ĐỀ THI THỬ HSG QUỐC GIA 2021

Ngày 1

Thời gian: 180 phút

Bài 1 (5 điểm): Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

Bài 2 (5 điểm): Cho (a_n) và (b_n) là hai dãy số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_o = 1,\, a_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2b_{n+1} = 2b_n - a_n \\ b_n = 2a_{n+1} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Đăt $c_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{a_k}\right)$. Tính $\lim c_n$.

Bài 3 (5 điểm:) Gọi B và C là hai điểm tùy ý nằm trên cạnh AP và PD của tam giác nhọn APD. Gọi Q là giao điểm các đường chéo của tứ giác $ABCD$, H_1, H_2 là trực tâm của tam giác APD và BPC. Giả sử $X\,(X \neq Q)$ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ và tam giác CDQ. Gọi $Y\,(Y \neq Q)$ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCQ và ADQ.

(a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng các điểm X, Y, M, N, Q đồng viên.

(b) Chứng minh rằng nếu đường thẳng H_1H_2 đi qua X thì nó cũng đi qua Y.

Bài 4 (5 điểm:) Trên một bảng đen, ba đầu người ta viết 2015 số tự nhiên phân biệt:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2014}.$$

Sau đó người ta ghi tiếp lên bảng tất cả những số tự nhiên n sao cho n có thể viết dưới dạng tổng của 2 số thuộc 2015 ban đầu (2 số này không nhất thiết phân biệt).

Hỏi sau khi viết xong, trên bảng sẽ có ít nhất bao nhiêu số tự nhiên phân biệt, nếu:

(a) $a_{2014} = 4028$.

(b) $a_{2014} = 4027$.

— Hết —

ĐỀ THI THỬ HSG QUỐC GIA 2021

Ngày 2

Thời gian: 180 phút

Bài 1 (6 điểm): Cho n là một số tự nhiên, dãy (a_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = 2014 \cdot \mathrm{a}_{n+1} - a_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 2$ thì a_n là hợp số.

Bài 2 (7 điểm): Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) Với mọi số thực $x > 1$ thì $f(x)$ là một hàm đồng biến.

(b) Với mọi số thực dương x, y, ta luôn có

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Bài 3 (7 điểm): Cho ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC và cắt AB, AC lần lượt tại E, F, cắt ω tại U và V. Trung điểm của BC là M, gọi ω' là đường tròn ngoại tiếp tam giác UMV. Giả sử bán kính của ω và ω' bằng nhau, hai điểm T, S lần lượt là giao điểm của ME và FT với ω'.

Chứng minh rằng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCS.

— Hết —

Lời Giải Và Bình Luận

Bài 1 (5 điểm): *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(2a+b+c)^2 = [(a+b)+(a+c)]^2 \geqslant 4(a+b)(a+c),$$

từ đó suy ra

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} \leqslant \frac{1}{4(a+b)(a+c)}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\sum \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leqslant \sum \frac{1}{4(a+b)(a+c)} = \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Như vậy, ta cần chỉ ra được

$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqslant \frac{3}{8},$$

hay

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \frac{8}{3}(a+b+c).$$

Ta viết giả thiết của bài toán lại dưới dạng

$$ab+bc+ca \leqslant abc(a+b+c).$$

Sử dụng đánh giá $abc(a+b+c) \leqslant \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$, ta dễ dàng suy ra $ab+bc+ca \geqslant 3$. Từ đó, áp dụng kết quả quen thuộc

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant \frac{8}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, bài toán được chứng minh. □

Bài 2 (5 điểm): *Cho* (a_n) *và* (b_n) *là hai dãy số thực dương thỏa mãn điều kiện:*

$$\begin{cases} a_o = 1,\, a_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2b_{n+1} = 2b_n - a_n \\ b_n = 2a_{n+1} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Đăt $c_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{a_k} \right)$. *Tính* $\lim c_n$.

Lời giải: Từ giả thiết của bài toán, ta có

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2} \\ 2b_{n+1} = 2b_n - a_{n+1} \\ b_n = \frac{1}{3} + 2a_{n+1} \end{cases}$$

tương đương với

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n \\ b_n = \frac{1}{3} + 2a_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n) = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}(a_1 - a_0) \\ b_n = \frac{1}{3} + 2\mathrm{a}_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + 2a_{n+1} \end{cases}$$

hay là

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} \to \frac{1}{3} = b \end{cases}$$

Vậy $a_n = \frac{1}{2^n}$ và $b_n \to \dfrac{1}{3} = b$. Ta sẽ chứng minh $c_n \to b$. Thật vậy, vì $b_n \to b$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho với $n > n_0$,

$$\left| b_n - b \right| < \varepsilon.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\left|c_n - b\right| &= \left|\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot b_k\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot b\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n} 2^k (b_k - b)\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n_0} 2^k (b_k - b)\right] + \frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=n_0+1}^{n} 2^k (b_k - b)\right]\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left|\sum_{k=1}^{n_0} 2^k (b_k - b)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}}\left|b_k - b\right| \\
&\leqslant 2^{-n-1}\sum_{k=1}^{n_0} 2^k (b_k - b) + 2^{-n-1+k} \cdot (n - n_0) \cdot \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

Vậy $\lim c_n = b = \frac{1}{3}$. □

Bài 3 (5 điểm:) *Gọi B và C là hai điểm tùy ý nằm trên cạnh AP và PD của tam giác nhọn APD. Gọi Q là giao điểm các đường chéo của tứ giác $ABCD$, H_1, H_2 là trực tâm của tam giác APD và BPC. Giả sử X $(X \neq Q)$ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ và tam giác CDQ. Gọi Y $(Y \neq Q)$ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCQ và ADQ.*

(a) *Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng các điểm X, Y, M, N, Q đồng viên.*

(b) *Chứng minh rằng nếu đường thẳng H_1H_2 đi qua X thì nó cũng đi qua Y.*

Lời giải: (a) Trước hết ta sẽ chứng minh bốn điểm X, M, N, Q đồng viên, các điểm Y, M, N, Q làm tương tự.

Ta có $\angle XAC = \angle XBD$ và $\angle XCA = \angle XDB$ (do các tứ giác nội tiếp) nên $\triangle XAC \sim \triangle XBD$, ta được

$$\frac{XC}{XD} = \frac{AC}{BD} = \frac{MC}{ND}.$$

Kết hợp với $\angle XCM = \angle XDN$ ta có $\triangle XCM \sim \triangle XDN$. Suy ra $\angle XMC = \angle XND$, nên $\angle XMQ = \angle XNQ$, do đó X, M, N, Q đồng viên. Các điểm Y, M, N, Q tương tự cũng đồng viên.

Vậy X, Y, M, N, Q đồng viên, ta có điều phải chứng minh.

(b) Ta có H_1, H_2 là trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC, BD nên

$$H_1H_2 \perp MN, \tag{1}$$

và $X \in H_1H_2$. Theo tính chất phương tích ta có

$$XM^2 - \frac{AC^2}{4} = XN^2 - \frac{BD^2}{4},$$

hay

$$XM^2 - XN^2 = \frac{AC^2}{4} - \frac{BD^2}{4}.$$

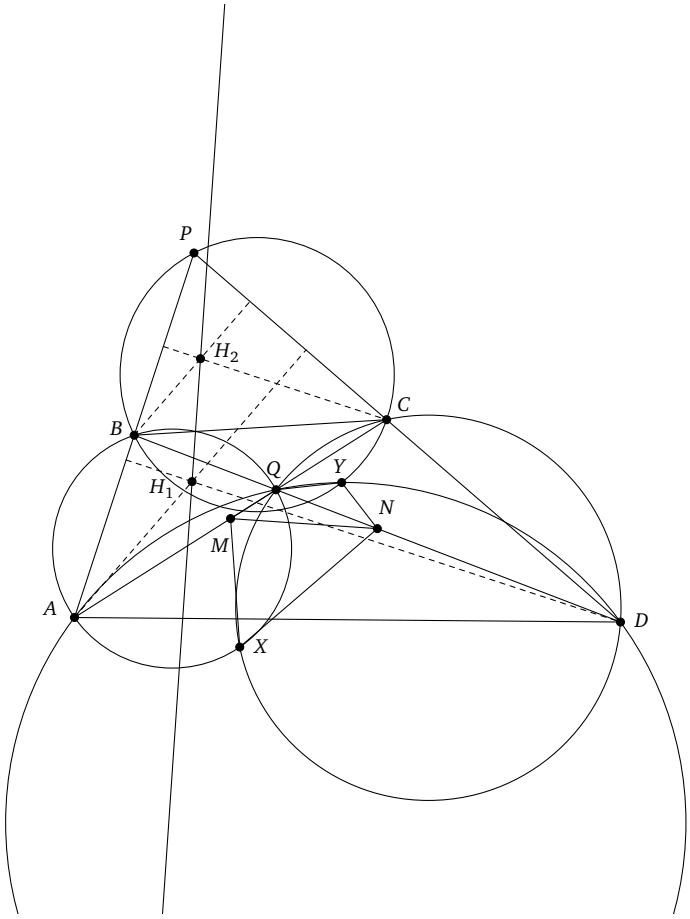
Nếu $XM \neq XN$, thì $\triangle XAM \sim \triangle XBN$ (g-g), nên

$$\frac{XM}{XN} = \frac{AM}{BN}.$$

Suy ra

$$\frac{XM^2}{AM^2} = \frac{XN^2}{BN^2} = \frac{XM^2 - XN^2}{AM^2 - BN^2} = 1,$$

vậy ta được $XM = AM$, $XN = BN$. Do đó $\angle AXC = \angle BXD = 90°$.



Theo tính chất tứ giác nội tiếp, $\angle BAX = \angle XQD = \angle XCD$ nên $PAXC$ nội tiếp. Do tứ giác $PAXC$ nội tiếp và $\angle AXC = 90°$, nên $\angle APD = 90°$ (mâu thuẫn giả thiết). Nên $XM = XN$, suy ra $AC = BD$.

Từ đây dễ dàng chứng minh được chứng minh $YM = YN$, suy ra

$$XY \perp MN. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta dễ dàng suy ra được kết quả của bài toán. □

Bài 4 (5 điểm:) *Trên một bảng đen, ba đầu người ta viết* 2015 *số tự nhiên phân biệt:*

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2014}.$$

Sau đó người ta ghi tiếp lên bảng tất cả những số tự nhiên n sao cho n có thể viết dưới dạng tổng của 2 *số thuộc* 2015 *ban đầu* (2 *số này không nhất thiết phân biệt).*

Hỏi sau khi viết xong, trên bảng sẽ có ít nhất bao nhiêu số tự nhiên phân biệt, nếu:

(a) $a_{2014} = 4028$.

(b) $a_{2014} = 4027$.

Lời giải: (a) Xét 4029 tổng sau:

$$a_0 + a_0,\ a_1 + a_0,\ a_2 + a_0,\ \ldots,\ a_{2014} + a_0,\ a_{2014} + a_1,\ a_{2014} + a_2, \ldots,\ a_{2014} + a_{2014}.$$

Ta thấy rằng do $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2014}$ nên các tổng trên được sắp theo tăng dần từ trái qua phải nên chúng phân biệt. Suy ra trên bảng phải có ít nhất 4029 số tự nhiên phân biệt.

Ngoài ra, nếu lấy $a_i = 2i$, với mọi $i \in \overline{1, 2013}$, thì trên bảng chỉ gồm 4029 số tự nhiên phân biệt là:

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 8056.$$

Suy ra, nếu $a_{2014} = 4028$ thì trên bảng phải có ít nhất 4029 số tự nhiên phân biệt.

(b) Đáp số là: $3 \cdot 2014 = 6072$. Một dấu bằng có thể chỉ ra là khi $a_i = i$ với mọi $i \in \overline{1, 2013}$.

Đầu tiên, ta thấy do $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{2013} < 4027$, nên các số $a_0, a_1, \ldots, a_{2013}$ có các số dư đôi một khác nhau khi xét mod 4027, và cũng bởi thế, với một số tự nhiên $0 \leqslant k \leqslant 4026$ cho trước, các $k - a_0, k - a_1, \ldots, a_{2013}$ cũng có các số dư đôi một khác nhau khi xét mod 4027.

Mà 2 dãy trên có tổng cộng 4028 số, nên theo nguyên lý Drichlet, tồn tại 2 số tự nhiên $0 \leqslant u, v \leqslant 2013$ sao cho

$$a_u \equiv k - a_v \pmod{4027},$$

hay

$$a_u + a_v \equiv k \pmod{4027}.$$

Suy ra ứng với mỗi số tự nhiên $0 \leqslant k \leqslant 4026$ trên bảng sẽ có ít nhất một số sao cho số đó chia 4027 dư k.

Mặt khác, khi $k = 0$ thì có ít nhất 3 số là $0, 4027, 8054$ chia 4027 dư k. Còn khi $k = a_i$ ($i \in \overline{1, 2013}$) thì có ít nhất 2 số là a_i, $a_i + 4027$ chia 4027 dư k.

Suy ra trên bảng có ít nhất: $1 \cdot 3 + 2013 \cdot 2 + [4027 - 1 - 2013] \cdot 1 = 6072$ số tự nhiên.

Bài toán được giải quyết xong. □

Nhận xét: Lời giải trên rất thú vị vì đây vốn gốc là một bài toán tổ hợp, nhưng thực sự thì kiến thức về hệ thặng dư lại được lồng ghép vào, sau đó đưa kết luận bằng cách đếm 2 cách . (Đếm cách cặp $< n, k >$ với n là 1 số trên bảng và $0 \leqslant k \leqslant 4026$ thỏa $k \equiv n \pmod{4027}$).

Bài toán có thể tổng quát thành:

Cho tập n A gồm $n + 1$ số tự nhiên, chứng rằng nếu $\max A \leqslant 2n - 1$ *thì* $|A + A| \geqslant n + 1 + \max A$, *trong đó* $A + A = \{a + b \mid a \in A,\ b \in A\}$.

Bài 5 (6 điểm): *Cho n là một số tự nhiên, dãy* (a_n) *được xác định như sau:*

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = 2014 \cdot \mathrm{a}_{n+1} - a_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 2$ *thì* a_n *là hợp số.*

Lời giải: Trước hết ta chứng minh đẳng thức sau

$$a_{m+n} = a_n a_{m+1} - a_{n-1} a_m.$$

Thay $m+n$ bằng s, ta được

$$a_s = a_{s-m} a_{m+1} - a_{s-m-1} a_m.$$

Ta có $a_s = 2014a_{s-1} - a_{s-2} = a_{s-1}a_2 - a_{s-2}a_1$, với mọi $m < s$ thì

$$\begin{aligned}(a_{s-m}a_{m+1} - a_{s-m-1}a_m) &- (a_{s-m-1}a_{m+2} - a_{s-m-2}a_{m+1}) \\ &= (a_{s-m} + a_{s-m-2})a_{m+1} - a_{s-m-1}(a_{m+2} + a_m) \\ &= (2013a_{s-m-1})a_{m+1} - a_{s-m-1}(2013a_{m+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Từ đó dễ dàng suy ra đẳng thức trên. Tiếp đến, ta chứng minh

$$a_n \mid a_{kn}, \ \ n > 0. \tag{3}$$

bằng quy nạp theo k. Thật vậy, với $k = 1$ ta có điều hiển nhiên đúng. Giả sử $a_n \mid a_{kn}$, theo giả thiết quy nạp

$$a_{n(k+1)} = (a_{nk}a_{n-1} - a_{nk-1}a_n) \vdots a_n$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta có (3) đúng. Như vậy, theo (3) thì với mọi $n > 2$ là hợp số thì a_n cũng là hợp số, do $a_2 > 1$ và dãy (a_n)tăng.

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh với $p > 2$ là số nguyên tố thì a_p là hợp số là đủ. Đặt $p = 2m+1$, ta có

$$a_p = a_{2m+1} = a_{m+1}^2 - a_m^2 = (a_{m+1} - a_m)(a_{m+1} + a_m).$$

Ta sẽ chứng minh $a_{m+1} - a_m > 1$ với mọi $m \geqslant 1$. Thật vậy

$$a_{m+1} - a_m = 2013a_m - a_{m-1} = 2012a_m + (a_m - a_{m-1}) > 1.$$

Do đó a_p cũng là hợp số. Dễ dàng kiểm tra $a_2 = 2014$ là hợp số. Tóm lại, a_n là hợp số với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$. □

Bài 6 (7 điểm): *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

(a) *Với mọi số thực $x > 1$ thì $f(x)$ là một hàm đồng biến.*

(b) *Với mọi số thực dương x, y, ta luôn có*

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Lời giải: Đặt $g(x) = f(e^x)$, ta có

$$g(x) \cdot g(y) = g(x+y) + g(x-y), \tag{4}$$

với mọi số thực dương x, y. Từ (4) chọn $(x, y) = (0, 0)$ ta thu được $g(0) = 2$. Giả sử tồn tại số thực x_0 mà $g(x_0) < 2$. Xét dãy (u_n) được xác định bởi:

$$u_0 = g(x_0), \, u_{n+1} = u_n^2 - 2, \, n \geqslant 0.$$

Từ (4) thì

$$g(2^n \cdot x_0) = u_n > 0. \tag{5}$$

Dễ dàng chứng minh được dãy (u_n) không thể luôn dương, điều này mâu thuẫn với (5). Vậy $g(x) \geqslant 2$, với mọi số thực x.

Từ đó với mọi số thực x_0 tồn tại a mà $g(x_0) = a^{x_0} + a^{-x_0}$. Bằng quy nạp ta thu được

$$g(n \cdot x_0) = a^{nx_0} + a^{-nx_0}. \tag{6}$$

Đặt $g(1) = c + c^{-1}$, từ (6) chọn $(n, x_0) = (n, 1)$ suy ra

$$g(n) = c^n + c^{-n}.$$

Từ (6) chọn $(n, x_0) = \left(n, \frac{1}{n}\right)$, suy ra

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = c^{\frac{1}{n}} + c^{-\frac{1}{n}}.$$

Từ (6) chọn $(n, x_0) = \left(m, \frac{1}{n}\right)$, suy ra

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = c^{\frac{m}{n}} + c^{-\frac{m}{n}}.$$

Vì $f(x)$ đơn điệu với $x > 1$ nên $g(x)$ cũng đơn điệu với $x > 0$ nên tồn tại 2 dãy số hữu tỉ q_n và p_n sao cho $q_n \geqslant x \geqslant p_n > 0$ và

$$\lim_{x \to +\infty} (q_n) = \lim_{x \to +\infty} (p_n) = x.$$

Do g tăng nên $g(q_n) \geqslant g(x) \geqslant g(p_n)$, suy ra

$$c^{q_n} + c^{-q_n} \geqslant g(x) \geqslant c^{p_n} + c^{-p_n}.$$

Cho $n \to \infty$, ta được

$$c^x + c^{-x} \geqslant g(x) \geqslant x^x + c^{-x}.$$

Suy ra $g(x) = c^x + c^{-x}$, thử lại ta thấy thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Vậy $g(x) = c^x + c^- x$ hay $f(x) = c^{\ln(x)} + c^{-\ln(x)}$, với mọi $x > 0$. □

Bài 7 (7 điểm): *Cho ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC và cắt AB, AC lần lượt tại E, F, cắt ω tại U và V. Trung điểm của BC là M, gọi ω' là đường tròn ngoại tiếp tam giác UMV. Giả sử bán kính của ω và ω' bằng nhau, hai điểm T, S lần lượt là giao điểm của ME và FT với ω'.*

Chứng minh rằng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCS.

Lời giải: Ta chứng minh bài toán trong đường hợp E, F lần lượt nằm trên đoạn AB, AC. Trường hợp E, F nằm ngoài đoạn AB, AC, chứng minh hoàn toàn tương tự.

Gọi O là tâm đường tròn ω, L là giao điểm của CS với ω. Khi đó

$$\overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{ET} \cdot \overline{EM},$$

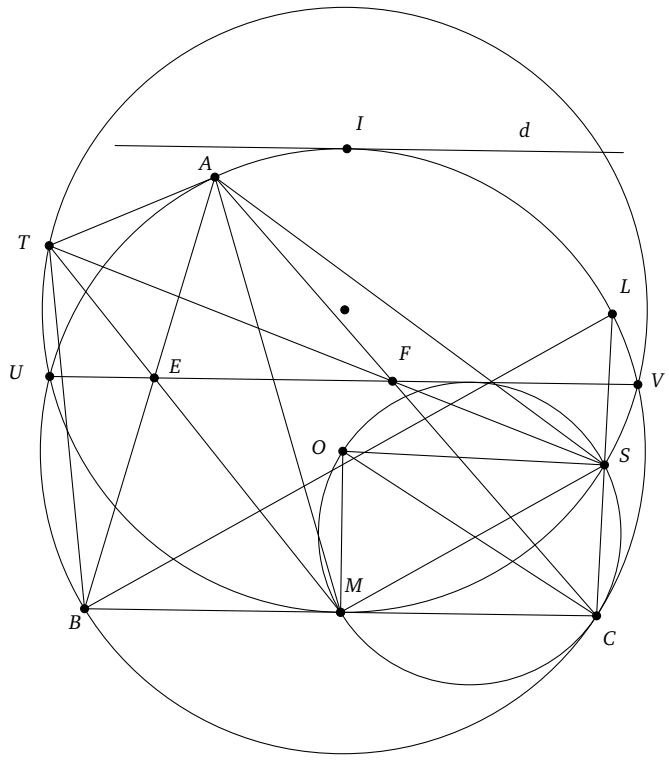
nên tứ giác $ATBM$ nội tiếp. Lại có

$$\overline{FA} \cdot \overline{FC} = \overline{FT} \cdot \overline{FS},$$

nên tứ giác $ATCS$ cũng nội tiếp. Vì BC tiếp xúc với đường tròn ω' tại M nên

$$\angle CMS = \angle MTS = \angle MTA - \angle STA = \angle MBA - \angle ACS = \angle MBA - \angle ABL = \angle CBL.$$

Suy ra MS song song với BL, và có được S là trung điểm CL. Suy ra tiếp $OS \perp CS$, hay tứ giác $OMCS$ nội tiếp đường tròn đường kính OM.



Xét phép vị tự $V_C^{\frac{1}{2}}$ biến đường tròn ω thành đường tròn đường kính OC. Gọi d là tiếp tuyến của ω sao cho d song song với UV đồng thời d và BC nằm khác phía đối với UV. Vì ω và ω' có bán kính bằng nhau nên ta chứng minh được

$$d(C, d) = 2d(C, UV).$$

Do đó đường thẳng UV là ảnh của d qua phép vị tự $V_C^{\frac{1}{2}}$ và d tiếp xúc với ω nên UV tiếp xúc với đường tròn đường kính OM.

Chứng minh hoàn tất. □