2$.

Chia hai vế cho số dương abc được $\frac{b^2}{ac}\le\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$. (1)

Do $1\le a\le b$ nên $\frac{a^2}{bc}\le\frac{a^2}{ac}=\frac{a}{c}$. (2)

Do $1\le a\le c$ nên $\frac{c^2}{ab}\le\frac{2c}{ab}=\frac{2c}{b}$. (3)

Xảy ra đẳng thức khi a = b = 1 và c = 2.

b) Ta có $1\le b\le c\le 2$. nên $\frac{b}{c}\ge\frac{1}{2}$.

Đặt $\frac{b}{c}=x$ thì $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Theo Ví dụ 114, với $\frac{1}{2}\le x\le 1$ thì $max\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{2}$ tại $x=\frac{1}{2}$.

Do đó $max\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b=1,c=2$.

Tương tự $max\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1, c=2.$

Suy ra maxA = 5 $\Leftrightarrow a=b=1$ và c = 2.

BÀI TẬP

Bất đẳng thức dạng phân thức

91. Chứng minh các bất đẳng thức sau mà không dùng bất đẳng thức Cô – si:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ với a, b > 0;

b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$ với a, b, c > 0.

92. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\frac{a}{a^3+2}$ với a > 0;

b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{a+1}$ với a, b > 0.

93. Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b, c > 0

a) $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$;

b) $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$;

c) $\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}\geq 0.$

94. Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b, c > 0

a) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca$;

b) $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{2}$;

c) $\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}\geq\frac{a+b+c}{3}$.

95. Chứng minh bất đẳng thức

$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}\leq\frac{2}{xy+1}$ với $0\leq x\leq 1$ và $0\leq y\leq 1$.

96. Chứng minh bất đẳng thức

$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$ với $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$.

97. Cho $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ và xyz = 1.

Chứng minh rằng:

a) $(a-1)(b-1)(c-1)=abc$; b) $a^2+b^2+c^2\geq 1$.

Cực trị dạng phân thức

98. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\left|x+\frac{1}{x}\right|$.

99. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$;

b) $B=\frac{2x+1}{x^2+1}$.

100. Cho biểu thức $A=\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A với x ≥ 0.

101. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=x^2-3x+\frac{4}{x}$ với x > 0;

b) $B=x^2-x+\frac{1}{x}$ với x > 0;

c) $C=\frac{6x^2+1}{2x}$ với $x\ge 1$;

d) $D=x+\frac{1}{x+2}$ với $x\ge 0$;

e) $E=x^2+\frac{1}{x^2+2}$;

g) $G=x^4+\frac{4}{x}$ với $x\ge\sqrt{2}$.

102. Tìm các số m và n để biểu thức $A=\frac{mx+n}{x^2+1}$ nhận giá trị nhỏ nhất bằng -4, giá trị lớn nhất bằng 1.

103. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$;

b) $B=x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}$ với x > y > 0.

104. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{3x^2-4xy}{x^2+y^2}$;

b) $B=\frac{x-y}{x^4+y^4+6}$.

105. Cho các số dương x và y thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A=\frac{1}{xy}$;

b) $B=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$;

c) $C=x^2+y^2$;

d) $D=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$;

e) $E=\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$;

g) $G=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$;

h) $H=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$.

106. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A=x+2y+\frac{8}{x}+\frac{6}{y}$ với

a) x và y là các số dương;

b) x và y là các số dương thỏa mãn $x + y \geq 6$.

107. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ với x, y > 0 và $x + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{3}$;

b) $B = x + y + \frac{2}{x}$ với x, y > 0 và $x + 2y \geq 8$;

108. Tìm giá trị lớn nhất của

$A = \frac{1}{x^4 + y^2 + 2xy^2}$ với x, y > 0 và $xy \geq 1$.

109. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

a) $A = \frac{x + y}{x^4 - xy + y^2}$ với $1 \leq x \leq 2$ và $1 \leq y \leq 2$;

b) $A = \frac{2x + 3y}{2x + y + 2}$ với $4x^2 + y^2 = 1$.

110. Gọi số nhỏ nhất trong ba số dương x, y, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ làm m. Tìm giá trị nhỏ nhất của m.

111. Tìm giá trị lớn nhất của

$A = \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1}$.

112. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = \frac{a}{2b + 2c - a} + \frac{b}{2c + 2a - b} + \frac{c}{2a + 2b - c}$.

113. Cho các số dương a, b, c có a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;

b) $B = a^2 + b^2 + c^2$;

c) $C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$;

d) $D = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$.

114. Cho các số dương a, b, c có $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = \frac{1}{ab + 1} + \frac{1}{bc + 1} + \frac{1}{ca + 1}$;

b) $B = \frac{1}{(a + 2b)(a + 2c)} + \frac{1}{(b + 2a)(b + 2c)} + \frac{1}{(c + 2a)(c + 2b)}$.

115. Cho các số dương a, b, c có a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = \frac{(a + b)^2}{c} + \frac{(b + c)^2}{a} + \frac{(c + a)^2}{b}$;

b) $B = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2cb} + \frac{1}{c^2 + 2ab}$;

c) $C=\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}$;

d) $D=\frac{a}{b\left(a+b^2\right)}+\frac{b}{c\left(b+c^2\right)}+\frac{c}{a\left(c+a^2\right)}$.

117. Tìm giá trị lớn nhất của

$A=\frac{ab+c}{c+1}+\frac{bc+a}{a+1}+\frac{ca+b}{b+1}$. với a, b, c > 0 và a + b + c = 1.

118. Cho cá số dương a, b, c có a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

b) $B=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{c}{c+ab}$.

119. Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}$ với a, b, c > 0 và a + b + c = 3;

b) $B=\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}$ với a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 3.

120.Tìm giá trị lớn nhất của

$A=\frac{a}{1+b+ac}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}$ với $0\le a,b,c\le 1$.

121. Cho $0\le a,b,c\le 2$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $A=\frac{a}{bc+8}+\frac{b}{ca+8}+\frac{c}{ab+8}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

122. Tìm giá trị nhổ nhất của:

a) $A=\frac{b^2+c^2}{a^2}+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ với a, b, c > 0 và $a^2\ge b^2+c^2$;

b) $B=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}$ với $a^2+b^2+c^2=3$;

c) $C=\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}$ với a, b, c > 0;

d) $D=\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}$ với a, b, c > 0 và $a^2+b^2+c^2=3$.

123. Cho các số dương a, b, c có a + b + c = abc. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

b) $B=\frac{b-2}{a^2}+\frac{c-2}{b^2}+\frac{a-2}{c^2}$.

Chuyên đề 9

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG CĂN THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Chuyên đề này bao gồm hai nội dung:

- Bất đẳng thức dạng căn thức
- Cực trị dạng căn thức

Các bài toán về cực trị dạng căn thức thường khó, do đó ngoài dạng đơn giản, trong chuyên đề đã phân loại các dạng sau

- Dạng $\sqrt{f^2(x)}+\sqrt{g^2(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$
- Dạng $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ trong đó $f(x)-g(x)=m>0$
- Dạng $a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$
- Dạng $f(x)+\sqrt{g(x)}$
- Dạng $f(x)+x\sqrt{g(x)}$
- Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}+\sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x)+h(x)$ và .. đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}-\sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x)-h(x)$ và $f(x)-k(x)$ đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f+h$ và $g+k$ đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f-h$ và $g-k$ đều là hằng số
- Dạng chứa phân thức

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG HÌNH HỌC

Xuân đố Mai chứng minh bất đẳng thức sau bằng hình học

$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\le\sqrt{ab}$

Mai chưa tìm ra cách làm. Bạn hãy giúp Mai

Giải

Kẻ đường vuông góc $CH = 1$ và các đường xiên $CA = \sqrt{a}$

$CB = \sqrt{b}$ (H nằm giữa A và B, h.4)

Khi đó $HA = \sqrt{a-1},\ HB = \sqrt{b-1}$

Ta có $AB.CH = 2S_{ABC} \le CA.CB$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}\right).1 \le \sqrt{a}.\sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \le \sqrt{ab}$

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG CĂN THỨC

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \le \sqrt{ab} \quad (1)$$

Giải

Cách 1 . (đặt ẩn phụ và biến đổi tương đương)

Đặt $a - 1 = x,\ \ b - 1 = y$. Ta có

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{(x+1)(y+1)}$

$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \le xy + x + y + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le xy + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 1\right)^2 \ge 0$, đúng. Vậy (1) đúng

Xảy ra bất đẳng thức khi và chỉ khi $xy = 1 \Leftrightarrow a + b = ab$

Cách 2. (dung bất đẳng thức cÔ-si)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a-1}{ab}} + \sqrt{\dfrac{b-1}{ab}} \le 1$. Gọi vế trái là A ta có

$$2A = 2\sqrt{\frac{a-1}{a}.\frac{1}{b}} + 2\sqrt{\frac{b-1}{b}.\frac{1}{a}} \le \left(\frac{a-1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{b-1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 2$$

nên $A \le 1$. Vậy (1) đúng

Cách **3** (dung bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

$\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)^2=\left(\sqrt{a-1}.1+1.\sqrt{b-1}\right)^2\le(a-1+1)(1+b-1)=ab$

$\Rightarrow\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\le\sqrt{ab}$

Cách 4. (dung hình học)

Xem cách giải ở phần *Tổng quan về chuyên đề*

Ví dụ 130. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh bất đẳng thứ

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le 2(a+b+c)$$

Giải

Ta có .. nên

$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\dfrac{a+b+a+c}{2}=a+\dfrac{b+c}{2}$. Từ đó

$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le\left(a+\dfrac{b+c}{2}\right)+\left(b+\dfrac{c+a}{2}\right)+\left(c+\dfrac{a+b}{2}\right)$

$=2(a+b+c)$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 131. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{x+y}{4}\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$$

Giải

Ta có $\dfrac{(x+y)^2}{2}+\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+y}{2}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)\ge\sqrt{xy}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)$ (1)

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{xy}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$ (2)

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{xy}\left(x+y+\dfrac{1}{2}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left[\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2\right]\geq 0$, đúng

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=0$ hoặc $x=y=\frac{1}{4}$

Ví dụ 132. . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\geq 2 \text{ với } a,b,c>0$$

Giải

Gọi vế trái là A. Ta có:

$$\sqrt{\frac{2c}{a+b}}=\frac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}}\geq\frac{2c}{\frac{2c+a+b}{2}}=\frac{4c}{2c+a+b} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ với $x,y>0$ ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{4(a+b+c)}{2c+a+b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A+2\geq\frac{4(a+b+c)+4c}{2c+a+b}=4\Rightarrow A\geq 2$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$

II. CỰC TRI DẠNG CĂN THỨC

1. Dạng $\sqrt{f^2(x)}+\sqrt{g^2(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của dạng trên, có hai cách:

- Đưa về bất đẳng thức $|f(x)|+|g(x)|\geq f(x)+g(x)=m$
- Xét bình phương của biểu thức

Ví dụ 133. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge\frac{1}{2}$

Cách 1. Đặt $2x-1=y$. Ta có:

$$A\sqrt{2}=\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}$$
$$=\sqrt{y+1+2\sqrt{y}}+\sqrt{y+1-2\sqrt{y}}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{y}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}=\sqrt{y}+1+\left|1-\sqrt{y}\right|\ge\sqrt{y}+1+1-\sqrt{y}=2$$
$$\Rightarrow A\ge\sqrt{2}$$
$$\min A=\sqrt{2}\Leftrightarrow y=1\Leftrightarrow x=1$$

Cách 2. Ta có: $A^2=x+\sqrt{2x-1}+x-\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2-(2x-1)}$

$$=2x+2\left|1-x\right|\ge 2x+2(1-x)=2$$

$$\min A=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$$

2. Dạng $\sqrt{f^2(x)}-\sqrt{g^2(x)}$ trong đó $f(x)-g(x)=m>0$

Để tìm giá trị lớn nhất của dang trên, ta dung bất đẳng thức

Xảy ra đẳng thức khi và chì khi $g(x)=0$ hoặc $f(x)=g(x)$

Ví dụ 134. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{x^2-x-6}$

Giải

ĐKXĐ: $x\le -2$ hoặc $x\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a-b}$ ta có

$$A\le\sqrt{\left(x^2-x+3\right)-\left(x^2-x-6\right)}=\sqrt{9}=3$$

$$\max A=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-6=0\\x^2-x+3=x^2-x-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\end{array}\right.$$

3. Dạng $a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$

Để tìm giá trị lớn nhất của dạng trên, ta dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$\left(a\sqrt{f}+b\sqrt{g}\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)+\left(f+g\right)=a^2+b^2+m$

Trong một số trường hợp, có thể xét $\left(a\sqrt{f}+b\sqrt{g}\right)^2$ rồi dung bất đẳng thức Cô-si

Trong một số trường hợp, có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của dạng tr6n bằng cách xét bình phương của biểu thức

Với dạng $\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)}$ trong đó $f\left(x\right)+g\left(x\right)=m$, ta có thể tìm được giá rị nhỏ nhất bằng cách xét bình phương của biểu thức hoặc dung bất đẳng thức

$\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)} \ge \sqrt{f\left(x\right)+g\left(x\right)}=\sqrt{m}$

Ví dụ 135. Cho biểu thức $A=3\sqrt{x}+\sqrt{10-x}$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

b) Tìm giá trị lớn nhất của A

Giải

ĐKXĐ: $0 \le x \le 10$

a) $A^2=9x+\left(10-x\right)+6\sqrt{x\left(10-x\right)}$

$=8x+10+6\sqrt{x\left(10-x\right)} \ge 10$ (do $x \ge 0$)

$\min A=\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\left(10-x\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

b) Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$A^2=\left(3\sqrt{x}+1.\sqrt{10-x}\right)^2 \le \left(3^2+1^2\right)\left(x+10-x\right)=100$

$\max A=10 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{3}=\sqrt{10-x} \Leftrightarrow =9$

Lưu ý. Có thể giải câu a) bằng cách dung bất đẳng thức Cô-si

$2A=2\sqrt{9x}+2.\sqrt{1.\left(10-x\right)} \le \left(9+x\right)+\left(1+10-x\right)=20$

$\max A=10 \Leftrightarrow \begin{cases} 9=x & \left(1\right) \\ 1=10-x & \left(2\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=9$

(Ta gặp may mắn vì $x=9$ ở $\left(1\right)$ thỏa mãn $\left(2\right)$)

$2A = 6\sqrt{x} - 4\sqrt{1-4x} = 3\sqrt{4x} + 4\sqrt{1-4x}$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$\left(2A\right)^2 = \left(3\sqrt{4x} + 4\sqrt{1-4x}\right)^2 \le \left(3^2 + 4^2\right)\left(4x + 1 - 4x\right) = 25$$

$$\Rightarrow 2A \le 5 \Rightarrow A \le \frac{5}{2}$$

$$\max A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x}}{3} = \frac{\sqrt{1-4x}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{100}$$

Lưu ý: Cũng có thể viết dưới dạng $A = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{1}{4} - x}$ rồi dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki được: $A^2 \le \left(3^2 + 4^2\right)\left(x + \frac{1}{4} - x\right) = \frac{25}{4}$

$$\Rightarrow A \le \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 137. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A = \sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} + \sqrt{2-c}$;

b) $B = \sqrt{5-a} + \sqrt{5-b} + \sqrt{5-c}$.

Giải: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$\sqrt{2-a} = \sqrt{1.(2-a)} \ \frac{1+(2-a)}{2} = \frac{3-a}{2}$. Từ đó

$$2A \le (3-a) + (3-b) + (3-c) = 9 - (a+b+c) = 9 - 3 = 6 \Rightarrow A \le 3$$

$$\max A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - a \\ 1 = 2 - b \\ 1 = 2 - c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

b) Áp dụngbất đẳng thức Cô-Si:

$2\sqrt{5-a} = \sqrt{4(5-a)} \le \frac{4+5-a}{2} = \frac{9-a}{2}$.Từ đó

$$4B = (9-a) + (9-b) + (9-c) = 27 - (a+b+c) = 27 - 3 = 24 \Rightarrow B \le 6$$

$$\text{Max } B = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 5 - a \\ 4 = 5 - b \\ 4 = 5 - c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Lưu ý: ở câu a) ta viết $\sqrt{2-a} = \sqrt{1.(2-a)}$, biểu thức trong dấu căn nhân với k_1=1.

Ở câu b) ta viết $2\sqrt{5-a} = \sqrt{4(5-a)}$, biểu tượng trong đấu căn nhân với k_2=4

Có sự khác nhau nói trên vì ở bất đẳng thức $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, đẳng thức xảy ra tại $x = y$, nên ta phải trọn k_1 và k_2 sao cho $k_1 = 2 - a$ và $k_2 = 5 - a$.

Ở hai câu a và b do vai trò bình đẳng của a, b, c ta dự đoán cực trị xảy ra a = b = c = 1, do đó $k_1 = 2 - a = 2 - 1 = 1$ và $k_2 = 5 - a = 5 - 1 = 4$

4. Dạng $f(x) + \sqrt{g(x)}$

Để tìm giá tri lớn nhất của dạng trên, từng trường hợp mà ta sử dụng bất đẳng thức Cô-si hay Bu-nhi-a-cốp-xki.Cần chú ý những dạng cơ bản sau:

a) Dạng A=$mx + \sqrt{ax+b}$ trong đó $m + \frac{a}{2} = 0$.Dùng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{1.(ax+b)} \le \frac{1+b+ax}{2} \quad \Rightarrow A \le mx + \frac{1+b}{2} + \frac{ax}{2} = \frac{1+b}{2}$$

b) Dạng B=$= mx + n\sqrt{a - x^2}$ .Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-cốp-xki ta có

$$B^2 = (mx + n\sqrt{a-x^2})^2 \le (m^2 + n^2)(x^2 + a - x^2) = a(m^2 + n^2)$$

Ví dụ 138. Tìm giá trị lớn nhất của $\mathrm{A} = x + \sqrt{1-2x}$.

ĐKXĐ : $x \le \frac{1}{2}$

Cách 1.Áp dụng bất đẳng thức cô-si:

$$\mathrm{A} = x + \sqrt{1.(1-2x)} \le x + \frac{1+(1-2x)}{2} = 1.$$

$$max\mathrm{A} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow x = 0.$$

Cách 2.Đặt $\sqrt{1-2x} = y$ thì $x = \frac{1-y^2}{2}$. Ta có

$$\mathrm{A} = \frac{1-y^2}{2} + y \Rightarrow 2\mathrm{A} = 1 - y^2 + 2y = 2 - (y-1)^2 \le 2.$$

$$max\mathrm{A} = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ví dụ 139. Tìm giá trị lớn nhất của $\mathrm{A} = x = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$.

Giải:

ĐKXĐ : $-3 \le x \le 1$.

Cách 1. $\mathrm{A} = x + \sqrt{4 - (x+1)^2}$. Đặt $x + 1 = y$ ta có

$$\mathrm{A} = -1 + y + \sqrt{4 - y^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$\left(1.y + 1.\sqrt{4-y^2}\right)^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(y^2 + 4 - y^2\right) = 8$$

$\Rightarrow y+\sqrt{4-y^2}\le\sqrt{8}\Rightarrow \mathrm{A}\le -1+\sqrt{8}=2\sqrt{2}-1.$

$max\mathrm{A}=2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow y=\sqrt{4-y^2}\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$

Cách 2. Gọi a là giá trị của biểu thức A. Ta có

$a=x+\sqrt{-x^2-2x+3}$

$\Leftrightarrow a-x=\sqrt{-x^2-2x+3}.(1)$ Với $a\ge x$ thì

$(1)\Leftrightarrow a^2+x^2-2ax=-x^2-2x+3$

$\Leftrightarrow 2x^2-2(a-1)x+(a^2-3)=0$

Để tồn tại x, phải có $\Delta'\ge 0\Rightarrow a^2+2a-7\le 0$

$\Rightarrow (a+1)^2\le 8\Rightarrow a\le 2\sqrt{2}-1$

$max\ \mathrm{A}=2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1,$ khi đó $a=2\sqrt{2}-1,$ thỏa mãn $x\le a$

Ví dụ 140. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\mathrm{A}=x+\sqrt{1-2x-2x^2}$$

Giải:

ĐKXĐ : $1-2x-2x^2\ge 0$

Có thể giải hai cách như ở Ví dụ 139.Cách giải dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki như sau:

$\mathrm{A}=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1}{2}-x-x^2}=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}.$

Đặt $x+\frac{1}{2}=y,$ ta có $\mathrm{A}=-\frac{1}{2}+y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}.$

Xét $\left(1.y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\right)^2\le\left[1^2+(\sqrt{2})^2\right]\left(y^2+\frac{3}{4}-y^2\right)=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\le\frac{3}{2}\Rightarrow \mathrm{A}\le -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

Ví dụ 140. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$\mathrm{A}=\mathrm{x}+\sqrt{1-2\mathrm{x}-2\mathrm{x}^2}$$

Giải:

Có thể giải hai cách như ở ví dụ 139. Cách giải dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki như sau:

$\mathrm{A}=\mathrm{x}+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1}{2}-\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}=\mathrm{x}+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\mathrm{x}+\frac{1}{2}\right)^2}$

Đặt $\mathrm{x}+\frac{1}{2}=\mathrm{y}$, ta có $\mathrm{A}=-\frac{1}{2}+\mathrm{y}+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-\mathrm{y}^2}$

Xét $\left(1.y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\right)^2 \le \left[1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(y^2+\frac{3}{4}-y^2\right)=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2} \le \frac{3}{2} \Rightarrow A \le -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1.$

Max $A=1 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn $1-2x-2x^2 \ge 0$

Lưu ý: Có thể giải bài trên bằng cách dùng bất đẳng thức Cô-si:

$A=x+\sqrt{1.\left(1-2x-2x^2\right)} \le x+\frac{1+\left(1-2x-2x^2\right)}{2}=1-x^2 \le 1$

$\max A=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1=1-2x-2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

(Ta gặp may mắn khi x = 0 thỏa mãn $1=1-2x-2x^2$)

5. Dạng $f(x)+x\sqrt{g(x)}$

Dùng bất đẳng thức Cô-si hoặc Bu-nhi-a-cốp-xki. Cần chú ý những dạng cơ bản sau:

a) Dạng $A=x\sqrt{a-x^2}$

Dùng bất đẳng thức Cô-si: $|A|=|x|\sqrt{a-x^2} \le \frac{x^2+\left(a-x^2\right)}{2}=\frac{a}{2}$

b) Dạng $B=mx+x\sqrt{a-x^2}$

Trước hết xét:

$m+\sqrt{a-x^2}=\sqrt{m}.\sqrt{m}+1.\sqrt{a-x^2} \le \sqrt{(m+1)\left(m+a-x^2\right)}.$

Sau đó đưa về dạng trên

Ví dụ 141. Tìm giá trị nhỏ nhất,giá trị lớn nhất của:

$$A=3x+x\sqrt{5-x^2}.$$

Giải:

ĐKXĐ: $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

$A=x\left(3+\sqrt{5-x^2}\right).$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki:

$\left(3+1.\sqrt{5-x^2}\right)^2=\left(\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.\sqrt{5-x^2}\right)^2 \le (3+1)\left(3+5-x^2\right)$

$=4\left(8-x^2\right)$

$\Rightarrow 3+\sqrt{5-x^2} \le 2\sqrt{8-x^2}$

$\Rightarrow |A| \le 2|x|\sqrt{8-x^2} \le x^2+\left(8-x^2\right)=8$

$$|A| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5-x^2} \\ x^2 = 8 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

min $A = -8 \Leftrightarrow x = -2$; max $A = 8 \Leftrightarrow x = 2$

6. Dạng $\sqrt{f(x).g(x)} + \sqrt{h(x)k(x)}$ trong đó $f(x) + h(x)$ và $g(x) + k(x)$ đều là hằng số

Ví dụ 142. Cho $A = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{18 + 3x - x^2}$

a) Tìm giá trị lớn nhất của A

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Giải:

$A = \sqrt{x(5-x)} + \sqrt{(6-x)(x+3)}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ -3 \le x \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 5$

a) Do $0 \le x \le 5$ nên có thể viết

$A = \sqrt{x}.\sqrt{5-x} + \sqrt{6-x}.\sqrt{x+3}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ki ta có:

$A^2 + \left(\sqrt{x}.\sqrt{5-x} + \sqrt{6-x}.\sqrt{x+3}\right)^2 \le (x + 6 - x)(5 - x + x + 3) = 48$

$\Rightarrow A \le 4\sqrt{3}$

max $A = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{5-x} = \dfrac{6-x}{x+3} \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{7}$

b) $A = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{(5x - x^2) + (18 - 2x)}$ (1)

Do $0 \le x \le 5$ nên $8 \le 18 - 2x \le 18$ (2)

Do $5x - x^2 \ge 0$ nên từ (1) và (2) suy ra

$A \ge \sqrt{18 - 2x} \ge \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$\min A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5.$

Lưu ý. Mặc dù $A^2 \le 48$ nhưng không thể kết luận rằng $\min A = -\sqrt{48}$ vì ta luôn có $A \ge 0$.

7. Dạng $\sqrt{f(x).g(x)} - \sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x) - h(x)$ và $g(x) - k(x)$ đều là hằng số

Ví dụ 143. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = \sqrt{(7-x)(x+1)} - \sqrt{x(4-x)}$

Giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 4.$

Do $0 \le x \le 4$ nên ta có thể viết

$A = \sqrt{7-x}.\sqrt{x+1} - \sqrt{x}.\sqrt{4-x}.$

Xét $(7-x)(x+1) - x(4-x) = 2x + 7 > 0$ (do $x \ge 0$) nên $A > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $(ab - cd)^2 \ge (a^2 - c^2)(b^2 - d^2)$ (xảy ra đẳng thức tại $ad = bc$) và viết lại A dưới dạng

$A=\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.\sqrt{4-x}$, ta có

$A^2 \ge \left[(7-x)-(4-x)\right].\left[(x+1)-x\right]=3.$

Do $A>0$ nên $A\ge\sqrt{3}.$

$\min A=\sqrt{3} \Leftrightarrow (7-x)x=(x+1)(4-x) \Leftrightarrow x=1.$

8. Dạng $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f+h$ và $k+g$ đều là hằng số

Ví dụ 144.

a) Chứng minh bất đẳng thức

$\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2} \ge \sqrt{(f+h)^2+(g+k)^2}.$ (1)

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+8x+17}.$

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow f^2+g^2+h^2+k^2+2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge f^2+h^2+2fh+g^2+k^2+2gk$

$\Leftrightarrow \sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge fh+gk$

$\Leftrightarrow f^2h^2+f^2k^2+g^2h^2+g^2k^2 \ge f^2h^2+g^2k^2+2fhgk$

$\Leftrightarrow (fk-gh)^2 \ge 0$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi fk = gh.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$A=\sqrt{x^2+2^2}+\sqrt{(4-x)^2+1} \ge \sqrt{(x+4-x)^2+(2+1)^2}=5$

minA = 5 $\Leftrightarrow x.1=2(4-x) \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}.$

9. Dạng $\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó f – g và g – k đều là hằng số

Ví dụ 145

a) Chứng minh bất đẳng thức

$\left|\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}\right| \le \sqrt{(f-h)^2+(g-k)^2}.$ (1)

b) Tìm giá trị lớn nhất của

$A=\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2+2x+5}.$

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow f^2+g^2+h^2+k^2-2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)} \ge f^2+h^2-2fh+g^2+k^2-2gk$

$\Leftrightarrow fh+gk \le \sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)}$ (2)

Nếu fh + gk < 0 thì (2) đúng.

Nếu fh + gk ≥ 0 thì

$(2) \Leftrightarrow f^2h^2+g^2k^2+2fhgi \le f^2h^2+f^2k^2+g^2h^2+g^2k^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (fk-gh)^2$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\begin{cases} fk = gh \\ fh + gk \ge 0. \end{cases}$

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$$|A| = \left|\sqrt{(x+2)^2 + 3^2} - \sqrt{(x+1)^2 + 2^2}\right| \le \sqrt{(x+2-x-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$max|A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2) = 3(x+1) \\ (x+2)(x+1) + 3.2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Với x = 1 thì $A = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

Vậy $\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1.$

10. Dạng chứa phân thức

Ví dụ 146. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x+1}{\sqrt{x-4}}.$$

Giải

ĐKXĐ: x > 4.

Đặt $\sqrt{x-4} = y > 0$ thì $x = y^2 + 4.$ Ta có

$$A = \frac{y^2+5}{y} = y + \frac{5}{y} \ge 2\sqrt{y.\frac{5}{y}} = 2\sqrt{5}.$$

$$\min A = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow y = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow x = 9.$$

Ví dụ 147. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Giải

ĐKXĐ: -3 < x < 3. Do đó A > 0.

Gọi a là trị của biểu thức A. Ta có

$$a = \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow (a^2+1)x^2 + 10x + (25 - 9a^2) = 0.$$

Để tồn tại x, phải có $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow a^2(9a^2 - 16) \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \frac{4}{3}.$

$$\min A = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}.$$

BÀI TẬP

Bất đẳng thức dạng căn thức

124. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$;

b) $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \le xy$;

c) $\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \ge 2,5$ với x, y > 0 ;

d) $\frac{1+a+b+c}{2} \geq \sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ với a, b, c > 0 và abc = 1 ;

e) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ với a, b, c > 0 và $a^2+b^2+c^2=1$.

Cực trị dạng căn thức

125. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$;

b) $B=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2-24x+16}$.

126. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-5}$.

127. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

a) $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$;

b) $B=4\sqrt{x}+3\sqrt{1-x}$.

128. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=\sqrt{2x+4}+\sqrt{2-x}$;

b) $B=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$;với a, b, c > 0 và $a^2+b^2+c^2=3$;

c) $C=\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}$ với $a \geq 1, b \geq 1$ và ab = 4;

d) $D=\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}$ với x, y > 0 và $x^2+y^2=8$.

129. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=-2x+\sqrt{9-x^2}$;

b) $B=x+\sqrt{-x^2+2x+3}$;

c) $C=2x+\sqrt{-x^2-8x-11}$.

130. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của: $A=x\sqrt{1-4x^2}$.

131. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A=\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{2x-x^2+3}$.

132. Tìm giá trị nhr nhất của:

a) $A=\sqrt{x(3-x)}-\sqrt{(2-x)(x-1)}$;

b) $B=\sqrt{16-(x-2)^2}-\sqrt{1-x^2}$.

133. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

134. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$;

b) $B=\frac{\sqrt{x-4}}{x+1}$.

Ví dụ 136. Tìm giá trị lớn nhất của

$A=3\sqrt{x}+2\sqrt{1-4x}$

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN, ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1

BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. Bạn đọc tự giải.

2. Do $a^2+b^2+c^2=14$ nên $a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=196.$ (1)

Do a + b + c = 0 nên $a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=0$, lại có

$a^2+b^2+c^2=14$ nên ab + bc + ca = -7.

Suy ra $\left(ab+bc+ca\right)^2=49\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)=49,$

Lại có a + b + c = 0 nên $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=49.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^4+b^4+c^4=196-2.49=98.$

3. Ta có $n^2=\left(n-1\right)\left(n+1\right)+1$

$=\underbrace{99...9}_{49\ chu\ so}\ 8.10^{50}\ +1=\underbrace{99...9}_{49\ chu\ so}\ 8\ \underbrace{00...0}_{49\ chu\ so\ 0}\ 1.$

Tổng các chữ số của n^2 bằng 9.49 + 8 + 1 = 9.50 = 450.

4. a) $x^8+x+1=x^8-x^2+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

Đáp số: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right).$

b) $a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right)$

$=a^3\left(b^2-c^2\right)-b^3\left[\left(b^2-c^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\right]+c^3\left(a^2-b^2\right)$

$=\left(b^2-c^2\right)\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2-b^2\right)\left(b^3-c^3\right).$

Đáp số: $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)\left(ab+bc+ca\right).$

c) $\left(x+y\right)^5-x^5-y^5=5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4$

$=5xy\left(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3\right).$

Phân tích đa thức trong dấu ngoặc được

$x^3+y^3+2xy\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x^2+xy+y^2\right).$

Đáp số: $5xy\left(x+y\right)\left(x^2+xy+y^2\right).$

d) $\left(a+b\right)^2-a^7-b^7=7ab\left(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^2+b^5\right).$

Gọi biểu thức trong dấu ngoặc là A, ta có

$A=\left(a^5+b^5\right)+3ab\left(a^3+b^3\right)+5a^2b^2\left(a+b\right)$

$=\left(a+b\right)\left[a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+3ab\left(a^2-ab+b^2\right)+5a^2b^2\right].$

Gọi biểu thức trong dấu ngoặc vuông là B, rút gọn ta được

$B = a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^2 + b^4$

$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2ab\left(a^2 + b^2\right) + a^2b^2$

$= \left(a^2 + b^2 + ab\right)^2$.

Vậy $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

5. Đặt $A = (a+b+c)^5 - a^5 - \mathbf{b}^5 - c^5$. Hãy lập luận để có

$(a+b+c)^5 - a^5 - \mathbf{b}^5 - c^5 = (a+b)(b+c)(c+a)\left[m\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + n(ab + bc + ca)\right]$.

Thay a = 0, b = c = 1 vào, ta được 30 = 1.2.1(2m + n) nên 2m + n = 15.

Thay a = 0, b = 1, c = 2 vào, ta được 240 = 2.2.2(3m + 3n) nên m + b = 10.

Từ đó m = n = 5.

Đáp số: $A = 5(a+b)(b+c)(c+a)\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$.

6. Đặt $A = \left(a^2 + b^2 - 1\right)^2 + \left(c^2 + d^2 - 1\right)^2 + 2(ac + bd)^2$.

Do giả thiết nên A = 0.

Đặt $B = \left(a^2 + c^2 - 1\right)^2 + \left(b^2 + d^2 - 1\right)^2 + 2(ab + cd)^2$. Ta sẽ chứng minh B = 0.

Xét hiệu A – B, hãy chứng minh A – B = 0 để suy ra B = 0.

7. Từ (ad + bc)(ac + bc) = cd suy ra

$a^2cd + abd^2 + abc^2 + b^2cd = cd$

$\Rightarrow cd\left(a^2 + b^2\right) + ab\left(c^2 + d^2\right) = cd \qquad (1)$

Do a + b = 1 nên $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$.

Thay vào (1) rồi rút gọn được ab(c – d)^2 = 0.

Từ đó suy ra a = 0 hoặc b = 0 hoặc c = d.

8. Từ giả thiết suy ra a + b + c = $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$. $\qquad (1)$

Cũng từ giả thiết ta có

$ax + by + cz = x\left(x^2 - yz\right) + y\left(y^2 - xz\right) + z\left(z^2 - xy\right) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right)$ (theo một hằng đẳng thức).

Kết hợp với (1) suy ra ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c).

9. Gọi bốn số phải tìm là a, b, c, d. Ta có

$a = (b + c + d)^2$ và $b = (a + c + d)^2$ nên

$b - a = (a + c + d)^2 - (b + c + d)^2 = (a - b)(a + b + 2c + 2d)$

$\Rightarrow (a - b)(a + b + 2c + 2d + 1) = 0.$

Do $a, b, c, d \geq 0$ nên a = b. Tương tự ta được a = b = c = d.

Suy ra $a = (a + a + a)^2 \Rightarrow a(9a - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$

Đáp số: Mỗi số bằng 0 hoặc bằng $\dfrac{1}{9}$.

10. Đặt $A=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$.

Ta có $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$ nên

$A=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

11. Ta có $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2\Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab.$

Tương tự $b^2+c^2-a^2=-2bc,\quad a^2+c^2-b^2=-2ac.$

Suy ra $A=\frac{1}{-2ab}+\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}=\frac{a+b+c}{-2abc}=0.$

12. Từ giả thiết suy ra a + b + c = 2(ax + by + cz) = 2(c + cz) = 2c(z + 1) nên $\frac{1}{z+1}=\frac{2c}{a+b+c}$.

Tương tự $\frac{1}{x+1}=\frac{2a}{a+b+c},\frac{1}{y+1}=\frac{2b}{a+b+c}$.

Suy ra $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2.$

13. Theo giả thiết $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$. (1)

Đặt $\frac{a}{b^2}=x,\frac{b}{c^2}=y,\frac{c}{a^2}=z$ thì (1) trở thành

$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+xz+xy}{xyz}$. (2)

Do abc = 1 nên $xyz=\frac{a}{b^2}.\frac{b}{c^2}.\frac{c}{a^2}=\frac{1}{abc}=1.$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra x + y + z = xy + yz + xz (4)

Ta cần chứng minh trong ba số x, y, z tồn tại một số bằng 1 bằng cách chứng minh $(x-1)(y-1)(z-1)=0.$

Hãy chứng minh $(x-1)(y-1)(z-1)=(xyz-1)+(x+y+z-xy-yz-xz)$ rồi sử dụng (3) và (4).

14. a) Ta có $1-\frac{1}{1+2+...+n}=1-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$. Do đó

$A=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.....\frac{99.102}{100.101}=\frac{1.2....99}{2.3....100}.\frac{4.5....102}{3.4....101}=\frac{1}{100}.\frac{102}{3}=\frac{17}{50}.$

b) Đặt $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{98}{99}=x$ thì

$B=\left(x+\frac{99}{100}\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)-\left(\frac{1}{2}+x+\frac{99}{100}\right)x$..Rút gọn biểu thức được $B=\frac{9}{200}$.

c) Ta có $1-\frac{4}{(2n+1)^2}=\frac{(2n-1)(2n+3)}{(2n+1)^2}$. Do đó

$C=\frac{1.5}{3^2}.\frac{3.7}{5^2}.....\frac{97.101}{99^2}=\frac{1.3.....97}{3.5....99}.\frac{5.7.....101}{3.5.....99}=\frac{1}{99}.\frac{101}{3}=\frac{101}{297}.$

d) Ta có $\frac{(2n+1)^3+n^3}{(n+1)^3-n^3}=\frac{(3n+1)\left[(2n+1)^2-n(2n+1)+n^2\right]}{3n^2+3n+1}=\frac{(3n+1)(3n^2+3n+1)}{3n^2+3n+1}=3n+1.$ Do đó

$D=(3.1+1)+(3.2+1)+...+(3.20+1)=3(1+2+....+20)+20=650.$

15. Điều kiện $x\ge 0, y\ge 0, x+y\ge m.$

Ta có

$\sqrt{x+y-m}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{m}\Leftrightarrow\sqrt{x+y-m}+\sqrt{m}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

Bình phương hai vế ta được:

$x+y-m+m+2\sqrt{m(x+y-m)}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow\sqrt{m(x+y-m)}=\sqrt{xy}\Leftrightarrow mx+my-m^2-xy=0$

$\Leftrightarrow(x-m)(m-y)=0.$

Vậy x = m và y ≥ 0 hoặc y = m và x ≥ 0.

16. Ta tính được $a_2=1-\sqrt{2}, a_3=-(1+\sqrt{2}), a_4=1+\sqrt{2}, a_5=\sqrt{2}-1.$

Suy ra $a_1=a_5=a_9=...=a_{97}$

$a_4=a_8=a_{12}=...=a_{100}$

Vậy $a_{100}=1+\sqrt{2}.$

17. Ta có $b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+c)(b+a).$

Tương tự, $c^2+1=(c+a)(c+b);\ a^2+1=(a+b)(a+c).$

Suy ra $\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}=\frac{(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)}{(a+b)(a+c)}=(b+c)^2$

Do đó $A=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)=2.$

18. Ta có $m-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}.$

Lập phương hai vế rồi rút gọn ta được

$m^3+6m-3=\sqrt{2}(3m^2+2).$

Bình phương hai vế rồi rút gọn được

$m^6-6m^4-6m^3+12m^2-36m+1=0.$

Phương trình lập được là

$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0.$

Chuyên đề 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

19. a) Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải.

Rút gọn được $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất x = a + b + c.

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì phương trình có nghiệm là số thực bất kì.

b) $\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}+\frac{x}{ab}=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

$\Leftrightarrow x.\frac{a+b+c}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab}{abc}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)x=(a+b+c)^2$.

Nếu $a+b+c\neq 0$ (và a, b, c ≠ 0) thì phương trình có nghiệm duy nhất x = a + b + c.

Nếu $a+b+c=0$ (và a, b, c ≠ 0) thì phương trình có nghiệm là số thực bất kì.

c) ĐKXĐ: $x\neq a, x\neq b$.

Đặt $x-a=y\neq 0$ đặt x – b = z ≠ 0. Ta có

$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=2\Leftrightarrow y^2+z^2=2yz\Leftrightarrow (y-z)^2=0\Leftrightarrow y=z.$

Ta có x – a = x – b $\Leftrightarrow 0x=a-b$.

Nếu a = b thì phương trình có nghiệm là số thực bất kì khác a.

Nếu a ≠ b thì phương trình vô nghiệm.

20. a) $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=4.$

Xét $|x+1|+|x+3|=|-x-1|+|x+3|\geq -x-1+x+3=2;$

$|x+1|+|x+3|=2\Leftrightarrow \begin{cases}-x-1\geq 0\\ x+3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x\leq -1.$

Xét $|x+2|+|x+4|=|-x-2|+|x+4|\geq -x-2+x+4=2;$

$|x+2|+|x+4|=2\Leftrightarrow \begin{cases}-x-2\geq 0\\ x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -4\leq x\leq -2.$

Vế trái của (1) lớn hơn hoặc bằng 4. Do đó

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}-3\leq x\leq -1\\ -4\leq x\leq -2\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x\leq -2.$

b) $|x-3|+|x-1|+|x+1|+|x+3|+|x+5|=12.$ (1)

Hãy chứng minh

$|x-3|+|x+5|\geq 8$: xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow -5\leq x\leq 3;$

$|x-1|+|x+3|\geq 4$: xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1;$

$|x+1|\geq 0;$: xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow x=-1.$

Vế trái của (1) lớn hơn hoặc bằng 12.

Do đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}-5\leq x\leq 3\\ -3\leq x\leq 1\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$

21. $|x-a|-|2x-4|=1.$ (1)

Xét bốn trường hợp:

a) $x \ge a$ và $x \ge 2$.

$(1) \Leftrightarrow x - a - (2x - 4) = 1 \Leftrightarrow x = 3 - a.$

$$\begin{cases} 3 - a \ge a \\ 3 - a \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 1,5 \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \le 1 \qquad (2)$$

b) $x \ge a$ và $x \le 2$.

$(1) \Leftrightarrow x - a + (2x - 4) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{a+5}{3}.$

$$\begin{cases} \dfrac{a+5}{3} \ge a \\ \dfrac{a+5}{3} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 2,5 \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \le 1 \qquad (3)$$

c) $x \le a$ và $x \ge 2$.

$(1) \Leftrightarrow a - x - (2x - 4) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{a+3}{3}.$

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{3} \le a \\ \dfrac{a+3}{3} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 1,5 \\ a \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 3. \qquad (4)$$

d) $x \le a$ và $x \le 2$.

$(1) \Leftrightarrow a - x + (2x - 4) = 1 \Leftrightarrow x = 5 - a.$

$$\begin{cases} 5 - a \le a \\ 5 - a \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2,5 \\ a \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 3 \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4), (5) suy ra: Để (1) có nghiệm duy nhất thì

Hoặc $\begin{cases} a \le 1 \\ 3 - a = \dfrac{a+5}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \ge 3 \\ \dfrac{a+3}{3} = 5 - a \end{cases}$

Tức là a = 1 hoặc a = 3.

22. a) $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 3) = 4 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Giải phương trình được $x_1 = m + 1 - 2 = m - 1, \quad x_2 = m + 1 + 2 = m + 3.$

Từ $\begin{cases} m - 1 > -2 \\ m + 3 < 3 \end{cases}$ ta được $-1 < m < 0$

23. Theo hệ thức Vi-et:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) = -a^2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -ab \end{cases}$$

Từ đó $a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Đáp số : $a=-1, b\le \frac{1}{4}$ hoặc a = 2, b = -1.

24. Theo hệ thức Vi-et:

$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_1+x_3=-b \\ x_1x_3=1 \end{cases}$

$(x_1-x_2)(x_1-x_3)=\left[(x_1+x_2)-2x_2\right]\left[(x_1+x_3)-2x_3\right]$

$=(x_1+x_2)(x_1+x_3)-2x_3(x_1+x_2)-2x_2(x_1+x_3)+4x_2x_3$

$=(-a)(-b)-2x_1x_3-2x_2x_3-2x_1x_2-2x_2x_3+4x_2x_3$

$=ab-2x_1x_3-2x_1x_2=ab-2.1-2(-1)=ab.$

25. Với $m\ne 1$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=\frac{2}{m-1}$.

Đáp số: m = 0, m = 2.

26. Ta có: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow (m+1)^2-8\ge 0\Leftrightarrow (m+1)^2\ge 8.$

Xét $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+1)^2-4\ge 8-4=4.$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+1)^2-4\ge 8-4=4.$

$\min\left(x_1^2+x_2^2\right)=4\Leftrightarrow (m+1)^2=8\Leftrightarrow m=-1\pm 2\sqrt{2}.$

27. Ta có $\Delta=8m^2+4m+9=(m+2)^2+7m^2+5>0.$

Đặt $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2m+1}{-(m^2+2)}=a$ ta được $am^2+2m+(2a+1)=0 \qquad (2)$

Với a = 0 thì $m=-\frac{1}{2}$.

Với a ≠ 0, để (2) có nghiệm phải có $\Delta'\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+a-1\le 0\Leftrightarrow -1\le a\le \frac{1}{2}.$

$a=-1\Leftrightarrow m=1.$

$a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=-2.$

Đáp số: minA = -1 tại m = 1; maxA $=\frac{1}{2}$ tại m = -2.

28. a) m là nghiệm chung của (1) và (2) nên

$m^2+am+1=0 \qquad (5)$

$m^2+bm+c=0 \qquad (6)$

Lấy (5) trừ (6) theo vế được

$(a-b)m+1-c=0.$ Do a ≠ b nên $m=\frac{c-1}{a-b} \qquad (7)$

Do n là nghiệm chung của (3) và (4) nên

$n^2+cn+b=0. \qquad (8)$

$n^2+n+a=0 \qquad (9)$

Lấy (8) trừ (9) theo từng vế được (c – 1)n + b – a = 0.
Ta thấy c ≠ 1, vì thế c = 1 thì từ (7) có m = 0, trái với (5).
Do đó $n = \frac{a-b}{c-1}$. (10)
Từ (7) và (10) suy ra $n = \frac{1}{m}$. Thay vào (9) được
$\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{1}{m} + a = 0 \Rightarrow 1 + m + am^2 = 0$ (11)
Lấy (11) – (5) được $am^2 + m - m^2 - am = 0$
$\Rightarrow m(am + 1 - m - a) = 0$
$\Rightarrow am + a - m - a = 0$ (do $m \neq 0$)
$\Rightarrow (a-1)(m-1) = 0$
Nếu a = 1 thì (1) là $x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm. Vậy $a \neq 1$
Khi đó m = 1 và n = 1
b) Thay m = 1 vào (5) được a = -2.
Thay m =1 vào (6) được b + c = -1.
Vậy a + b + c = -3.
29.
a) Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol $y = x^2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0$.
Do ac = - 3 < 0 nên phương trình có hai nghiệm trái dấu, do đó d luôn cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.
b) Gọi tọa độ của A, B là $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$
Do x_1; x_2 là nghiệm của (1) nên $x_1 + x_2 = m$ và $x_1 . x_2 = -3$.
Do A và B thuộc d nên $y_1 = mx_1 + 3$ và $y_2 = mx_2 + 3$.
Ta có $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 12$;
$(y_1 - y_2)^2 = (mx_1 - mx_2)^2 = m^2(x_1 - x_2)^2 = m^2(m^2 + 12)$
Nên $AB^2 = (m^2 + 12) + m^2(m^2 + 12) = (m^2 + 12)(m^2 + 1) \geq 12$
Min AB = $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ tại m = 0. Khi đó đường thẳng d có phương trình y = 3.
30.
Hoành độ giao điểm của đường thẳng y = mx +2 và parabol $y = \frac{x^2}{2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$. (1)
Do ac = -4 < 0 nên (1) có hai nghiệm trái dấu, do đó d cắt parabol tại hai điểm A, B phân biệt.
b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A, B ($x_1 < 0 < x_2$). Kẻ AE, BF vuông góc với Oy.
Gọi K là giao điểm của d và Oy, ta có K (0; 2).
$S_{AOB} = S_{OBK} + S_{OAK} = \frac{OK}{2}.BF + \frac{OK}{2}.AE$.

$= \frac{OK}{2}(BF + AE) = \frac{2}{2}(x_2 - x_1) = x_2 - x_1$.

Dùng công thức nghiệm hoặc dùng hệ thức

$(x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2$, ta tính được

$x_2 - x_1 = 2\sqrt{m^2+4}$. Suy ra $S_{AOB} = x_2 - x_1 = 2\sqrt{m^2+4}$

Do $2\sqrt{m^2+4} = 2\sqrt{5}$ nên $m = \pm 1$.

31.

a) Hoành độ giao điểm của d và parabol là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$

b) S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ C đến AB lớn nhất

$\Leftrightarrow$ C là tiếp điểm của đường thẳng d′ (song song với d) và parabol.

Hoành độ tiếp điểm của d′ và Parabol là nghiệm kép của phương trình

$x^2 = x + m$ hay $x^2 - 2x - m = 0$.

Ta tìm được $m = -\frac{1}{2}$, đường thẳng d′ là $y = x - \frac{1}{2}$, tọa độ của C là $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

$MaxS_{ABC} = S_{ABDE} - S_{ACHE} - S_{BCHD}$

$= \frac{(8+2).6}{2} - \frac{(2+0,5).3}{2} - \frac{(8+0,5).3}{2} = 13,5.$

32.

a) Hoành độ giao điểm của d và parabol là nghiệm của phương trình

$x^2 - x - n = 0.$ (1)

Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt là

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4n > 0 \Leftrightarrow n > \frac{-1}{4}$

b) Gọi hoành độ giao điểm của A và B theo thứ tự là x_1 và x_2.

Theo hệ thức vi – ét, $x_1 + x_2 = 1$.

Gọi x_1 là hoành độ của điểm I thì $x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$

Vậy I chuyển động trên đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$

33.

Đường thẳng đi qua I (0; 1) có phương trình y = kx +1.

Giao điểm của nó với parabol $y = x^2$ có hoành độ là nghiệm của phương trình

$x^2 - kx - 1 = 0.$

Do $x_1.x_2 = -1$ nên

$x_A.x_B = -1,\ x_C.x_D = -1$

Biết $x_A = -2$ và $x_C = -\frac{1}{3}$ ta tính được $x_B = \frac{1}{2}$ và $x_D = 3$.

Vậy $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; D(3; 9).

CHUYÊN ĐỀ 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

34. Rút y từ (m + 1)x – y = m + 1 được y = (m +1)x – (m +1).
Thay vào x + (m – 1)y = 2 được x + (m^2 -1)x – (m^2 – 1) = 2
$\Leftrightarrow m^2x = m^2 + 1$
Với m = 0 thì (1) vô nghiệm.
Với $m \neq 0$ thì $x = \frac{m^2+1}{m^2}; y = \frac{m+1}{m^2}$. Khi đó
$x - 2y = \frac{m^2+1-2(m+1)}{m^2} = \frac{m^2-2m-1}{m^2} = 1 - \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2}$.
Đặt $\frac{1}{m} = z$ thì $x - 2y = 1 - 2z - z^2 = 2 - (z+1)^2 \leq 2$
max(x-2y) = 2 $\Leftrightarrow z = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

35.
Gọi số táo là x(quả), giá một quả táo là y (nghìn đồng)
Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(x+6)(y-2) = xy \\ (x-4)(y+2) = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 24 \\ y = 10\end{cases}$
Giá táo là 10 nghìn đồng một quả.

36.
a) Ta có $xy - x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1\end{array}\right.$
Đáp số: (1;1); (1;2); (-4;1).
b) Đặt x- y = a; xy = b.
Ta có $\begin{cases}a + b = 7 \\ a.b = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1 \\ b = 6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a = 6 \\ b = 1\end{cases}$
Đáp số: (3; 2); (-2;-3); (3 + $\sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}$); $(3 - \sqrt{10}; -3 - \sqrt{10})$

37.
a) $\begin{cases}x^2 + y^2 + x = 3 & (1) \\ x + 2y + 2xy = 5 & (2)\end{cases}$
Cộng (1) với (2) ta được (x+ y)^2 + 2(x+y) – 8 = 0
Ta được x + y = 2 hoặc x + y = -4.
Thay y = 2 – x vào (1) được $2x^2 + 9x + 13 = 0$, vô nghiệm.
Đáp số: $(1;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$
b) $\begin{cases}x^3 - 2x^2y + 3y = 0 & (1) \\ 2xy - y^2 = 3 & (2)\end{cases}$
Thay 3 ở (1) bởi $2xy - y^2$ ta được $x^3 - 2x^2y + y(2xy - y^2) = 0$
$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0.$ (3)
Do (2) nên $y \neq 0$. Chia 2 vế của (3) cho y^3 ta được
$\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2.\frac{x}{y} - 1 = 0$

Đặt $\frac{x}{y} = a$. Ta có $a^3 - 2a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2 - a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Suy ra x = y. Thay vào (2) được $x = \pm\sqrt{3}$.

Đáp số: $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

38.

a) Đây là phương trình đối xứng loại II.

Trừ từng vế hai phương trình được $(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay vào một phương trình được $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$

Đáp số (- 1; -1); (2;2).

b) Đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc 2.

Ta thấy y = 0 không thỏa mãn hệ phương trình.

Chia hai vế của $x^2 - 3xy + 2y^2$ cho $y^2 \neq 0$ rồi đặt $\frac{x}{y} = k$ ta được $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$

Với k = 1, ta có x = y và được $x^2 = 4$.

Với k = 2, ta có x = 2y và được $x^2 = 6$.

Đáp số: $(2;2);(-2;-2);\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{2}\right);\left(-\sqrt{6};\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)$.

39.

a) $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 24xy & (1) \\ (x^2+1)(y^2+1) = 8xy & (2) \end{cases}$

x = 0 hoặc y = 0 đều không thỏa mãn (2).

Chia hai vế của (1) và (2) cho xy $\neq 0$ được

$$\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{x}.\frac{(y+1)^2}{y} = 24 \\ \frac{x^2+1}{x}.\frac{y^2+1}{y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\left(y + \frac{1}{y} + 2\right) = 24 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 8 \end{cases}$$

Đặt $\left(x + \frac{1}{x}\right) = a, \left(y + \frac{1}{y}\right) = b$ ta có

$\begin{cases} (a+2)(b+2) = 24 \\ ab = 8 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Với a= 2; b =4 ta được x = 1; y = $2 \pm \sqrt{3}$

Với a= 4 , b =2 ta được $x = 2 \pm \sqrt{3}$; y = 1

Đáp số: $\left(1;2+\sqrt{3}\right);\left(1;2-\sqrt{3}\right);\left(2+\sqrt{3};1\right);\left(2-\sqrt{3};1\right)$

b) Đường thẳng d đi qua A (-2; 4) và $C\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right)$ thỏa mãn $\frac{x+2}{-\frac{1}{3}+2} = \frac{y-4}{\frac{1}{9}-4}$, từ đó

$y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$.

Tọa độ của P là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{7}{3}x-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{7} \\ y=1 \end{cases}$

Đường thẳng d đi qua $B\left(\frac{1}{1};\frac{1}{4}\right)$ và $D(3;9)$ thỏa mãn $\frac{x-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{4}}{9-\frac{1}{4}}$, từ đó $y=\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}$.

Tọa độ của Q là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=1 \\ y=\frac{7}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ y=1 \end{cases}$

c) Do $x_P=-\frac{5}{7}$ nên $IP=\frac{5}{7}$. Do $x_Q=\frac{5}{7}$ nên $IQ=\frac{5}{7}$. Vậy IP = IQ.

b) $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=16 \end{cases}$

Đặt $x+\frac{1}{x}=a; y+\frac{1}{y}=b$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$, $y^2+\frac{1}{y^2}=b^2-2$.

Ta có : $\begin{cases} a+b=6 \\ a^2+b^2=20 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

Với $a=2, b=4$ ta được $x=1; y=2\pm\sqrt{3}$.

Với $a=4, b=2$ ta được $x=2\pm\sqrt{3}; y=1$.

Đáp số : $\left(1;2+\sqrt{3}\right)$, $\left(1;2-\sqrt{3}\right)$, $\left(2+\sqrt{3};1\right)$, $\left(2-\sqrt{3};1\right)$.

Câu 40. a) ***Điều kiện cần :*** Giả sử $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất nên $x=y$. Khi đó hệ phương trình là : $\begin{cases} 4x+x^2=m \\ 2x^2=m \end{cases}$

. Từ đó $x=0$ hoặc $x=4$. Suy ra $m=0$ hoặc $m=32$.

Điều kiện đủ :

- Với $m=0$, ta có : $\begin{cases} 2x+2y+xy=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.
- Với $m=32$, ta có : $\begin{cases} 2x+2y+xy=32 \\ x^2+y^2=32 \end{cases}$. Đặt $x+y=a, xy=b$. Ta được

$\begin{cases} 2a+b=32 \\ a^2-2b=32 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=8 \\ b=16 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-12 \\ b=56 \end{cases}$.

Với $a=8, b=16$ ta được $x=y=4$.

Với $a=-12, b=56$ loại vì trái với đk : $a^2 \ge 4b$.

Đáp số : $m=0$ hoặc $m=32$.

b) $\begin{cases} x^2 = y^3 + my \\ y^2 = x^3 + mx \end{cases}$

Cũng lập luận tương tự để có $x=y$. Khi đó : $x^2 = x^3 + mx \Leftrightarrow x\left(x^2 - x + m\right) = 0$.

Do đó $x=0$ là một nghiệm của phương trình trên nên $(0;0)$ là một nghiệm của phương trình. Để nghiệm đó là nghiệm duy nhất thì phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Câu 41. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$.

Đặt $x^2 + x = a; y^2 + y = b$. Điều kiện : $a \ge -\frac{1}{4}, b \ge -\frac{1}{4}$. Ta có : $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=m \end{cases}$.

Do đó : a, b là nghiệm của phương trình : $X^2 - 2X + m = 0$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm X_1, X_2 thỏa mãn : $X_1 \ge -\frac{1}{4}$ và $X_2 \ge -\frac{1}{4}$ là :

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ \left(X_1 + \frac{1}{4}\right)\left(X_2 + \frac{1}{4}\right) \ge 0 \\ \left(X_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(X_2 + \frac{1}{4}\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m \ge -\frac{9}{16} \end{cases}.$$

Kết luận : $-\frac{9}{16} \le m \le 1$.

b) $\begin{cases} xy(x+2)(y+2) = m \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+2x\right)\left(y^2+2y\right) = m \\ \left(x^2+2x\right) + \left(y^2+2y\right) = m+1 \end{cases}$

Đặt $x^2 + 2x = a$ và $y^2 + 2y = b$. Ta có : $a = (x+1)^2 - 1 \ge 0 - 1 = -1$, $b = (y+1)^2 - 1 \ge 0 - 1 = -1$.

Khi đó a, b là nghiệm của phương trình : $X^2 - (m+1)X + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = m \end{array}\right.$.

Để $a \ge -1, b \ge -1$ thì ta phải có $m \ge -1$.

Kết luận : $m \ge -1$.

Câu 42. Đặt $x+y=a, xy=b$, ta có : $\begin{cases} a+b=m \\ ab=m-1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=1 \\ b=m-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=m-1 \\ b=1 \end{cases}$.

Loại trường hợp $a=1$ vì khi đó $x+y=1$, trái với điều kiện $x<0, y<0$.

Với $\begin{cases} a=m-1 \\ b=1 \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2-(m-1)X+1=0$. Ta tìm được điều kiện để phương trình có hai nghiệm cùng âm là $m \le -1$.

Câu 43. a) Đưa về : $\begin{cases} (x+1)(y+1)=6 \\ (y+1)(z+1)=10 \\ (z+1)(x+1)=15 \end{cases}$. Nhân từng vế các phương trình.

Đáp số : $(2;1;4)$, $(-4;-3;-6)$.

b) Đưa về : $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0$.

Đáp số : $(2;2;2)$.

Câu 44. a) $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=21 \ (1) \\ 4x+2xy+6z=34 (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2)$ rồi đưa về $(x-2)^2+(x-y)^2+(z-3)^2=0$.

Đáp số : $(2;2;3)$.

b) Giải tương tự cách 2 của ví dụ 28.

Đáp số : $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$.

Câu 45. Nhân từng vế hai phương trình được $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$ với $x, y, z>0$.

Đáp số : $(1;1;1)$.

Câu 46. a) $x^2=4y-1 \Rightarrow 4y-1 \ge 0 \Rightarrow y \ge \frac{1}{4}$. Tương tự : $y \ge \frac{1}{4}; z \ge \frac{1}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $x=y=z$.

Giả sử $x \ge y \Rightarrow 4y-1 \ge 4z-1 \Rightarrow y \ge z \Rightarrow y^2 \ge z^2 \Rightarrow 4z-1 \ge 4x-1 \Rightarrow z \ge x$. Do đó ta có :

$x \ge y \ge z \ge x$ suy ra : $x=y=z$.

Đáp số : $\left(2+\sqrt{3};2+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3};2-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$.

b) Trước hết chứng minh : x, y, z, t đều dương.

Cộng từng vế các phương trình ta được : $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3+(t-2)^3=0$.

Giải tương tự Ví dụ 35. ***Đáp số :*** $(2;2;2;2)$.

Chuyên đề 4 : PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA, BẬC BỐN. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Câu 47. a) $(x-2)(x^2+2x-35)=0$. Có ba nghiệm $2;5;-7$.

b) $(x+4)(x^2-4x+7)=0$. Có một nghiệm $x=-4$.

c) $x(x^2-1)=\sqrt{2}$. Suy ra : $x^2(x^2-1)^2=2$. Đặt $y=x^2\ge 0$, ta có : $y(y-1)^2=2$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Thử, ta chọn $x=\sqrt{2}$.

d) Trừ 8 vào hai vế. Đưa về $(x-1)^3=(-2)^3$. Một nghiệm -1.

e) $2x^3=x^3-6x^2+12x-8 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2}=x-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{2}}$.

Câu 48. Ta có $x^3+a^3+b^3-3abx=0$ (1)

Áp dụng hằng đẳng thức $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

Ta có $(1)\Leftrightarrow (x+a+b)\left[(x-a)^2+(a-b)^2+(b-x)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a-b \\ x=a=b\,(l)\end{array}\right.$

Đáp số : Một nghiệm $-(a+b)$.

Câu 49. a) Đặt $y=x-1$. Đưa về $y^4-9y^2+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=2 \\ y^2=7\end{array}\right.$.

Đáp số : Bốn nghiệm $1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{7}$.

b) $(6x^2+5x-1)(6x^2+5x+1)=120$.

Đặt $6x^2+5x=a$, ta được $(a-1)(a+1)=120 \Leftrightarrow a=\pm 11$.

Đáp số : Hai nghiệm $1;-\dfrac{11}{6}$.

c) Chia cả hai vế cho $x^2\ne 0$, ta được : $x^2-x-14-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{9}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{3}{x}\right)-14=0$

Đặt $x+\dfrac{3}{x}=y$, ta được $y=-4$ và $y=5$.

Đáp số : Bốn nghiệm $-1;-3;\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

d) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=168x^2 \Leftrightarrow (x^2+5x+6)(x^2+7x+6)=168x^2$.

Đặt $y=x^2+6x+6$, ta có : $(y-x)(y+x)=168x^2 \Leftrightarrow y=\pm 13x$.

Đáp số : Bốn nghiệm $1;6;\dfrac{-19\pm\sqrt{337}}{2}$.

Câu 50. a) Đặt $x^2-x+1=a$, ta có $a^4+4x^4=5x^2a^2 \Leftrightarrow (a+x)(a-x)(a+2x)(a-2x)=0$.

Đáp số : Ba nghiệm $1;\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) Đặt $x+2=y$ thì $x=y-2$. Ta có

$(y-2)^2+(y-1)^3+y^4=2 \Leftrightarrow (y-1)(y+1)(y^2+y-1)=0$.

Đáp số: $-1;-3;\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) $x^4+2x^2+1=4x^2+64x+256 \Leftrightarrow (x^2+1)^2=(2x+16)^2$.

Đáp số: Hai nghiệm $5;-3$.

d) $x^4+(x-2)\left[x^2-2(x-2)\right]=0 \Leftrightarrow x^4+(x-2)x^2-2(x-2)^2=0$.

Do $x=2$ không là nghiệm, chia hai vế cho $(x-2)^2$ ta được $\dfrac{x^4}{(x-2)^2}+\dfrac{x^2}{x-2}-2=0$

Đặt $\dfrac{x^2}{x-2}=y$, ta được $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right.$.

Đáp số: Hai nghiệm $-1\pm\sqrt{5}$.

Câu 51. Đặt $x^2=y\geq 0$, ta có $2y^2-4y+1=0\ (1)$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương y_1 và y_2 nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $\pm\sqrt{y_1}$ và $\pm\sqrt{y_2}$.

b) Đặt $x_1=\sqrt{y_1}, x_2=-\sqrt{y_1}, x_3=\sqrt{y_2}, x_4=-\sqrt{y_2}$ thì $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2(y_1+y_2)=2.2=4$.

Câu 52. Do $x\neq 0$, chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x được : $\dfrac{1}{x-3+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-2+\dfrac{1}{x}}{x+1+\dfrac{1}{x}}$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$, ta có $\dfrac{1}{y-3}=\dfrac{y-2}{y+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=5 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thì $x+\dfrac{1}{x}=1$, vô nghiệm.

Với $y=5$ thì $x+\dfrac{1}{x}=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

Đáp số: Hai nghiệm $\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

b) Thêm bớt $2x.\dfrac{3x}{x-2}$ được $\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2-\dfrac{6x^2}{x-3}-16=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2-\dfrac{6x^2}{x-3}-16=0$

Đặt $\dfrac{x^2}{x-3}=y$, ta được $y^2-6y-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=8 \\ y=-2 \end{array}\right.$.

Đáp số: Hai nghiệm $-1\pm\sqrt{7}$.

c) Đặt $x^2-x+1=a$, ta được $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(a+1)^2}=\dfrac{5}{4}$

Ta được $a=1$ hoặc $a=-2$ (Xem ví dụ 47).

Với $a=1$ thì $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Với $a=2$ thì $x^2-x+1=-2 \Leftrightarrow x^2-x+3=0$, vô nghiệm.

Đáp số : Hai nghiệm 0 và 1.

d) $(x^4+1)(x^3-1)=2x+1 \Leftrightarrow (x^3-2)(x^4+x+1)=0$

Ta có $x^4+x+1=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$.

Đáp số : Một nghiệm $\sqrt[3]{2}$.

Câu 53. a) $\frac{x^2}{(x+1)^2}=3x^2-16x+8$. Cộng $(x+1)^2+2x$ vào hai vế ta được

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}+(x+1)^2+2x=4x^2-12x+9 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}+x+1\right)^2=(2x-3)^2.$$

Đáp số : Bốn nghiệm $2\pm\sqrt{2};\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$.

b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{8}{(2x+1)^2}$

Cộng $\frac{1}{(2x+1)^2}$ vào hai vế ta được $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(-2x-1)^2}=\frac{9}{(2x+1)^2}$.

Ta có bổ đề : Nếu $a+b+c=0$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$.

(Xem chứng minh bổ đề ở cách 2 của ví dụ 5)

Theo bổ đề, ta có : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-2x-1}\right)^2=\left(\frac{3}{2x+1}\right)^2$.

Trường hợp : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-2x-1}=\frac{3}{2x+1}$, vô nghiệm.

Trường hợp : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-2x-1}=\frac{-3}{2x+1}$ được $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{6}$.

Đáp số : Hai nghiệm $\frac{-3\pm\sqrt{3}}{6}$.

Chuyên đề 5 : PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI.

Câu 54. a) Đưa về $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+7}-\frac{1}{2}\right)^2$. ***Đáp số :*** Hai nghiệm : $2;\frac{1-\sqrt{29}}{2}$.

b) Đưa về $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2$. ***Đáp số :*** Ba nghiệm : $0;-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) Đưa về $(x+1)^2=\left(\sqrt{x+1}-6\right)^2$. ***Đáp số :*** Một nghiệm : $x=3$.

d) Đưa về $(x-2)^2=\left(\sqrt{2x+5}+1\right)^2$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm : $4+2\sqrt{3};2-2\sqrt{2}$.

e) Đưa về $\left(\sqrt{5x-3}+\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm : $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

g) Đưa về $(8x-5)^2=\left(4\sqrt{2-x}-1\right)^2$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm : $1;\frac{5-\sqrt{21}}{8}$.

h) Đưa về $\left(\sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm : $\frac{15-\sqrt{97}}{8};\frac{11-\sqrt{73}}{8}$.

i) Đưa về $(3x)^2=\left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm : $-\frac{3}{8};\frac{1-\sqrt{13}}{4}$.

Câu 55. a) Đưa về $(x-4)^2+\left(\sqrt{2x+1}-3\right)^2=0$. ***Đáp số:*** Một nghiệm $x=4$.

b) Đưa về $\left(\sqrt{x+5}-2\right)^2+\sqrt{x+1}=0$. ***Đáp số:*** Một nghiệm $x=-1$.

Câu 56. a) Đkxđ : $x\ge 3$. $x=3$ là nghiệm.

Xét $x>3$, chia hai vế cho $\sqrt{x-3}$, ta được $\sqrt{x+5}=\sqrt{x}+1\Rightarrow x=4$. ***Đáp số:*** Hai nghiệm $3;4$.

b) $\sqrt{(2x+1)(x-2)}-\sqrt{x^2-4}=3\sqrt{2x+1}-3\sqrt{x+2}$ (1)

Đkxđ : $x\ge 2$.

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)-3\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)=0$

Đáp số: Một nghiệm $x=11$.

c) $\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\left(2x^3+x^2+2x+1\right)$

Gọi vế trái là A, vế phải là B. Ta có : $B=\frac{1}{2}(2x+1)\left(x^2+1\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)$.

Do $B\ge 0\Rightarrow x\ge-\frac{1}{2}$.

Ta có : $A^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Suy ra : $A=x+\frac{1}{2}$ (2).

Từ $(1),(2)$, suy ra $x+\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{1}{2}=0\\x^2+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\x^2=0\end{array}\right.$.

Đáp số : Hai nghiệm : $0;-\frac{1}{2}$.

Câu 57. a) Đặt $\sqrt{x^2-3x+4}=a\ge 0$, đưa về $a^2-(2x-1)a-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2x \end{array}\right.$.

Đáp số : Một nghiệm $\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$.

b) Đặt $\sqrt{x+2}=a\ge 0$, đưa về $x^3-3a^2x+2a^3=0 \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a)=0$.

Đáp số : Hai nghiệm : $2;2-2\sqrt{3}$.

c) Đkxđ : $x>0$. Đặt $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}}=y>0$ thì $x^2+3=xy^2$ (1).

Ta có : $y=\frac{xy^2+4}{2(x+1)} \Leftrightarrow xy^2-2(x+1)y+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{2}{x} \end{array}\right.$.

Với $y=2$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Với $y=\frac{2}{x}$ thì $(1) \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đáp số : Hai nghiệm $1;3$.

Câu 58. a) Đkxđ : $0\le x\le 1$. Đặt $\sqrt{1-\sqrt{x}}=y\ge 0$. Ta có : $(1-y^2)^2=(3-y^2)(1-y)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y^2+y-1=0 \end{array}\right.$

Với $y=1$, được $x=0$.

Với $y^2+y-1=0$ và $y\ge 0$ được $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ nên $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Đáp số : Hai nghiệm : $0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b) Đkxđ : $x\ne 0, x-\frac{1}{x}\ge 0$. Ta có : $x^2-2x+1+x\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2=0$

$\Leftrightarrow x-2+\frac{1}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2=0$

Đặt $\sqrt{x-\frac{1}{x}}=y\ge 0$, ta có : $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2(l) \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thì $x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Thõa mãn đkxđ.

Đáp số : Hai nghiệm : $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) $\sqrt{1+x}+\sqrt{3(1-x)}=\sqrt{4x^2+1}$ (1).

Đkxđ : $-1\le x\le 1$.

Bình phương hai vế của (1) rồi rút gọn ta được $3-2x+2\sqrt{3(1-x^2)}=4x^2$

Đặt $\sqrt{3(1-x^2)}=y\ge 0$ thì $3-3x^2=y^2$. Ta có : $(3-3x^2)-x^2-2x+2y=0$

$\Leftrightarrow (y+x)(y-x)+2(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x+2)=0$. ***Đáp số :*** Một nghiệm $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\sqrt{\frac{x+56}{16}+\sqrt{x-8}}=\frac{x}{8}$ (1)

Đkxđ : $x\ge 8$. Đặt $\sqrt{x-8}=4y$ $(y\ge 0)$ thì $x=16y^2+8$. Ta có :

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{16y^2+64}{16}+4y}=2y^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4y+4}=2y^2+1 \Leftrightarrow y+2=2y^2+1$$

$\Leftrightarrow 2y^2-y-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{1}{2}(l) \end{array}\right.$. ***Đáp số :*** Một nghiệm $x=24$.

Câu 59. a) Đặt $\sqrt{x^2+4}=a>0$, $\sqrt{x}=b\ge 0$. Đưa về $(a-b)(a-2b)=0$. ***Đáp số :*** Một nghiệm $x=2$.

b) $4(x+1)^2=\sqrt{2(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$. Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=a>0$, $\sqrt{x^2-x+1}=b>0$ thì $a^2=x^2+x+1$, $b^2=x^2-x+1$ nên $6a^2-2b^2=\sqrt{2}ab$. Chia hai vế cho b^2, ta được

$6\left(\frac{a}{b}\right)^2-\sqrt{2}\frac{a}{b}-2=0$. Đặt $\frac{a}{b}=y>0$, ta có : $6y^2-\sqrt{2}y-2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Đáp số : Hai nghiệm $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Câu 60. a) $\sqrt{9x-27}-\sqrt{x+5}=2x-8$

Đặt $\sqrt{9x-27}=a\ge 0$, $\sqrt{x+5}=b\ge 0$ thì $a^2-b^2=8x-32$. Ta có : $a-b=2x-8$ nên

$a^2-b^2=4(a-b)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=4 \end{array}\right.$. ***Đáp số :*** Hai nghiệm : $4;\frac{13-3\sqrt{5}}{2}$.

b) $\sqrt{4x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+4}=4x-2$.

Đặt $\sqrt{4x^2+2x+3}=a\ge 0$, $\sqrt{4x^2+4}=b>0$ thì $a^2-b^2=2x-1$. Ta có : $a-b=4x-2$ nên

$a-b=2(a^2-b^2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a+2b=1 \end{array}\right.$. ***Đáp số :*** Một nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

Câu 61. a) ***Cách 1 :*** (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\sqrt{x+1}=a\ge 0,\sqrt{3-x}=b\ge 0$, ta có : $\begin{cases}a+b-ab=1\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-ab=1\\(a+b)^2-2ab=4\end{cases}$

Đặt $S=a+b,P=ab$ ta tìm được $S=1+\sqrt{3},P=\sqrt{3}$. Suy ra $a=1$ hoặc $a=\sqrt{3}$. ***Đáp số :*** Hai nghiệm $0;2$.

Cách 2 : (Đặt một ẩn phụ)

Đặt $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=a\ge 0$ thì $x+1+3-x+2\sqrt{(x+1)(3-x)}=a^2$ nên $\sqrt{(x+1)(3-x)}=\dfrac{a^2-4}{2}$.

Ta có : $a-\dfrac{a^2-4}{2}=1\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{3}$. Chọn $a=1+\sqrt{3}$. Từ đó tìm được $x=0;x=2$.

b) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}$

Đkxđ : $x\ge 1$ hoặc $-1\le x<0$.

Ta thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình.

Xét $x>1$ hoặc $-1\le x<0$, đặt $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=a\ge 0$, $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=b>0$ thì $\begin{cases}a^2-b^2=x-1\\a-b=\dfrac{x-1}{x}\end{cases}$ nên $a+b=x$

Ta có : $\begin{cases}a+b=x\\a-b=1-\dfrac{1}{x}\end{cases}$ nên $2a=x-\dfrac{1}{x}+1=a^2+1$.

Từ $2a=a^2+1$ được $a=1$ nên $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Đáp số: Hai nghiệm: $1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

62. **a)** $\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}=3x-8$ (1)

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)-\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)=3x-9\Leftrightarrow\dfrac{(x^2+16)-25}{\sqrt{x^2+16}+5}-\dfrac{(x^2+7)-16}{\sqrt{x^2+7}+4}=3x-9$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}+5}-\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4}=3(x-3)$

Dễ thấy $x=3$ thỏa mãn phương trình. Với $x\ne 3$, ta có:

$\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=3$ (2).

Xét (1): Do $x^2+16>x^2+7$ nên $3x>8$, do đó $x+3>0$.

Xét (2): Do $x+3>0$ nên vế trái của (2) âm, suy ra (2) vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=3$.

b) $\sqrt{x^3+10}-\sqrt{x^3+5}=2x+3$ (1)

Điều kiện xác định: $x^3 \ge -5$.

Ta thấy $x=-1$ thỏa mãn (1).

Xét $x \ne -1$. Nhân và chia vế trái của (1) với biểu thức liên hợp được:

$$\frac{\left(x^3+10\right)-\left(x^3+5\right)}{\sqrt{x^3+10}+\sqrt{x^3+5}}=2x+3 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x^3+10}+\sqrt{x^3+5}}=2x+3 \qquad (2)$$

Nếu $x>-1$ thì (2) có vế trái nhỏ hơn 1, vế phải lớn hơn 1, vô nghiệm.

Nếu $x<-1$ thì (2) có vế trái lớn hơn 1, vế phải nhỏ hơn 1, vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=-1$.

c) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2+4x+3}=2x+1 \qquad (1).$

Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (2x+1)-\sqrt{2x^2+4x+3}=\sqrt{x^2-1} \qquad (2)$$

Nhân và chia vế trái của (2) với biểu thức liên hợp được:

$$\frac{(2x+1)^2-\left(2x^2+4x+3\right)}{2x+1+\sqrt{2x^2+4x+3}}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-1\right)}{2x+1+\sqrt{2x^2+4x+3}}=\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{2x+1+\sqrt{2x^2+4x+3}}-1\right)=0$$

Giá trị $x=1$ thảo mãn (1). Với $x>1$, ta có:

$$2\sqrt{x^2+1}=2x+1+\sqrt{2x^2+4x+3} \qquad (3)$$

Phương trình (3) vô nghiệm.

Đáp số: Hai nghiệm: $x=\pm 1$.

63. **a)** $\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}=-3x^2+2x+5 \qquad (1).$

Điều kiện xác định: $x \ge 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{2x+7}-3\right)=-3x^2+2x+1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}+\frac{(2x+7)-9}{\sqrt{x+7}+3}=(x-1)(-3x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}+\frac{2(x-1)}{3+\sqrt{2x+7}}=(x-1)(-3x-1)$$

Dễ thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình. Với $x \ne 1$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{2}{3+\sqrt{2x+7}}+3x+1=0 \qquad (2).$$

Do $x \ge 0$ nên vế trái của (2) dương, suy ra (2) vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=1$.

b) $\sqrt{\frac{10}{3-x}}+\sqrt{\frac{18}{5-x}}=4$ (1)

Điều kiện xác đinh: $x\le 3$.

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{10}{3-x}}-2\right)+\left(\sqrt{\frac{18}{5-x}}-2\right)=0\Leftrightarrow\frac{\frac{10}{3-x}-4}{\sqrt{\frac{10}{3-x}}+2}+\frac{\frac{18}{5-x}-4}{\sqrt{\frac{18}{5-x}}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-2)\left[\frac{1}{(3-x)\left(2+\sqrt{\frac{10}{3-x}}\right)}+\frac{1}{(5-x)\left(2+\sqrt{\frac{18}{5-x}}\right)}\right]=0 \qquad (2)$$

Do $x\le 3$ nên biểu thức trong dấu ngoặc vuông của (2) dương.

Vậy $4x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Đáp số: Một nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

64. **a)** $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}+\sqrt{2x+7}=2x^2-9x+7$. (1)

Điều kiện xác định: $\frac{7}{2}\le x\le 5$.

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-3}-1\right)+\left(\sqrt{5-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-7}-1\right)=2x^2-9x+4$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)-1}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{(5-x)-1}{\sqrt{5-x}+1}+\frac{(2x-7)-1}{\sqrt{2x-7}+1}=(2x-1)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-4}{1+\sqrt{x-3}}+\frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}}+\frac{2(x-4)}{1+\sqrt{2x-7}}=(2x-1)(x-4)$$

Ta thấy $x=4$ thỏa mãn (1).

Với $x\ne 4$, ta có:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-3}}+\frac{2}{1+\sqrt{2x-7}}=\frac{1}{1+\sqrt{2x-7}}+2x-1 \qquad (2)$$

Do $x\ge\frac{7}{2}$ nên (2) có vế phải lớn hơn $2.\frac{7}{2}-1$, tức là lớn hơn 6, còn vế trái nhỏ hơn 3.

suy ra (2) vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=4$.

b) $\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{(2x+1)(x+2)}+4\right)=2x-2$. (1)

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Với nhận xét 1 là một nghiệm của phương trình, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{(2x+1)-(x+2)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}.\left(\sqrt{(2x+1)(x+2)}+4\right)=2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}+4\right)=2(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}+4-2\sqrt{2x+1}-2\sqrt{x+2}\right)=0$$

Hiển nhiên $x=1$ thỏa mãn (1). Với $x\ne 1$, ta có:

$$\sqrt{2x+1}.\left(\sqrt{x+2}-2\right)-2\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+1}-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

Đáp số: Ba nghiệm: 1; 2; $\frac{3}{2}$.

c) $\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3x-2}$ (1)

Điều kiện xác định: $x^2+3x-2\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+3x+1\right)-\left(x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{\left(x^2+4\right)-\left(x^2+3x-2\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{-3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+3x-2}}$$

Rõ ràng $x=2$ thỏa mãn (1). Với $x\ne 2$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+3x-2}}=0 \qquad (2)$$

Vế trái của (2) dương nên (2) vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=2$.

65. **a)** $2x^2-x+3=2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$ (1)

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B. Hãy chứng minh $B\le A$.

Đáp số: Một nghiệm $x=-1$.

b) $\sqrt{2(x+1)^2+4}+\sqrt{\left(x^2-1\right)^2+1}=3-(x-1)^2$ (1)

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B. Hãy chứng minh $A\ge 3$ và $B\le 3$.

Đáp số: Một nghiệm $x=-1$.

c) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$ (1)

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B.

Ta có: $B=(x-1)^2+x+1\geq x+1$.

$$A=\sqrt{(x^2+x-1).1}+\sqrt{(x-x^2+1).1}\leq\frac{x^2+x-1+1}{2}+\frac{x-x^2+1+1}{2}$$

$$\Rightarrow A\leq\frac{x^2+x+x-x^2+2}{2}=x+1$$

Suy ra $A=x+1=B$.

Đáp số: Một nghiệm $x=1$.

d) $\sqrt{3x^2+3x}+\sqrt{x-x^2}=2x+1$ (1)

Cách 1: $\sqrt{3(x^2+x)}+\sqrt{x-x^2}$

$$=2.\sqrt{\frac{3}{4}(x^2+x)}+2.\sqrt{\frac{1}{4}.(x-x^2)}\leq\frac{3}{4}+x^2+x+\frac{1}{4}+x-x^2=2x+1.$$

Xảy ra dấu bằng tại $\begin{cases}x^2+x=\dfrac{3}{4}\\ x-x^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

Điều kiện xác định: $0\leq x\leq 1$.

Gọi vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B.

$$\left(\sqrt{3x(x+1)}+\sqrt{x(1-x)}\right)^2\leq(3x+x)(x+1+1-x)=8x$$

$\Rightarrow A^2\leq 8x\Rightarrow A\leq 2\sqrt{2x}$. (2).

$B=2x+1\geq 2\sqrt{2x.1}=2\sqrt{2x}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $A=2\sqrt{2x}=B\Leftrightarrow\dfrac{3x}{x}=\dfrac{x+1}{1-x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện xác định)

Đáp số: Một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

66. **a)** $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x(x+3)}$ (1)

Điều kiện xác định: $x \ge 0$ hoặc $x \le -3$.

Xét $x = 0$ thỏa mãn phương trình.

Xét $x > 0$. Chia hai vế của (10 cho $\sqrt{-x}$ được:

$\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x-2} = \sqrt{-x-3}$.

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái lớn hơn vế phải (do $-x-1 > -x-3$).

Đáp số: Một nghiệm $x = 0$.

b) $\sqrt{(x+1)(x-1)} + \sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{x(x-1)}$. (1)

Điều kiện xác định: $x \ge 1$ hoặc $x \le -2$.

Bình phương hai vế của (1) được:

$(x+1)(x-1) + (x-1)(x+2) + 2|x-1|\sqrt{(x+1)(x+2)} = x(x-1)$ (2)

$x = 1$ thỏa mãn phương trình (1).

Với $x > 1$ thì $|x-1| = x-1$, chia hai vế cho $x-1$ được:

$(x+1) + (x+2) + 2\sqrt{(x+1)(x+2)} = x$

$\Leftrightarrow x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)} = 0$, vô nghiệm (vì vế trái dương)

Với $x \le -2$ thì $|x-1| = -(1-x)$, chia hai vế của (2) cho $x-1$ được:

$(x+1) + (x+2) - 2\sqrt{(x+1)(x+2)} = x$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2\sqrt{(x+1)(x+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 3x^2 + 6x - 1 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$, chọn $x = \dfrac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$ để $x \le -2$.

Đáp số: Hai nghiệm: 1; $\dfrac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$.

67. $\begin{cases} 2x + 2y = 2\sqrt{4z-1} \\ 2y + 2z = 2\sqrt{4x-1} \\ 2z + 2x = 2\sqrt{4y-1} \end{cases}$

Cộng từng vế ba phương trình được:

$\left(4x - 2\sqrt{4x-1}\right) + \left(4y - 2\sqrt{4y-1}\right) + \left(4z - 2\sqrt{4z-1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{4x-1}\right)^2+\left(1-\sqrt{4y-1}\right)^2+\left(1-\sqrt{4z-1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1=1 \\ 4y-1=1 \\ 4z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Chuyên đề 6

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC BẬC BA, BẬC BỐN

68. **a)** $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=y$, ta có: $\begin{cases} x^3+2=3y \\ y^3+2=3x \end{cases}$ nên $x^3-y^3+3(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=0$.

Do $x^2+xy+y^2+3>0$ nên $x=y$. Khi đó: $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0$.

Đáp số: Hai nghiệm: $1;-2$.

b) $2x^3-1=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$. Đặt: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}=y$, ta có: $\begin{cases} 2x^3-1=y \\ 2y^3-1=x \end{cases}$ nên $2\left(x^3-y^3\right)+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[2\left(x^2+xy+y^2\right)+1\right]=0 \Leftrightarrow x=y$.

Khi đó: $2x^3-x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đáp số: Một nghiệm $x=1$.

c) $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt{1-x}=3$. Điều kiện xác định: $x\le 1$.

Đặt $\sqrt[3]{x+8}=a, \sqrt{1-x}=b\ge 0$. Ta có: $\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^2=9 \end{cases}$ được $a(a+3)(a-2)=0$.

Đáp số: Ba nghiệm: $-8;-35;\ 0$.

d) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$. (1)

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Với nhận xét 2 là một nghiệm, ta có: $\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=x^2-4$.

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+6)-8}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{(x-1)-1}{\sqrt{x-1}+1}=(x-2)(x+2)$.

Ta thấy $x=2$ thỏa mãn (1). Với $x\ne 2$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}=x+2 \qquad (2).$$

Hãy chứng minh do $x \geq 1$ nên vế trái nhỏ hơn 2, còn vế phải lớn hơn hay bằng 3, suy ra (2) vô nghiệm.

Đáp số: Một nghiệm $x=2$.

69. **a)** Lập phương hai vế của phương trình.

Đáp số: $x=1$.

b) Cách 1: Lập phương hai vế của (1) được

$$(x-1)+(x+4)+3\sqrt[3]{(x-1)(x+4)}.\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+4}\right)=2x+3.$$

Thay $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+4}$ bởi $\sqrt[3]{2x+3}$ được

$$2x+3+3\sqrt[3]{(x-1)(x+4)(2x+3)}=2x+3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(x+4)(2x+3)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Các giá trị trên thỏa mãn (1)

Đáp số: Ba nghiệm: $1;-4;-\dfrac{3}{2}$.

Cách 2: Đặt $\sqrt[3]{x-1}=a,\ \sqrt[3]{x+4}=b$ thì $a^3+b^3=2x+3$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3} \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3$

$$\Leftrightarrow 3ab(a+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right..$$

Từ đó $x \in \left\{1;-4;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

c) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x+5}$.

Đặt $2x+1=a^3; 2-x=b^3; x+2=c^3$ thì $2x+5=a^3+b^3+c^3$.

Ta có: $a+b+c=\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3} \Leftrightarrow (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

Đáp số: Hai nghiệm: $-3;-1$.

d) $\sqrt[3]{(5+x)^2}+2\sqrt[3]{(5-x)^2}=3\sqrt[3]{25-x^2}$ (1)

Ta thấy 5 và -5 đều không là nghiệm của (1).

Với $x\neq\pm5$, chỉa hai vế của (1) cho $\sqrt[3]{25-x^2}$ được $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}+2\sqrt[3]{\frac{5-x}{5+x}}=3$.

Đặt $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=y$, ta có: $y+\frac{2}{y}-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.$.

Đáp số: Hai nghiệm $0;\frac{35}{9}$.

70. **a)** Điều kiện xác đinh: $3\leq x\leq 20$.

Đặt $\sqrt[4]{20-x}=a\geq 0;\sqrt[4]{x-3}=b\geq 0$, ta có:

$\begin{cases}a^4+b^4=17\\a+b=3\end{cases}$ được $a=2$ hoặc $a=1$.

Đáp số: Hai nghiệm $4;19$.

b) Điều kiện xác đinh: $1\leq x\leq 4$.

Đặt $\sqrt[4]{x-1}=a\geq 0;\sqrt[4]{4-x}=b\geq 0$, ta có:

$\begin{cases}a^4+b^4=17\\a+b-ab=1\end{cases}$ được $a=2$ hoặc $a=1$.

Đáp số: Một nghiệm $x=2$.

c) $\sqrt[4]{8x-1}+\sqrt[4]{9x+1}=3\sqrt[4]{x}$. Điều kiện xác định: $x\geq\frac{1}{8}$.

Chia hai vế cho $\sqrt[4]{x}$ được $\sqrt[4]{8-\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{9+\frac{1}{x}}=3$.

Đặt $\sqrt[4]{8-\frac{1}{x}}=a\geq 0;\sqrt[4]{9+\frac{1}{x}}=b\geq 0$, ta có: $\begin{cases}a+b=3\\a^4+b^4=17\end{cases}$ được $a=2$ hoặc $a=1$.

Đáp số: Một nghiệm $x=\frac{1}{7}$.

CHUYÊN ĐỀ 7

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG ĐA THỨC

71. **a)** Xét hiệu $\left(a^4+b^4+c^4\right)-\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=a^3\left(a-b\right)+b^3\left(b-c\right)+c^3\left(c-a\right)$.

$= a^3(a-b) - b^3\left[(a-b)+(c-a)\right] + c^3(c-a)$
$= a^3(a-b) - b^3(a-b) + b^3(a-c) - c^3(a-c)$
$= (a-b)(a^3-b^3) + (a-c)(b^3-c^3) \geq 0$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Đặt $ab = x;\ bc = y;\ ac = z$ thì $x + y + z = 1$.

Ta có: $3abc(a+b+c) = 3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2 = 1$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

72. Do $a < 2$ và $b < 2$ nên $(a-2)(b-2) > 0$. Suy ra $2a + 2b < ab + 4 < 2 + 4 = 6$. Vậy $a + b < 3$.

73. Xét hiệu $(a^2+b^2) - (a+b) = a(a-1) + b(b-1)$ (1)

Đặt $a = 1 + x;\ b = 1 + y$ thì

$a(a-1) + b(b-1) = (1+x)x + (1+y)y = x + x^2 + y + y^2$

$= (x + y + xy) + (x^2 - xy + y^2)$ (2)

Do $ab \geq 1$ nên $(1+x)(1+y) \geq 1 \Rightarrow x + y + xy \geq 0$ (3)

$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} \geq 0$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $a^2 + b^2 \geq a + b$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = 0$ tức là $a = b = 1$.

74. Ta có $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$

$= a^2(a+b+c) + b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) > a^2(a+a) + b^2(b+b) + c^2(c+c)$

$= 2a^3 + 2b^3 + 2c^3$.

75. Do $a + b + c = 0$ nên trong ba số a, b, c có hai số cùng dấu, giả sử là a, b và $a \geq 0, b \geq 0$. Khi đó $c \leq 0$.

Do $-1 \leq a, b, c \leq 1$ nên $a^2 + b^3 + c^4 \leq |a| + |b| + |c| = a + b - c = -2c = 2|c| \leq 2$.

76. Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$\left(a+b+c\right)^2=\left(a.1+\sqrt{2}.\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2\le\left(a^2+2\right)\left[1+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 3\left(a+b+c\right)^2\le\left(a^2+2\right)\left[3+\frac{3\left(b+c\right)^2}{2}\right]$$

Chỉ cần chứng minh $3+\frac{3\left(b+c\right)^2}{2}\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$ (1)

$$\left(1\right)\Leftrightarrow b^2c^2+2\left(b^2+c^2\right)+4-3-\frac{3\left(b^2+c^2+2bc\right)}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2+\frac{b^2+c^2}{2}+1-3bc\ge 0\Leftrightarrow b^2c^2-2bc+1+\frac{b^2+c^2}{2}-bc\ge 0$$

$\Leftrightarrow\left(bc-1\right)^2+\frac{\left(b-c\right)^2}{2}\ge 0$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

77. Hãy chúng minh: $y-x=\left(a-d\right)\left(b-c\right)\ge 0$

$z-y=\left(a-b\right)\left(c-d\right)>0$.

78. Giả sử $a_1\ge a_2\ge a_3....\ge a_9$. Theo giả thiết, ta có:

$a_1+a_2+a_3+a_4<a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$ (1)

Theo giả thiết trên ta có:

$a_5+a_6+a_7+a_8\le a_1+a_2+a_3+a_4$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a_1+a_2+....+a_8<a_1+a_2+...+a_9\Rightarrow a_9>0$.

Vậy mọi số đều dương.

79. Giải tương tự Ví dụ 89.

a) $\max A=\frac{5}{4}$ tại $x=-\frac{1}{2}$.

b) $\max B=-5$ tại $x=-2$.

c) $C=x^2-x$ với $0\le x\le 2$. Ta có: $C\left(0\right)=0;\ C\left(2\right)=2$ \.

Ta sẽ chứng minh $x^2-x\le 2$ (1)

$\left(1\right)\Leftrightarrow x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x-2\right)\le 0$. (2)

(2) đúng vì $0\le x\le 2$. Vậy $\max C=2\Leftrightarrow x=2$.

80. **a)** $A=\left(x^4-2x^2+1\right)+\left(x^4-2x^3+x^2\right)-1=\left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-x\right)^2-1\ge -1$.

Vậy $\min A = -1$ tại $x = 1$.

b) Đặt $x - 3 = y$, ta có $B = (y+1)^4 + (y-1)^4 + 6(y+1)^2(y-1)^2$.

Rút gọn được $B = 8y^4 + 8 \ge 8$; $\min B = 8$ tại $x = 3$.

c) Đặt $x + 3 = y$, ta có $C = y^2(y-2)(y+2) = y^4 - 4y^2 = (y^2-2)^2 - 4 \ge -4$.

$\min C = -4$ tại $y = \pm\sqrt{2}$, khi đó $x = -3 \pm \sqrt{2}$.

81. $A = |x+1| + |x+3| + |x+5| + |x+7| + |x+9|$. Ta có:

$A_1 = |x+1| + |x+9| = |-x-1| + |x+9| \ge -x - 1 + x + 9 = 8$.

$A_1 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \ge 0 \\ x+9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 \le x \le -1.$

$A_2 = |x+3| + |x+7| = |-x-3| + |x+7| \ge -x - 3 + x + 7 = 4$.

$A_2 = 4 \begin{cases} -x-3 \ge 0 \\ x+7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x \le -3.$

$A = A_1 + A_2 + |x+5| \ge 8 + 4 + 0 = 12$.

$\min A = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le x \le -1 \\ -7 \le x \le -3 \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$

82. $A = x^2 + y^2 - xy - y = x^2 - xy + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{3y^2}{4} - y$

$= \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(y^2 - \dfrac{4}{3}y + \dfrac{4}{9}\right) - \dfrac{1}{3} = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} \ge -\dfrac{1}{3}$

$\min A = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$

83. Đặt $x + y = x^2 + y^2 = a \ge 0$, ta có $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = a^2 - a$

Ta lại có $2xy \le x^2 + y^2$ nên $a^2 - a \le a \Rightarrow a^2 \le 2a \Rightarrow a \le 2$ (vì $a \ge 0$).

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $A = a^2 - a$ với điều kiện $0 \le a \le 2$.

Ta tìm được $\max A = 2$ tại $a = 2$ (xem lại bài 79c)

Vậy $\max(xy) = 1$ tại $x = y = 1$.

84. **a)** Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$A^2=(2x+3y)^2\le(2^2+3^2)(x^2+y^2)=13.52=26^2.$$

$$A=\pm 26\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}.$$

$$\min A=-26\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2y\\2x+3y=-26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-6\end{cases}.$$

$$\max A=26\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2y\\2x+3y=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$$

b) – Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có: $x^2+y^2=xy+4\le\frac{x^2+y^2}{2}+4\Rightarrow B\le\frac{B}{2}+4\Rightarrow B\le 8.$

$MaxB=8\Leftrightarrow x=y=\pm 2.$

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

Ta có: $xy+4=x^2+y^2$

$\Rightarrow 3xy+4=(x+y)^2\ge 0\Rightarrow -\frac{4}{3}$

Suy ra: $B=x^2+y^2=xy+4\ge-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}.$

$$\min B=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=-y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt{3}},y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\\x=-\frac{2}{\sqrt{3}},y=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

85. a) Giải tương tự Ví dụ 93 : $\min A=5\Leftrightarrow x=2,y=1.$

b) Ta có bổ đề $x^4\ge 4x-3.$ Thật vậy $x^4-(4x-3)=(x^2-1)^2+2(x-1)^2\ge 0.$

Từ: $x\ge 4x-3, y^4\ge 4y-3, z^4\ge 4z-3$ suy ra:

$B=x^4+y^4+z^4\ge 4(x+y+z)-9=4.3-9=3.$

$\min B=3\Leftrightarrow x=y=z=1.$

86. a) Từ $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1$, theo bất đăng thức cosi ta có:

$$1=\frac{3}{4}+\frac{2}{y}\ge 2\sqrt{\frac{3}{x}.\frac{2}{y}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\sqrt{xy}=2\sqrt{6}\Rightarrow xy\ge 24.$$

$$\min A=24\Leftrightarrow\frac{3}{x}=\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=6,y=4.$$

b) Từ $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1.$ Theo bất đẳng thức bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$x+y=1.(x+y)=\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+y)\ge\left(\sqrt{\frac{3}{x}.x}+\sqrt{\frac{2}{y}.y}\right)^2$$

$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6};\min B=5+2\sqrt{6}\Leftrightarrow\begin{cases}3+\sqrt{6}\\ y=2+\sqrt{6}\end{cases}.$

87. a) $A=a^3+b^3+c^3\le a^3+\left[b^3+c^3+3bc\left(b+c\right)\right]=a^3+\left(b+c\right)^3$

$=a^3+\left(3-a\right)^3=9\left(a^2-3a+3\right)=9\left[1+\left(a-1\right)\left(a-2\right)\right].\qquad(1)$

Do $3=a+b+c\le 3$ nên $a\ge 1$. Ta lại có $a\le 2$

Nên $\left(a-1\right)\left(a-2\right)\le 0.\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A\le 9;\ MaxA=9\Leftrightarrow a=2,b=1,c=0.$

b) $B=ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

$=ab\left(1-c\right)+bc\left(1-a\right)+ca\left(1-b\right)=\left(ab+bc+ca\right)-3abc$

$=ab-3abc+ac+bc=ab\left(1-3c\right)+c\left(1-c\right).\qquad(1)$

Ta có $ab\le\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}=\dfrac{\left(1-c\right)^2}{4}.\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $4B\le\left(1-2c+c^2\right)\left(1-3c\right)+c\left(1-c\right)$

$=-3c^3+3c^2-c+1=-3c\left(c^2-c+\dfrac{1}{3}\right)+1.$

Lại có $c\ge 0$ và $c^2-c+\dfrac{1}{3}>0$ nên $4B\le 1.$

$MaxB=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$ và $c=0.$

88. Ta có $A=\left(a+b+c\right)-\left(ab+bc+ca\right)=a\left(1-b\right)+b\left(1-c\right)+c\left(1-a\right)\ge 0$

(do $0\le a,b,c\le 1$).

$\min A=0\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b=c=1.$

Do $a,b,c\le 1$ nên $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\ge 0$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)-\left(ab+bc+ca\right)\le 1-abc\le 1.$

$MaxA=1\Leftrightarrow$ Trong a,b,c có một số bằng 1, một số bằng 0.

89. a) Từ giả thiết suy ra $b+c=5-a$ và $b^2+c^2=11-a^2.$

Do bất đẳng thức $2\left(b^2+c^2\right)\ge\left(b+c\right)^2$ nên $2\left(11-a^2\right)\ge\left(5-a\right)^2$

$\Rightarrow 3a^2-10a+3\le 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\le a\le 3.$

$\min a=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow b=c=\dfrac{7}{3};Maxa=3\Leftrightarrow b=c=1.$

b) Giải tương tự câu a được $3a^3-8a+4\le 0$

$\Leftrightarrow\left(a-2\right)\left(3a-2\right)\le 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\le a\le 2.$

$\min a=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow b=c=\dfrac{5}{3};Maxa=2\Leftrightarrow b=c=1.$

c) Giải tương tự Ví dụ 97.

$\min a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow b = c = d = \frac{1}{2}.$

$Maxa = 1 \Leftrightarrow b = c = d = 0.$

90. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy,$ ta có

$(a+b)^2 \geq 4ab$

$(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b)$

$(a+b+c+d)^2 \geq 4d(a+b+c).$

Suy ra $A^2(a+b+c+d)^2 \geq 64abcd(a+b)(a+b+c)$

$\Rightarrow 16A^2 \geq 64.\frac{1}{2}A \Rightarrow A \geq 2.$

$\min A = 2 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}, c = 1, d = 2.$

Chuyên đề 8

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC

91. a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0.$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow a = b$

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - 1\right)$

$= \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} + \frac{ab+c^2-bc-ac}{ac}$

$= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)(b-c)}{ac}$

Do a, b, c có tính chất hoán vị vòng quanh, ta giả sử c là số nhỏ nhất $(a \geq c, b \geq c)$. Khi đó

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq 0,$ tức là $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c.$

92. a) $\frac{a}{a^3+2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{a}{a^3+2} \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + 2 - 3a \geq 0.$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) \geq 0,$ đúng do $a > 0.$

b) Ta có

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{a+1} - 2$ (1)

Ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}$ nên

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq \dfrac{\left[(a+1)-(b+1)\right]^2}{(a+1)(b+1)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq \dfrac{(a-b)^2}{(a+1)(b+1)}$, đúng.

93. a) Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0.$

Ta có $\dfrac{9}{2a+b} = \dfrac{9}{a+a+b} \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}.$

Tương tự, $\dfrac{9}{2b+c} \leq \dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}, \dfrac{9}{2c+a} \leq \dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}.$

Suy ra $\dfrac{9}{2a+b}+\dfrac{9}{2b+c}+\dfrac{9}{2c+a} \leq 3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right).$

Suy ra điều phải chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c.$

b) Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$

Ta có $\dfrac{4}{2a+b+c} \leq \dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b+c}$, mà $\dfrac{1}{b+c} \leq \dfrac{b+c}{4bc} = \dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}$

Nên $\dfrac{4}{2a+b+c} \leq \dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}.$

Bạn đọc tự giải tiếp.

c) $A = \dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}$

$= \dfrac{a^2-b^2+b^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}$

$= \left(a^2-b^2\right)\left(\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{c+a}\right)+\left(b^2-c^2\right)\left(\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+b}\right)$

$= \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\dfrac{\left(b^2-c^2\right)(a-c)}{(b+c)(a+b)}.$

Do a, b, c có tính chất hoán vị vòng quanh, ta giả sử c là nhỏ nhất, khi đó $A \geq 0.$ Xảy ra $A = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$

94. a) Cách 1. Dễ chứng minh $\left(a^3+b^3\right) \geq ab(a+b)$

Nên $a^3 \geq ab(a+b)-b^3 \Rightarrow \dfrac{a^3}{b} \geq a^2+ab-b^2.$

Từ đó $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge\left(a^2+2ab-b^2\right)+\left(b^2+bc-c^2\right)+\left(c^2+ac-a^2\right)=ab+bc+ca.$ Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c.$

Cách 2.

Xét $\frac{a^3}{b}+ab\ge 2\sqrt{\frac{a^3}{b}ab}=2a^2.$ Từ đó

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+\left(ab+bc+ca\right)\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca.$$

b) Ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}.$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

c) Dễ chứng minh $a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)$ nên $a^3\ge a^2b+ab^2-b^3$

$$\Rightarrow 3a^3\ge 2a^3+a^2b+ab^2-b^3=\left(2a-b\right)\left(a^2+b^2+ab\right).$$

Suy ra $\frac{3a^3}{a^2+b^2+ab}\ge 2a-b.$

Bạn đọc tự giải tiếp.

95. Xét hiệu hai vế. Giải tương tự Ví dụ 108.

96. Đặt $A=\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}.$ Ta có

$$A\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3-A\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)-A\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{a^2}{a+b^2}\right)+\left(b-\frac{b^2}{b+c^2}\right)+\left(c-\frac{c^2}{c+a^2}\right)\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}\le\frac{3}{2}.$$

Đặt $B=\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2},$ cần chứng minh $B\le\frac{3}{2}.$

Xét $\frac{ab^2}{a+b^2}\le\frac{ab^2}{2\sqrt{ab^2}}=\frac{\sqrt{ab^2}}{2}=\frac{2\sqrt{ab.b}}{4}\le\frac{ab+b}{4}.$ Từ đó

$$4B\le\left(ab+b\right)+\left(bc+c\right)+\left(ca+a\right)=\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)$$

$$=3+\left(ab+bc+ca\right).\qquad(1)$$

Ta lại có $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$

$$\Rightarrow 3\left(ab+bc+ca\right)\le\left(a+b+c\right)^2=3^2=9$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le 3.\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4B \le 3+3=6 \Rightarrow B \le \frac{3}{2}$.

Do đó $A \ge \frac{3}{2}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

97. a) $(a-1)(b-1)(c-1)=\left(\frac{x}{x-1}-1\right)\left(\frac{y}{y-1}-1\right)\left(\frac{z}{z-1}-1\right)$

$=\frac{1}{x-1}.\frac{1}{y-1}.\frac{1}{z-1}=\frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)}=abc.$ (1)

b) Ta có $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$. (2)

Từ (1) suy ra $abc+(a+b+c)-(ab+bc+ca)-1=abc$

$\Rightarrow -(ab+bc+ca)=1-(a+b+c)$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+2$

$=(a+b+c-1)^2+1 \ge 1$.

98. Ta có $A=\left|x+\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{x^2+1}{x}\right|=\frac{x^2+1}{|x|} \ge 2$.

$\min A=2 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

99. a) Gọi a là giá trị của biểu thức A. Ta có

$ax^2+ax+a=x^2+1 \Leftrightarrow (a-1)x^2+ax+(a-1)=0$. (1)

Xét a = 1 thì x = 0.

Xét a ≠ 1 thì (1) là phương trình bậc hai. Để tồn tại x thì $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow 3a^2-8a+4 \le 0 \Leftrightarrow (a-2)(3a-2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le a \le 2$.

$\min A=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=1$; $\max A=2 \Leftrightarrow x=-1$.

b) Gọi a là giá trị của biểu thức B.

Ta có $ax^2-2x+(a-1)=0$.

Dùng phương pháp miền giá trị như câu a ta được $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\min B=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$\max B=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

100. a) Đặt x + 1 = y. Đưa về $A=1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}$. Đặt $\frac{1}{y}=z$.

$\min A=\frac{3}{4} \Leftrightarrow x=1$.

b) $A=\dfrac{x^2+2x+1-x}{(x+1)^2}=1-\dfrac{x}{(x+1)^2}\le 1\ (do\ x\ge 0)$.

$\max A=1\Leftrightarrow x=0.$

101. a) $A=(x-2)^2+\dfrac{(x-2)^2}{x}\ge 0;\ \min A=0\Leftrightarrow x=2.$

b) $A=(x-1)^2+\dfrac{(x-1)^2}{x}+1\ge 1;\ \min \mathrm{B}=1\Leftrightarrow x=1.$

c)Việc dự đoán xảy ra cực trị khi x = 2 tức là $x^2 = 1$, ta biến đổi như sau:

$$C=\frac{6x^2+1}{2x}=\frac{6(x^2+1)-5}{2x}=\frac{3(x^2+1)}{x}-\frac{5}{2x}\ge\frac{3.2x}{x}-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

$\min C=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow x=1.$

d) *Cách 1.* Với dự đoán xảy ra cực trị khi x = 0, khi đó $D=\dfrac{1}{2}$, ta biến đổi như sau:

$$D=\frac{x^2+2x+1}{x+2}=\frac{2x^2+4x+2}{2(x+2)}=\frac{(x+2)+(2x^2+3x)}{2(x+2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x(2x+3)}{2(x+2)}\ge\frac{1}{2}(do\ \ x\ge 0);\ \min D=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0.$$

Cách 2. Đặt x + 2 = y. Do $x\ge 0$ nên $y\ge 2$. Ta có $D=y+\dfrac{1}{y}-2.$

Với $y\ge 2$ thì $\min\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=2\dfrac{1}{2}$ (xem Ví dụ 109b) nên $\min \mathrm{D}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=2\Leftrightarrow x=0.$

e) $\min \mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=0$ (xem câu d).

g) Với dự đoán xảy ra cực trị khi $x=\sqrt{2}$, khi đó $x^4=4$, nên $x^4=\dfrac{4\sqrt{2}}{x}$, ta biến đổi như sau:

$$G=x^4+\frac{4}{x}=x^4+\frac{4\sqrt{2}}{x}-\frac{4(\sqrt{2}-1)}{x}. \qquad (1)$$

Ta có $x^4+\dfrac{4\sqrt{2}}{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{x^4 4\sqrt{2}}{x}}=4\sqrt{x^3\sqrt{2}}\ge 4\sqrt{(\sqrt{2})^3\sqrt{2}}=8.$ (2)

Do $x\ge\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\dfrac{-4}{x}\ge\dfrac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $G\ge 8-2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=4+2\sqrt{2}.$

$\min G=4+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$

102. Gọi a là giá trị của A, dẫn đến $ax^2 - mx + (a-n) = 0.$ (1)

Xét $a \neq 0$, tìm điều kiện $\Delta \geq 0$ để (1) có nghiệm, ta được

$4a^2 - 4na - m^2 \leq 0.$ (2)

$(2) \Leftrightarrow 4a^2 - 4na + n^2 \leq m^2 + n^2$

$\Leftrightarrow (2a-n)^2 \leq m^2 + n^2$

$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2+n^2} \leq 2a - n \leq \sqrt{m^2+n^2}$

$\Leftrightarrow n - \sqrt{m^2+n^2} \leq 2a \leq n + \sqrt{m^2+n^2}$

Do $-4 \leq a \leq 1$ nên $-8 \leq 2a \leq 2.$

Suy ra $\begin{cases} n - \sqrt{m^2+n^2} = -8 \\ n + \sqrt{m^2+n^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 4 \\ n = -3. \end{cases}$

103. a) $A = \dfrac{2x^2+2y^2}{2(x-y)^2} = \dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2(x-y)^2} = \dfrac{(x+y)^2}{2(x-y)^2} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}.$

$\min A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -y \neq 0.$

b) Đặt x – y = a > 0 và y + 1 = b > 0 thì a + b = x + 1.

$B = a + \dfrac{4}{ab^2} + b - 1.$ Ta có $a + \dfrac{4}{ab^2} \geq 2\sqrt{\dfrac{4}{b^2}} = \dfrac{4}{b}$ nên

$B \geq \dfrac{4}{b} + b - 1 \geq 2\sqrt{\dfrac{4}{b}.b} - 1 = 3.$

$\min B = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

104. a) *Cách 1.* $A = \dfrac{(2x-y)^2}{x^2+y^2} - 1 \geq -1; \min A = -1 \Leftrightarrow y = 2x \neq 0.$

$A = 4 - \dfrac{(x+2y)^2}{x^2+y^2} \leq 4; \max A = 4 \Leftrightarrow x = -2y \neq 0.$

Cách 2. Xét y = 0 thì A = 3.

Xét $y \neq 0.$, chia tử và mẫu cho y^2 được

$A=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\dfrac{x}{y}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1}$. Đặt $\dfrac{x}{y}=z$ thì $A=\dfrac{3z^2-4z}{z^2+1}$.

Đặt giá trị của A là a, đưa về $(a-3)z^2+4z+a=0$.

Từ $\Delta'\geq 0$ ta được $-1\leq a\leq 4$. Bạn đọc tự giải tiếp.

b) Ta có $x^4+1\geq 2x^2, y^4+1\geq 2y^2$ nên

$$x^4+y^4+6\geq 2x^2+2y^2+4=(x+y)^2+(x-y)^2+4\geq (x-y)^2+4. \qquad (1)$$

Ta lại có $(x-y)^2+4\geq 2.|x-y|.2=4|x-y|. \qquad (2)$

Do đó $|B|=\dfrac{|x-y|}{x^4+y^4+6}\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow -\dfrac{1}{4}\leq B\leq\dfrac{1}{4}$.

$\min B=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x-1, y=1; \max B=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=1, y=-1.$

105. a) $A=\dfrac{1}{xy}=\dfrac{(x+y)^2}{xy}\geq 4; \min A=4\Leftrightarrow x=y=2.$

b) $B=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{xy}=\dfrac{(x+y)^2}{xy}\geq 4.$

$\min B=4\Leftrightarrow x=y=2.$

c) $C=x^2+y^2\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}=\dfrac{1}{2}; \min C=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}.$

d) $D=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}\geq\dfrac{2xy}{x^2y^2}=2.\dfrac{1}{xy}=2.\dfrac{(x+y)^2}{xy}\geq 2.4=8.$

$\min D=8\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}.$

e) $E=\dfrac{1}{x^2y^2}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1-(x^2+y^2)}{x^2y^2}=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^3)}{x^2y^2}=\dfrac{2xy}{x^2y^2}$

$= 2.\frac{1}{xy} = 2.\frac{(x+y)^2}{xy} \geq 2.4 = 8; \min E = 8 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$

$g)\ \mathrm{G} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + 4.$

Ta có $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$ (câu c), $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{8}$ (câu d)

Nên $G \geq \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$

Ta có $\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \geq 8$ (câu e) nên $H \geq 9.$

$\min \mathrm{H} = 9 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y} = \frac{1}{2}.$

h) $\mathrm{H} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$

Ta có $\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \geq 8$ (câu e) nên $\mathrm{H} \geq 9.$

$\min \mathrm{H} = 9 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y} = \frac{1}{2}.$

106. a) $A = \left(x + \frac{8}{x}\right) + 2\left(y + \frac{3}{y}\right).$

$x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{8}{x}} = 4\sqrt{2}.$

$y + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{y.\frac{3}{y}} = 2\sqrt{3}.$

Suy ra $A \geq 4\sqrt{2} + 2.2\sqrt{3} = 4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right).$

$\min A = 4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{3}.$

b) $A = x + \frac{8}{x} + 2y + \frac{6}{y} = \left(\frac{x}{2} + \frac{8}{x}\right) + 3\left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) + \frac{x+y}{2}$

$\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{x}}+3.2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{2}{y}}+\frac{6}{2}=4+6+3=13.$

$\min A=13 \Leftrightarrow x=4, y=2.$

107. a) Ta có $\frac{2}{3}\geq x+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{y}}\Rightarrow \frac{1}{3}\geq \sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow \frac{x}{y}\leq \frac{1}{9}.$

Với dự đoán xảy ra cực trị khi y = 9x, tức là $y^2=81x^2$, ta biến đổi như sau:

$$A=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{81x^2+y^2}{xy}-\frac{80x}{y}\geq \frac{2.9x.y}{xy}-80.\frac{1}{9}=\frac{82}{9}.$$

$\min A=\frac{82}{9}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}, y=3.$

b) Ta có $x+2y\geq 8$ $\quad(1)$

$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{4}{x}}=4.$ $\quad(2)$

Cộng (1) với (2) được $2\left(x+y+\frac{2}{x}\right)\geq 12\Rightarrow 2B\geq 12\Rightarrow B\geq 6.$

$\min B=6\Leftrightarrow x=2, y=3.$

c) Từ giả thiết $2x^2+\frac{1}{x^2}+y^2=4$ suy ra

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(x^2+y^2+2xy\right)-2xy=2$$

$$\Rightarrow 2xy=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+y\right)^2-2\geq -2\Rightarrow xy\geq -1.$$

$$\min\left(xy\right)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-1 \\ x=-1, y=1. \end{array}\right.$$

108. $A=\frac{1}{x^4+y^2+2xy^2}$. Ta có $x^4+y^2\geq 2x^2y>0$ nên

$$A=\frac{1}{x^4+y^2+2xy^2}\leq \frac{1}{2x^2y+2xy^2}=\frac{1}{2xy\left(x+y\right)}. \qquad (1)$$

Ta có $\left(x+y\right)^2\geq 4xy\geq 4\Rightarrow x+y\geq 2$. Ta lại có $xy\geq 1$

Nên $2xy(x+y) \ge 4 \Rightarrow \dfrac{1}{2xy(x+y)} \le \dfrac{1}{4}.$ $\qquad (2)$

109. a) Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} (x-1)(x-2) \le 0 \\ (y-1)(y-2) \le 0 \\ (x-2)(y-2) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 3x-2 \\ y^2 \le 3y-2 \\ -xy \le 4-2x-2y \end{cases}$

Suy ra $x^2 - xy + y^2 \le x + y.$

Do $x^2 - xy + y^2 > 0$ nên $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} \ge 1.$

$$\min A = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=2, y=1 \\ x=y=2 \end{array}\right.$$

Tìm giá trị lớn nhất của A:

$$A = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{x+y}{(x-y)^2+xy} \le \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le 1+1 = 2.$$

$\max A = 2 \Leftrightarrow x = y = 1.$

b) Gọi a là giá trị của B, ta có

$$\frac{2x+3y}{2x+y+2} = 1 \Rightarrow 2x(x-1) + y(a-3) = -2a.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$(-2a)^2 = \left[2x(a-1) + y(a-3)\right]^3 \le \left(4x^2+y^2\right)\left[(a-1)^2 + (a-3)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 \le (a-1)^2 + (a-3)^2 = 2a^2 - 8a + 10$$

$$\Leftrightarrow a^2 \le 5 - 4a \Leftrightarrow (a+5)(a-1) \le 0 \Leftrightarrow -5 \le a \le 1.$$

$\min B = -5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{10}, y = -\dfrac{4}{5}.$

$max = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = 1.$

110. Giả sử $x \le y$ thì $\dfrac{1}{x} \ge \dfrac{1}{y}.$

Ta có $\begin{cases} m \le x & (1) \\ n \le y & (2) \\ m \le \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \le \dfrac{2}{x} & (3) \end{cases}$

Nếu $x \le y$ thì $\dfrac{2}{x} < \sqrt{2}$. . Từ (3) suy ra $m < \sqrt{2}$ (4)

Nếu $x \le \sqrt{2}$ thì từ (1) suy ra $m \le \sqrt{2}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\max m = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, y \ge \sqrt{2} \\ x \ge \sqrt{2}, \mathrm{y} = \sqrt{2}. \end{array}\right.$

111. Ta có $2a \le a^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a^2+1} \le \dfrac{1}{2}$.

Từ đó $A = \dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$\max A = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

112. $A = \dfrac{a}{2b+2c-a} + \dfrac{b}{2c+2a-b} + \dfrac{c}{2a+2b-c}$.

Ta đổi biến để mẫu là đơn thức.

Đặt 2b + 2c – a = x (1)

2c + 2a - b = y (2)

2a + 2b – c = z (3)

Cộng (1), (2), (3) theo vế được 3(a + b + c) = x + y + z

$\Leftrightarrow 2a + 2b + 2c = \dfrac{2(x+y+z)}{3}$ (4)

Lấy (4) trừ (1) được $3a = \dfrac{2(x+y+z)}{3} - x = \dfrac{2y+2z-x}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{9a}{2b+2c-a} = \dfrac{2y+2z-x}{x} = 2\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x}\right) - 1.$

Suy ra $9A = 2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)-3 \ge 2(2+2+2)-3 = 9 \Rightarrow A \ge 1.$

$\min A = 1 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$

113. a) Áp dụng bất đẳng thức

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ với a, b, c > 0 ta có $A \ge \frac{9}{a+b+c} = 9.$

$\min A = 9 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$

b) Áp dụng bất đẳng thức $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$.

ta có $3B \ge (a+b+c)^2 = 1.$

c) Áp dụng bất đẳng thức $3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (x+y+z)^2$

ta có $3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ge \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \Rightarrow 3C \ge A^2.$

Theo câu a ta có $A^2 \ge 81$nên 3C ≥ 81.

$$\min C = 27 \Leftrightarrow a = b = c.$$

d) $D = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2$

$= \left(a^2+b^2+c^2\right) + \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) + 6$

Theo câu b và c ta có $D \ge \frac{1}{3} + 27 + 6 = 33\frac{1}{3}.$

$\min D = 33\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c.$

114. a) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$ với x, y, z > 0 ta có:

$$A = \frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1} \ge \frac{9}{3+ab+bc+bc+ca}.$$

Ta có $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

Mà $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ nên

$3(ab+bc+ca)^2 \le (a+b+c)^2 \le 3^2 \Rightarrow ab+bc+ca \le 3.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}.$

$\min A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}$ với x, y > 0 ta có

$$\frac{1}{(a+2b)(a+2c)} \ge \frac{4}{(2a+2b+2c)^2} = \frac{1}{(a+b+c)^2} \ge \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Suy ra $B \ge \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$

$\min B = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

115. a) Xét $\frac{(a+b)^2}{c} + 4c \ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{c}.4c} = 4(a+b) = 4(3-c) = 12-4c \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{c} \ge 12-8c.$

Từ đó $A \ge 36-8(a+b+c) = 36-8.3 = 12.$

$\min A = 12 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$ với x, y, z > 0 ta có

$$B = \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$\Rightarrow B \ge \frac{9}{(a+b+c)^2} = \frac{9}{3^2} = 1.$$

$\min B = 1$ Khi chẳng hạn a = b = c = 1.

c) Xét $\frac{1}{b^2+1} = 1-\frac{b^2}{b^2+1} \ge 1-\frac{b^2}{2b} = 1-\frac{b}{2}$

$\Rightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \ge (a+1)\left(1-\frac{b}{2}\right) = a-\frac{b}{2}+1-\frac{ab}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2(a+1)}{b^2+1} \geq 2a-b+2-ab.$ Từ đó

$$2C \geq 2(a+b+c)-(b+c+a)+6-(ab+bc+ca)=9-(ab+bc+ca). \qquad (1)$$

Ta lại có $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 3^2 = 9$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq 3. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2C \geq 9-3=6 \Rightarrow C \geq 3.$

$$\min C = 3 \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

d) Xét $\dfrac{a}{b(a+b^2)} = \dfrac{a+b^2-b^2}{b(a+b^2)}$

$$= \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}}. \qquad (1)$$

Ta lại có $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = 1.\sqrt{\dfrac{1}{a}} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$ (bất đẳng thức Cô – si)

Nên $-\dfrac{1}{2\sqrt{a}} = -\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{a}\right).$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a}{b(a+b^2)} \geq \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4a}$. Từ đó

$$D \geq \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Ta lại có $\left(\dfrac{1}{a}+a\right)+\left(\dfrac{1}{b}+b\right)+\left(\dfrac{1}{c}+c\right) \geq 2+2+2=6$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(a+b+c) \geq 6 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $D \geq \dfrac{3}{4}.3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}.$

$$\min D = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

116. a) Xét $\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-ab}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}\ge a-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=a-\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Từ đó $A=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge(a+b+c)-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=(a+b+c)-\frac{1}{2}$.

Ta lại có $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ nên $A\ge\frac{1}{2}$.

$\min A=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Trước hết chứng minh $B\ge ab+bc+ca$ (xem bài 94a).

$\min B=3\Leftrightarrow a=b=c=1$.

117. Ta có $ab+c\le\frac{(a+b)^2}{4}+c=\frac{(1-c)^2+4c}{4}=\frac{(c+1)^2}{4}$

Nên $\frac{ab+c}{c+1}\le\frac{c+1}{4}$. Từ đó $4A\le a+b+c+3=4;\max A=1\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

118. Xét tử ab + bc + ca = (ab + bc + ca)(a + b + c).

Biến đổi thành (a + b)(b + c)(c + a) + abc.

Do đó $A=1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Hãy chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

$\max A=\frac{9}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Xét a + bc = a.1 + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c).

Từ đó $B=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=2A$ (theo câu a).

$max\,B=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

119. a) Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow\dfrac{1}{a^2+b+c}\le\dfrac{1+b+c}{\left(a+b+c\right)^2}$ Từ đó $A\le\dfrac{3+2\left(a+b+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{3+2.3}{9}=1.$

$max\ A=1\Leftrightarrow a=b=c=1.$

b) Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$$

$\Rightarrow\dfrac{1}{a^2+b^2+1}\le\dfrac{c^2+2}{\left(a+b+c\right)^2}$. Từ đó

$B\le\dfrac{a^2+b^2+c^2+6}{\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}=1.$

$$max\,B=1\Leftrightarrow a=b=c=1.$$

120. Do $a\le1,b\le1$ nên $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\ge0\Rightarrow1+ab\ge a+b$

$\Rightarrow1+c+ab\ge a+b+c\Rightarrow\dfrac{b}{1+c+ab}\le\dfrac{b}{a+b+c}.$

Từ đó $A\le\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1;max\ A=1\Leftrightarrow a=b=c=1.$

121. a) Do $b\le2,c\le2$ nên $\left(b-2\right)\left(2-c\right)\le0\Rightarrow2b+2c\le bc+4.$

Ta lại có $2a\le4$ nên $2\left(a+b+c\right)\le bc+8.$ (1)

Xét a + b + c = 0 thì a = b = c = 0 nên A = 0.

Xét $a+b+c\ne0$ từ (1) có $\dfrac{a}{bc+8}\le\dfrac{a}{2\left(a+b+c\right)}.$

b) Ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge2.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}=\frac{8}{4xy}\ge\frac{8}{\left(x+y\right)^2}\text{ nên}$$

$$\frac{1}{\left(a-b\right)^2}+\frac{1}{\left(b-c\right)^2}\ge\frac{8}{\left(a-b+b-c\right)^2}=\frac{8}{\left(a-c\right)^2}.$$

Suy ra $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{(a-c)^2}\Rightarrow B\ge\frac{9}{(a-c)^2}.$ (1)

Ta lại có $|a-c|\le 2$ (do $0\le a,c\le 2$) nên $\frac{1}{(a-c)^2}\ge\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\ge\frac{9}{4}$.

$\min B=\frac{9}{4}\Leftrightarrow(a;b;c)$ bằng (2; 1; 0) hoặc các hoán vị.

122. a) $A=\frac{b^2+c^2}{a^2}+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với x, y > 0

Ta có $A\ge\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{4a^2}{b^2+c^2}=\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}\right)+\frac{3a^2}{b^2+c^2}.$

Ta có $\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}\ge 2$ và $\frac{3a^2}{b^2+c^2}\ge 3.$

$\min A=5\Leftrightarrow b=c=\frac{a}{\sqrt{2}}.$

b) Ta có $(a+1)^2\le 2(a^2+1)\Rightarrow\frac{2}{(a+1)^2}\ge\frac{1}{a^2+1}.$

Từ đó $2B\ge\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}.$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ với x, y, z > 0.

Bạn đọc tự giải được $\min B=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=b=c=1.$

c) $C=\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}.$

Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với tử, ta được

$C=\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}.$

Áp dụng bất đẳng thức về cộng mẫu số $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

(xem Ví dụ 99), ta được $C\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1.$

$$\min C=1\Leftrightarrow a=b=c.$$

d) Trước hết ta chứng minh bổ đề $\frac{1}{a^3+2}\ge-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}.\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow 6+a^2(a^3+2)-3(a^3+2)\ge 0\Leftrightarrow a^5-3a^3+2a^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow a^3-3a+2\ge 0\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\ge 0 \text{ đúng do a > 0.}$$

Xảy ra đẳng thức tại a = 1.

Từ bổ đề suy ra $D\ge-\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{2}.3=1;\min D=1\Leftrightarrow a=b=c=1.$

Lưu ý. Bạn đọc có thể đặt câu hỏi: Vì sao tìm được hệ số và trong bổ đề trên? Có thể giải thích được với kiến thức về đọa hàm học ở Trung học phổ thông. Kí hiệu đạo hàm của hàm số f(x) là f′(x), ta có:

- Đạo hàm của hàm lũy thừa x^n là nx^{n-1}.
- Đạo hàm của hằng số bằng 0.
- Đạo hàm của hàm phân thức $\frac{1}{v}$ là $-\frac{v'}{v^2}$.

Ta thường tìm m và n từ hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{a^3+2}=ma^2+n & (2)\\ \left(\frac{1}{a^3+2}\right)'=(ma^2+n)' & (3)\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{3a^2}{(a^3+2)^2}=2am \qquad (4)$$

Với dự đoán cực trị xảy ra tại a = 1, thay vào (4) được $m=-\frac{1}{6}.$

Thay vào (2) được $n=\frac{1}{2}.$ Từ đó ta đi chứng minh bổ đề

$\frac{1}{a^3+2}\ge-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}$ với a > 0.

Có thể diễn đạt lời giải bài toán trên như sau (thực chất cũng là sử dụng bổ đề trên):

Ta có $\frac{a}{a^3+2} \ge \frac{1}{3}$ với a > 0 (xem bài 92a)

$$\Rightarrow \frac{-a^3}{a^3+2} \ge \frac{-a^2}{3} \Rightarrow \frac{2-\left(a^3+2\right)}{a^3+2} \ge \frac{-a^2}{3} \Rightarrow \frac{2}{a^3+2} - 1 \ge \frac{-a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3+2} \ge \frac{1}{2} - \frac{a^2}{6}.$$

Từ đó $D \ge \frac{1}{2}.3 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} = 1; \min D = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

123. a) Áp dụng bất đẳng thức $\left(x+y+z\right)^2 \ge 3\left(xy+yz+zx\right)$

(bạn đọc tự chứng minh), ta có

$$A^2 = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \ge 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{3\left(a+b+c\right)}{abc} = 3.$$

$\min A = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}.$

b) Xét $\frac{b-2}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{b-2+a}{a^2} = \frac{\left(a-1\right)+\left(b-1\right)}{a^2} = \frac{a-1}{a^2} + \frac{b-1}{a^2}.$

Từ đó

$$B + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{a-1}{a^2} + \frac{b-1}{a^2} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{c-1}{b^2} + \frac{c-1}{c^2} + \frac{a-1}{c^2}$$

$$= \left(a-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \left(b-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) + \left(c-1\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\ge \left(a-1\right)\frac{2}{ac} + \left(b-1\right)\frac{2}{ab} + \left(c-1\right)\frac{2}{bc} = \frac{2}{c} - \frac{2}{ac} + \frac{2}{b} - \frac{2}{bc} + \frac{2}{a} - \frac{2}{ab}$$

$$= 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right). \qquad (1)$$

Ta lại có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = 1.$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $B + A \ge 2A - 2 \Rightarrow B \ge A - 2.$

Theo câu a ta có $A \ge \sqrt{3}$ nên $B \ge \sqrt{3} - 2.$

$\min B = \sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}.$

Chuyên đề 9

BẤT ĐẲNG THỨC VA CỰC TRỊ DẠNG CĂN THỨC

124. a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) Ta có $\sqrt{y-1}=\sqrt{1.(y-1)}\le\frac{1+y-1}{2}=\frac{y}{2}\Rightarrow x\sqrt{y-1}\le\frac{xy}{2}$.

Tương tự, $y\sqrt{x-1}\le\frac{xy}{2}$.

Suy ra $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi x = y = 2.

c) $\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\ge 2,5$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+y^2}{xy}-2\right)+\left(\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2}{xy}-\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2(x+y)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}-\frac{1}{2(x+y)}\right]\ge 0 \qquad (1)$$

Gọi A là biểu thức trong ngoặc vuông, ta có

$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}\ge\frac{4\sqrt{xy}}{xy}=\frac{4}{\sqrt{xy}}=\frac{8}{2\sqrt{xy}}\ge\frac{8}{x+y}$ nên

$$A\ge\frac{8}{x+y}-\frac{1}{2(x+y)}=\frac{15}{2(x+y)}>0.$$

Vậy (1) được chứng minh. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi x = y.

d) Do abc = 1 nên

$$\frac{1+a+b+c}{2}\ge\sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\Leftrightarrow\frac{1+a+b+c}{2}\ge\sqrt{1+ab+bc+ca}.$$

Ta có $\frac{(1+a)+(b+c)}{2}\ge\sqrt{(1+a)(b+c)}=\sqrt{b+c+ab+ac}$.

Do đó chỉ cần chứng minh $b+c\ge 1+bc$.

Do abc = 1 nên trong ba số a, b, c tồn tại một số lớn hơn hay bằng 1 và một số nhỏ hơn hoặ bằng 1, chẳng hạn hai số đó là b và c. Khi đó $(b-1)(c-1) \le 0 \Rightarrow b+c \ge 1+bc.$

c) Từ giả thiết suy ra 0 < a, b, c < 1.

Ta có $2a\sqrt{1-a^2} \le a^2 + \left(1-a^2\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ge 2a \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} \ge 2a^2.$

Do đó $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}} \ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right) = 2.$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ trái với $a^2+b^2+c^2 = 1.$

Vậy $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}} > 2.$

125. a) $A = |x-2| + |4-x| \ge (x-2) + (4-x) = 2.$

$\min A = 2 \Leftrightarrow 2 \le x \le 4.$

b) $B = |x-1| + |2x+3| + |4-3x| \ge x-1+2x+3+4-3x = 6.$

$\min B = 6 \Leftrightarrow 1 \le x \le \dfrac{4}{3}.$

126. $A = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-5} \le \sqrt{(2x+3)-(2x-5)} = \sqrt{8}.$

$\max A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}.$

127. Để tìm giá trị nhỏ nhất, ta xét A^2 hoặc dùng bất đẳng thức Cô – si.

Đáp số: $\min A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 6. \end{array}\right.$

Để tìm giá trị lớn nhất, có nhiều cách:

- *Cách 1* (dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

$A^2 = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)(x-4+6-x) = 4.$

$max\ A = 2 \Leftrightarrow x = 5.$

- *Cách 2* (xét A^2 rồi dùng bất đẳng thức Cô – si)

$A^2 = x-4+6-x+2\sqrt{(x-4)(6-x)} = 2+2\sqrt{(x-4)(6-x)} \le 2+(x-4+6-x) = 4.$

$max\ A = 2 \Leftrightarrow x-4 = 6-x \Leftrightarrow x = 5.$

- *Cách 3* (xét A^2 rồi đặt ẩn phụ)

$A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-4)(6-x)}$. Đặt x – 5 = y thì

$A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-4)(6-x)} = 2 + 2\sqrt{1-y^2} \le 4.$

$max\, A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 5.$

b) ĐKXĐ: $0 \le x \le 1.$

$B^2 = \left(4\sqrt{x} + 3\sqrt{x-1}\right)^2 \le \left(4^2 + 3^2\right)(x + 1 - x) = 25.$

$max\, B = 5 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{4} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{25}.$

128. a) $A^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{x+2} + 1.\sqrt{2-x}\right)^2 \le (2+1)(x + 2 + 2 - x) = 12.$

$max\, A = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}.$

b) Áp dụng bất đẳng thức $(x + y + z)^2 \le 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ ta có

$B^2 \le 3(2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1) = 3\left[2(a + b + c) + 3\right]$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $B^2 \le 27; max\, B = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

c) Giải tương tự Ví dụ 129. *Đáp số: max C = 2* $\Leftrightarrow a = b = 2.$

d) Ta có

$2\sqrt{x^3 + 1} = 2\sqrt{(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)} \le (x+1) + \left(x^2 - x + 1\right) = x^2 + 2.$

Suy ra $2D = 2\sqrt{x^3 + 1} + 2\sqrt{y^3 + 1} \le x^2 + y^2 + 4 = 8 + 4 = 12$

$\Rightarrow D \le 6; max\, D = 6 \Leftrightarrow x = y = 2.$

129. a) $A^2 = \left(-2x + 1.\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \le \left[(-2)^2 + 1^2\right]\left[x^2 + 9 - x^2\right] = 45.$

$max\, A = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{x}{-2} = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{5}}{5}.$

b) $B = 1 + 1.(x-1) + 1.\sqrt{-x^2 + 2x + 3} \le 1 + \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left[(x-1)^2 + \left(-x^2 + 2x + 3\right)\right]} = 1 + \sqrt{8}.$

$max = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$

c) Cách giải bằng bất đẳng thức Cô – si:

$$2\sqrt{1.\left(-x^2-8x-11\right)} \le 1+\left(-x^2-8x-11\right) = -x^2-8x-10.$$

$$2C = 4x+2\sqrt{-x^2-8x-11} \le 4x-x^2-8x-10 = -\left(x+2\right)^2-6 \le -6.$$

$$max\, C = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ -x-8x-11=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

130. Ta có $2A = 2x\sqrt{1-4x^2}$

$$\Rightarrow |2A| = |2x|\sqrt{1-4x^2} \le \frac{\left(2x\right)^2+\left(1-4x^2\right)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |A| \le \frac{1}{4}.$$

$$\min A = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \max A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

131. Do $2x-x^2 \ge 0$ nên

$$A = \sqrt{2x-x^2}+\sqrt{2x-x^2+3} \ge \sqrt{3}.$$

$$\min A = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Do $0 \le x \le 2$ nên $A = \sqrt{x\left(2-x\right)}+\sqrt{\left(3-x\right)\left(x+1\right)}$

$$= \sqrt{x}.\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{x+1} \le \sqrt{\left(x+3-x\right)\left(2-x+x+1\right)} = 3.$$

$$\max A = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

132. a) Viết A dưới dạng $A = \sqrt{x\left(3-x\right)}-\sqrt{\left(x-1\right)\left(2-x\right)}.$

Giải tương tự Ví dụ 143. *Đáp số:* min A = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

b) Viết B dưới dạng $B = \sqrt{\left(2+x\right)\left(6-x\right)}-\sqrt{\left(1+x\right)\left(1-x\right)}.$

Giải tương tự Ví dụ 143. *Đáp số:* $\min B = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$

133. $A = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$

Giải tương tự Ví dụ 144. *Đáp số:* minA = 2 $\Leftrightarrow x = 0.$

134. a) $A = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$. Đặt $\sqrt{x-3} = y \ge 0$ ta có

$$A = \frac{y}{y^2+3} \le \frac{y}{2y\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\max A = \frac{\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow x = 6.$$

b) $B = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x+1}$. Đặt $\sqrt{x-4} = y$.

Giải tương tự câu a. *Đáp số:* $\max B = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \Leftrightarrow x = 9.$