LỜI GIẢI VÀ PHÂN TÍCH MỘT SỐ CÂU VẬN DỤNG TRONG ĐỀ THAM KHẢO KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2020

thuvientoan.net

Đề thi tham khảo kỳ thi THPT quốc gia năm 2020 giúp giáo viên, học sinh đánh giá mức độ đề thi qua đó có những định hướng quá trình ôn tập. Bài viết này, xin phân tích một số bài toán được khai thác theo nhiều hướng giúp chúng ta có những cách tiếp cận khác nhau đối với những dạng toán vận dụng trong các đề thi THPT quốc gia.

Câu 38: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Lời giải 1:

$$f\left(8\right)-f\left(3\right)=\int\limits_3^8 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_3^8 \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=7\Rightarrow f\left(8\right)=10.$$

$$\int\limits_3^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=xf\left(x\right)\Big|_3^8-\int\limits_3^8 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=8f\left(8\right)-3f\left(3\right)-\int\limits_3^8 \frac{x^2}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=80-9-\frac{229}{6}=\frac{197}{6}.$$

Lời giải 2:

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Suy ra $f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f\left(3\right)=3\Rightarrow C=-4$. Do đó $f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}-4$.

Vì vậy $\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{197}{6}$

Nhận xét:

Với giả thiết như vậy ta có thể xử lý theo hai hướng:

Hướng 1: Tìm $f\left(x\right)$ từ đó suy ra $\int\limits_3^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Nếu để ý kỹ hơn thì thấy

$$\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Khi đó, có thể dễ dàng tìm $f\left(x\right)$.

Hướng 2: Sử dụng tích phân từng phần

$$\int\limits_3^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=xf\left(x\right)\Big|_3^8-\int\limits_3^8 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=8f\left(8\right)-3f\left(3\right)-\int\limits_3^8 \frac{x^2}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$$

Như thế, chỉ cần tính $f\left(8\right)$ là xong.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 38

Câu 38.1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$. Biết $f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ và $f\left(1\right)=0$. Giá trị của $\int\limits_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-2$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{e-2}{2}$.

Câu 38.2: Biết rằng $x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(-x\right)$ trên R. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\left[f'(x)+f'(\pi-x)\right]\cos x$ thỏa mãn $F\left(0\right)=0$. Giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 38.3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f\left(0\right)=2\sqrt{2},\ f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ và } f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{1+f^2\left(x\right)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó giá trị $f\left(1\right)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 38

Câu 38.1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$. Biết $f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ và $f\left(1\right)=0$. Giá trị của $\int\limits_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-2$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{e-2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$. Nên $f\left(x\right)=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$, với C là hằng số.

Mà $f\left(1\right)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{\ln^2 x}{2}$.

Do đó, $\int\limits_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^e\dfrac{\ln^2 x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{e-2}{2}$.

Câu 38.2: Biết rằng $x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(-x\right)$ trên R. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\left[f'(x)+f'(\pi-x)\right]\cos x$ thỏa mãn $F\left(0\right)=0$. Giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(-x\right)$ $\Rightarrow$ $f\left(-x\right)=\left(x\sin x\right)'=\sin x+x\cos x$

$\Rightarrow$ $f(x)=-\sin x-x\cos x$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-2\cos x+x\sin x$

$\Rightarrow$ $f'\left(\pi-x\right)=2\cos x+\left(\pi-x\right)\sin x$

$\Rightarrow f'\left(x\right)+f'\left(\pi-x\right)=2\pi\sin x$

Khi đó

$$F(x)=\int\left[f'(x)+f'(\pi-x)\right]\cos x\,\mathrm{d}x=\pi\int 2\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x=\pi\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos 2x+C$$

Từ $F(0)=0\Rightarrow$ $\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$ $F(x)=-\dfrac{\pi}{2}\cos 2x+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$ $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 38.3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f\left(0\right)=2\sqrt{2},\ f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\text{ và }f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{1+f^2\left(x\right)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó giá trị $f\left(1\right)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{1+f^2\left(x\right)}\Leftrightarrow\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\left(2x+1\right)$.

Suy ra $\int\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}\left(1+f^2\left(x\right)\right)}{2\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f\left(0\right)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C\Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=x^2+x+3\Rightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f\left(1\right)=\sqrt{24}$.

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0$ nên $\log_3(3x+3)$ xác định.

Ta có

$\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=2\log_3 3^y+9^y$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=\log_3 9^y+9^y \ \left(1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t, t\in\left(0;+\infty\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t\in\left(0;+\infty\right)$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $\left(1\right) \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020$ nên $0\le 9^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$.

Do y nguyên nên $y\in\left\{0;1;2;3\right\}$.

$\Rightarrow \left(x;y\right)\in\left\{\left(0;0\right);\left(8;1\right);\left(80;2\right);\left(728;3\right)\right\}$.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Nhận xét:

Với dạng toán này việc quan trọng nhất là xác định được hàm đặc trưng $f(t)=\log_3 t+t, t\in\left(0;+\infty\right)$.

Ngoài ra, nếu để ý hàm số $y=\log_3(3x+3)+x$ đồng biến trên $\left(-1;+\infty\right)$, hàm số $2x+9^x$ cũng đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ nên $0\le x\le 2020 \Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 6063+2020 \Rightarrow -1\le y<4$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 43

Câu 43.1: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 43.2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$ và $\log_3^2\left(3x+2y-1\right)-\left(m+6\right)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 43.3: Cho phương trình $7^x+m=\log_7\left(x-m\right)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left(-25;25\right)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 26.

Câu 43.4: Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S=-2$. **B.** $S=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 43

Câu 43.1: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \le x \le 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có

$\log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3\log_2 2^y+8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+\left(x+1\right)=\log_2 8^y+8^y \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t, t\in\left(0;+\infty\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t\in\left(0;+\infty\right)$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $\left(1\right) \Leftrightarrow x=8^y-1$

Ta có $0\le x\le 2020$ nên $0\le 8^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_8 2021\approx 3,66$.

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\left\{0;1;2;3\right\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 43.2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$ và $\log_3^2\left(3x+2y-1\right)-\left(m+6\right)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y \Leftrightarrow e^{3x+5y}+\left(3x+5y\right)=e^{x+3y+1}+\left(x+3y+1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'\left(t\right)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng $f\left(3x+5y\right)=f\left(x+3y+1\right) \Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1 \Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_3^2 x-\left(m+6\right)\log_3 x+m^2+9=0$.

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình có dạng $t^2-\left(m+6\right)t+m^2+9=0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 43.3: Cho phương trình $7^x+m=\log_7\left(x-m\right)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left(-25;25\right)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > m$

Đặt $t = \log_7\left(x - m\right)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t \ \left(1\right)$

Do hàm số $f\left(u\right) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $\left(1\right) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x$.

Xét hàm số $g\left(x\right) = x - 7^x \Rightarrow g'\left(x\right) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7\left(\ln 7\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_7\left(\ln 7\right)$		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(-\log_7\left(\ln 7\right)\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \le g\left(-\log_7\left(\ln 7\right)\right) \approx -0,856$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $\left(-25;25\right)$, nên $m \in \left\{-24;-16;...;-1\right\}$.

Câu 43.4: Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S = -2$. **B.** $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{array}\right.$.

Ta có $\frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 = \log_2\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \log_2 t + \left(t - 1\right)^2$, $t > 0$.

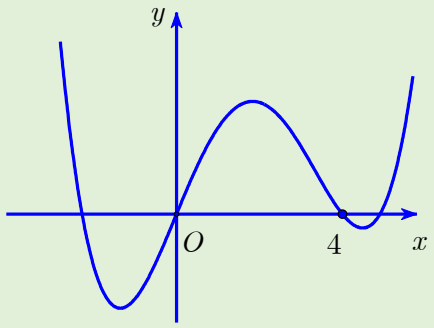
Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2\left(t-1\right)=\dfrac{2\ln 2.t^2-2\ln 2.t+1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t>0$.

Do đó hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Nên $\left(1\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$. Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^3 + 3x^2\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

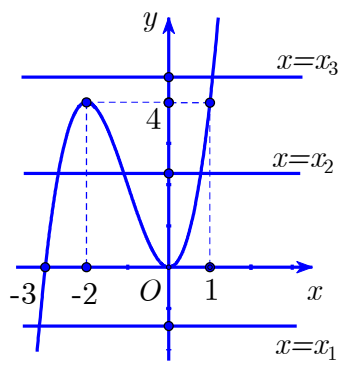
Lời giải

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị $x_1 < 0 < x_2 < 4 < x_3$

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^3 + 3x^2\right)$, ta có $g'\left(x\right) = \left(3x^2 + 6x\right)f'\left(x^3 + 3x^2\right)$

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'\left(x^3 + 3x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = x_i, i = 1;2;3 \end{array}\right.$$

Ta có đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$



Ta có nhận xét rằng phương trình $x^3 + 3x^2 = x_1$ có 1 nghiệm; phương trình $x^3 + 3x^2 = x_2$ có 3 nghiệm; phương trình $x^3 + 3x^2 = x_3$ có 1 nghiệm cả 5 nghiệm này đôi một phân biệt, đều khác $0;-2$.

Như vậy, $g'\left(x\right) = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt

Do đó hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Nhận xét:

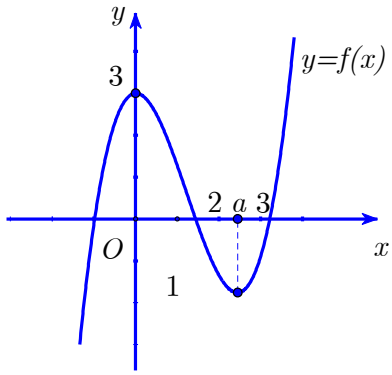
Để xác định số cực trị của hàm $g\left(x\right) = f\left(u\left(x\right)\right)$ ta thường hướng đến việc xét dấu

$$g'\left(x\right) = u'\left(x\right)f'\left(u\left(x\right)\right).$$

Nếu $g'\left(x\right)$ đổi dấu $x_0 \in$ TXĐ của $g\left(x\right)$ thì x_0 là điểm cực trị. Những trường hợp đơn giản khi $g\left(x\right)$ là hàm đa thức thì đơn giản hơn bằng việc đi tìm số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 46

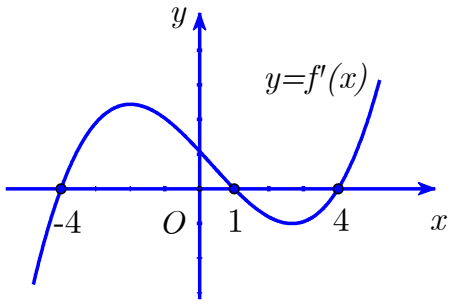
Câu 46.1: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là $0; a$ $\left(2 < a < 3\right)$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right) = 2019f\left(f\left(x\right)\right) + 2020$. Số điểm cực trị của hàm số là

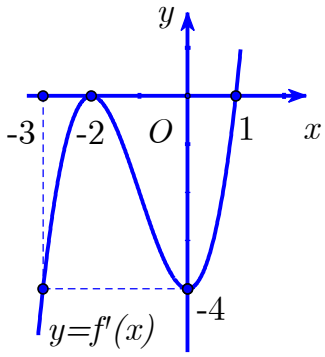
A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 46.2: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g\left(x\right) = f\left(2x - x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

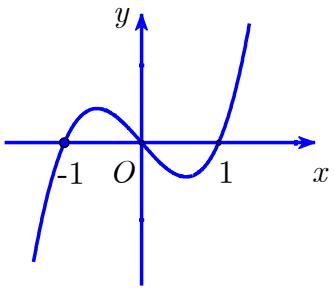
Câu 46.3: Cho $f\left(x\right)$ là đa thức bậc 4 và hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^3 - 3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

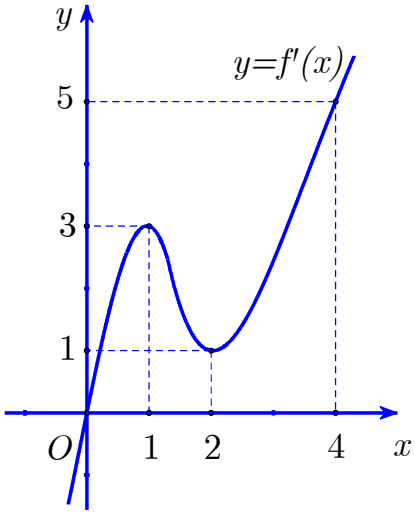
Câu 46.4: Cho $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'\left(x\right)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

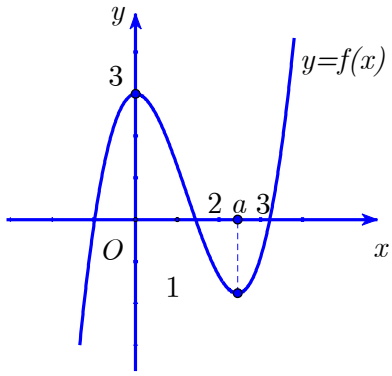
Câu 46.5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$; $f''\left(x\right)>-\frac{1}{6},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)-mx\right|$, với m là tham số dương, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

LỜI GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 46

Câu 46.1: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là $0; a$ $\left(2 < a < 3\right)$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

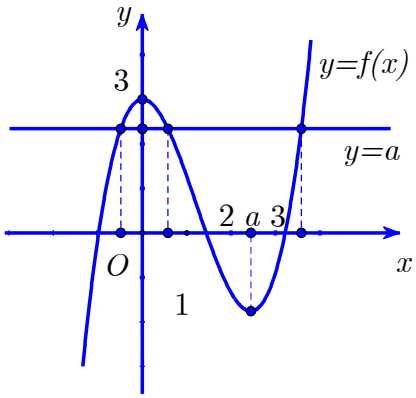


Đặt $g\left(x\right) = 2019f\left(f\left(x\right)\right) + 2020$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'\left(x\right) = 3f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right)$.

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 3f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(f\left(x\right)\right) = 0 \\ f'\left(x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{array}\right., \left(2 < a < 3\right).$$

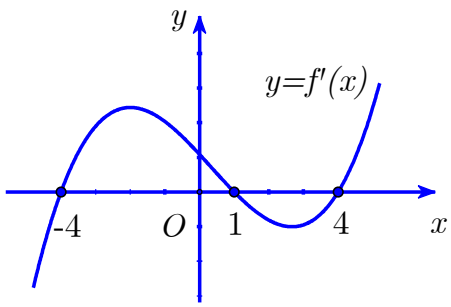
$f\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2 < a < 3$ nên $f\left(x\right) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'\left(x\right) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g\left(x\right) = 2019f\left(f\left(x\right)\right) + 2020$ có 8 điểm cực trị.

Câu 46.2: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g\left(x\right) = f\left(2x - x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

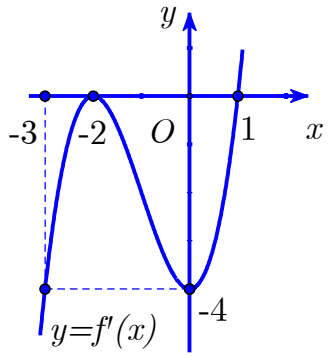
Chọn C

Ta có: $y' = \left(2-2x\right).f'\left(2x-x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x-x^2=-4 \\ 2x-x^2=1 \\ 2x-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$		$-$	
$f'\left(2-2x\right)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Câu 46.3: Cho $f\left(x\right)$ là đa thức bậc 4 và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$, $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^3-3=0 & (1) \\ f'\left(x^3-3x\right)=0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=-2 \\ x^3-3x=1 \end{array}\right.$

Trong đó phương trình $x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

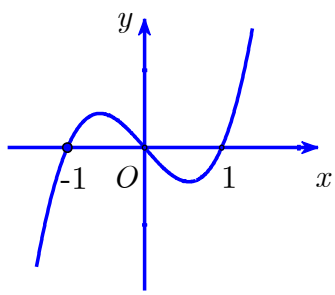
Còn phương trình: $x^3 - 3x = 1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$ và $1 < x_3 < 2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 46.4: Cho $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị và giả thiết suy ra $f'(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$

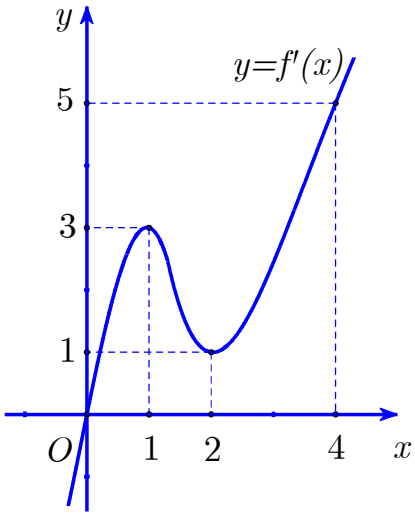
Ta có $g'(x) = \left(f\left[f'(x)\right]\right)' = f'\left[f'(x)\right].f''(x) = \left[\left(x^3 - x\right)^3 - \left(x^3 - x\right)\right]\left(3x^2 - 1\right)$

$$= x(x-1)(x+1)\left(x^3 - x - 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)\left(3x^2 - 1\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a\,(\approx 0,76) \\ x = b\left(b \approx -1,32\right) \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Do đó, hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 46.5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right) = 0$; $f''\left(x\right) > -\dfrac{1}{6}, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x^2\right) - mx\right|$, với m là tham số dương, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ suy ra $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in \left(0; +\infty\right)$.

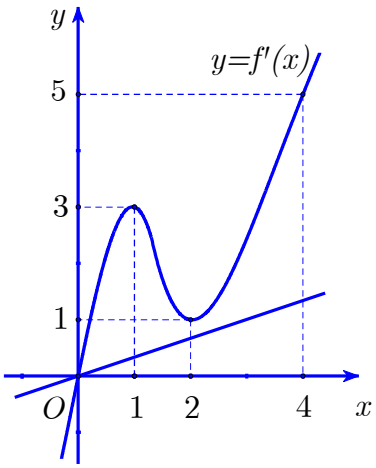
Do đó, $f'\left(x^2\right) > 0, \forall x \in \left(0; +\infty\right)$.

Xét hàm số $h\left(x\right) = f\left(x^2\right) - mx$; $h'\left(x\right) = 2x.f'\left(x^2\right) - m$.

Với $x < 0$, $h'\left(x\right) < 0 \Rightarrow$ Phương trình $h'\left(x\right) = 0$ vô nghiệm.

Với $x \geq 0$ ta có $h''\left(x\right) = 2f'\left(x^2\right) + 4x^2 f''\left(x^2\right) > 2f'\left(x^2\right) - \dfrac{2x^2}{3}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta thấy với $x \geq 0$, đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = \dfrac{x}{3}$.



Do đó, $2f'\left(x^2\right)-\dfrac{2x^2}{3}\geq 0,\forall x\geq 0\Rightarrow h''\left(x\right)\geq 0,\forall x\geq 0$ hay hàm số $y=h'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Mà $h'\left(0\right)=-m<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}h'\left(x\right)=+\infty$ nên phương trình $h'\left(x\right)=0$ có một nghiệm duy nhất $x_0\in\left(0;+\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình $h\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Đồng thời hàm số $y=h\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=x_0$, giá trị cực tiểu $h\left(x_0\right)<0$.

Vậy hàm số $y=\left|h\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{17}{20}$. **B.** $-\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải 1:

Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}
&xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x\\
&\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2 \qquad (*)\\
&\Rightarrow \int x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{x^{12}}{12}+\frac{x^8}{8}-\frac{2x^3}{3}+C\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}F\left(x^3\right)-\frac{1}{2}F\left(1-x^2\right)=-\frac{x^{12}}{12}+\frac{x^8}{8}-\frac{2x^3}{3}+C.
\end{aligned}$$

Thay $x=0$ ta được $\dfrac{1}{3}F\left(0\right)-\dfrac{1}{2}F\left(1\right)=C\ \left(1\right)$.

Thay $x=1$ ta được $\dfrac{1}{3}F\left(1\right)-\dfrac{1}{2}F\left(0\right)=-\dfrac{5}{8}+C\ \left(2\right)$.

Thay $x=-1$ ta được $\dfrac{1}{3}F\left(-1\right)-\dfrac{1}{2}F\left(0\right)=\dfrac{17}{24}+C\ \left(3\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ suy ra $\dfrac{5}{6}\left[F\left(1\right)-F\left(0\right)\right]=-\dfrac{5}{8}\Rightarrow F\left(1\right)-F\left(0\right)=-\dfrac{3}{4}$.

Từ $\left(2\right),\left(3\right)$ suy ra $\dfrac{1}{3}\left[F\left(1\right)-F\left(-1\right)\right]=-\dfrac{32}{24}\Rightarrow F\left(1\right)-F\left(-1\right)=-4$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(0\right)-F\left(-1\right)=-4+\dfrac{3}{4}=\dfrac{-13}{4}$.

Lời giải 2:

Từ $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)+2x^2=-x^{11}+x^7, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra, hàm số $x^2f(x^3)+xf(1-x^2)+2x^2$ là hàm lẻ. Ta có $\int\limits_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{24}$

Do đó

$$\int\limits_{-1}^{0}\left[x^2f(x^3)+xf(1-x^2)+2x^2\right]\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{1}\left[x^2f(x^3)+xf(1-x^2)+2x^2\right]=\frac{-1}{24}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)-\frac{2}{3}=\frac{-1}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{15}{24}$$

$$\Rightarrow 2\int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+8=-5\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-4-\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$$

Lời giải 3:

Ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x\,,\forall x\in\mathbb{R}\ \left(1\right)$

Thay x bởi $-x$ ta được $-xf(-x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6+2x\,,\forall x\in\mathbb{R}\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ suy ra $xf\left(x^3\right)+xf\left(x^3\right)=-4x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x^3\right)+f\left(-x^3\right)=-4,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay x^3 bởi x ta được $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=-4$.

Do đó,

$$\int_{-1}^{0}\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(-4\right)\mathrm{d}x=-4\Rightarrow\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-4$$

Từ $\left(1\right)\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=\int_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Rightarrow\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$$

Do đó, $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-4+\frac{3}{4}=-\frac{13}{4}$.

Lời giải 4:

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$$\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2\qquad(*)$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$$

Mặt khác (*) $\Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}\left(\left(1-x\right)^2\right) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{17}{24} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}.\frac{-3}{4} - \frac{17}{24}\right) = -\frac{13}{4}.$$

Lời giải 5: Đi tìm hàm $f\left(x\right)$

Ban đầu ta sẽ nghĩ đến có $f\left(x^3\right), f\left(1-x^2\right)$ thì bên vế phải có thể đưa liên quan gì đến $x^3, 1-x^2$ không?

Ta có $xf\left(x^3\right) + x^{10} + 2x = x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right]$

Vậy thì nghĩ thêm việc cũng tạo tiếp cái $\left(1-x^2\right)^3 + 2 = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$

Hay $f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2 = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$.

Như thế ta sẽ có

$$x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 + x^6$$

$$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] = 3 - 3x^2 + 3x^4$$

$$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] - 3x^4 + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] - 3\left(1-x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 - 3x^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 - 3\left(1-x^2\right) + 2\right] = 0$$

Đặt $g\left(x\right) = f\left(x\right) + x^3 - 3x + 2$ ta được $xg\left(x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0$.

Thay $-x$ bởi x ta được

$$-xg\left(-x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0 \text{ hay } xg\left(x^3\right) = -xg\left(-x^3\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g\left(x\right)$ là hàm lẻ.

Như vậy $xg\left(x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0 \Leftrightarrow xg\left(x^3\right) = g\left(x^2-1\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $g\left(0\right) = g\left(-1\right) = 0$.

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;0\right]$ nên $\left|g\left(x\right)\right|$ liên tục trên $\left[-1;0\right]$.

Đặt $M = \max\limits_{\left[-1;0\right]}\left|g\left(x\right)\right| \geq 0, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Giả sử $M > 0$ khi đó $\exists a \in \left(-1;0\right) : \left|g\left(a\right)\right| = M$.

Chọn $x = b = -\sqrt{1+a} \in \left(-1;0\right)$

Ta được $bg\left(b^3\right) = g\left(a\right) \Rightarrow \left|g\left(b^3\right)\right| = \dfrac{\left|g\left(a\right)\right|}{\left|b\right|} = \dfrac{M}{\left|b\right|} > M$ do $\left|b\right| \in \left(0;1\right)$.

Điều này mẫu thuẫn do $M = \max\limits_{[-1;0]}\left|g\left(x\right)\right|$.

Do vậy $\max\limits_{[-1;0]}\left|g\left(x\right)\right| = 0, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Hay $g\left(x\right) = 0, \forall x \in \left[-1;0\right] \Leftrightarrow f\left(x\right) = -x^3 + 3x - 2, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}(-x^3 + 3x - 2)\mathrm{d}x = -\dfrac{13}{4}$.

Nhận xét chung:

Ở 5 cách trên, khi giải quyết bài toán dạng này ta thường hướng tới:

- Biến đổi giả thiết đi đến tính chất $\int u'f\left(u\right)\mathrm{d}x = \int f\left(u\right)\mathrm{d}u$.
- Dựa theo tính chất hàm chẵn, hàm lẻ.
- Sử dụng các phép thế xác định hàm số $f\left(x\right)$.

*** Với lời giải 1, 2, 3, 4:** Ta đều sử dụng đến tính chất

$$\int u'f\left(u\right)\mathrm{d}x = \int f\left(u\right)\mathrm{d}u \text{ hay } \int\limits_{a}^{b} u'\left(x\right)f\left(u\left(x\right)\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Vì thế ta mới nghĩ đến việc tạo ra đạo hàm của $x^3;1-x^2$ bằng việc nhân hai vế của giả thiết với x để tạo ra

$$\int\limits_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x \ ; \ \int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x \ ;$$

$$\int\limits_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x \text{ và } \int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Trong các đổi biến này xuất hiện $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ buộc ta phải đi tính thêm $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Ở đây, nếu cận không phải là $-1;0;1$ thì các cách làm này sẽ bị phá sản, ví dụ yêu cầu tính $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$, lúc này chắc chỉ còn cách đi tìm $f\left(x\right)$. Vì thế, các cận $-1;0;1$ phải được liên hệ mật thiết với $x^3, 1-x^2$.

Ngoài ra, với hai tính chất:

- Hàm số $x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2$ là hàm lẻ;
- Hàm số $f\left(x\right) + f\left(-x\right) = -4$ là hàm chẵn

cũng hữu ích cho việc tính toán nhanh hơn.

*** Lỗi sai có thể** mắc dẫn đến các phương án nhiễu $-\dfrac{17}{20}, \dfrac{17}{4}$ đều sai dấu khi tính

$$\int\limits_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x \text{ và } \int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

*** Với lời giải 5:** Việc tìm $f\left(x\right)$ khá khó khăn, không nói là mò. Nếu $f\left(x\right)$ là những hàm quen thuộc thì rất có thể đoán bằng việc thử các giá trị và cân bằng hệ số.

Khi đó, mục đích khai thác tính chất $\int u'f\left(u\right)\mathrm{d}x = \int f\left(u\right)\mathrm{d}u$ coi như phá sản.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 48

Câu 48.1: Cho hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thỏa mãn

$$xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)=x^3-\frac{1}{2x}-2,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}.$$

Giá trị $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ nằm trong khoảng nào?

A. $\left(5;6\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Câu 48.2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2},\forall x\in\left[0;2\right].$$

Giá trị $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{10}$.

Câu 48.3: Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn

$$f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=2x^2-2x+1,\forall x\in\left[0;1\right].$$

Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 48.4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$5f\left(x\right)-7f\left(1-x\right)=3\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Biết rằng $\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $8a-3b$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 16.

Câu 48.5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn

$$2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x\ \ \forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right].$$

Tích phân $\int\limits_{\frac{2}{3}}^1 f'\left(x\right)\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 48

Câu 48.1: Cho hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thỏa mãn

$$xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)=x^3-\frac{1}{2x}-2,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}.$$

Giá trị $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ nằm trong khoảng nào?

A. $\left(5;6\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)=x^3-\frac{1}{2x}-2,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

$$\Rightarrow\int\limits_1^2\left[xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^3-\frac{1}{2x}-2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\ln\left|x\right|-2x\right)\right|_1^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}-\ln 2\in\left(2;3\right)$$

Câu 48.2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2},\forall x\in\left[0;2\right].$$

Giá trị $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2}$.

$$\Rightarrow\int\limits_0^2\left(4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^2 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+3\int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\pi$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\pi\Rightarrow\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}$$

Câu 48.3: Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn

$$f\left(x\right) + f\left(1-x\right) = 2x^2 - 2x + 1, \forall x \in \left[0;1\right].$$

Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f\left(x\right) + f\left(1-x\right) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow I + \int\limits_0^1 f(1-x)dx = \int\limits_0^1 (2x^2 - 2x + 1)dx \Rightarrow I + \int\limits_0^1 f(1-x)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow I + \int\limits_0^1 f(1-x)dx = \frac{2}{3}\ \left(1\right)$$

Xét $\int\limits_0^1 f(1-x)dx$, đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$

Ta có $\int\limits_0^1 f(1-x)dx = \int\limits_1^0 f(t)(-dt) = \int\limits_0^1 f(t)dt = I\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right);\left(2\right) \Rightarrow 2\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Câu 48.4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$5f\left(x\right) - 7f\left(1-x\right) = 3\left(x^2 - 2x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Biết rằng $\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x = -\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $8a - 3b$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Từ $5f\left(x\right) - 7f\left(1-x\right) = 3\left(x^2 - 2x\right)$ thay x bởi $1-x$ ta được $5f\left(1-x\right) - 7f\left(x\right) = 3\left(x^2 - 1\right)$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} 5f\left(x\right) - 7f\left(1-x\right) = 3\left(x^2 - 2x\right) \\ -7f\left(x\right) + 5f\left(1-x\right) = 3\left(x^2 - 1\right) \end{cases}$

Suy ra

$$25f\left(x\right) - 49f\left(x\right) = 15\left(x^2 - 2x\right) + 21\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow -24f\left(x\right) = 36x^2 - 30x - 21$$

Hay $f\left(x\right) = -\frac{1}{8}\left(12x^2 - 10x - 7\right) \Rightarrow f'\left(x\right) = -\frac{1}{4}\left(12x - 5\right)$

Do đó $-\frac{a}{b} = \int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x\left(12x - 5\right)\mathrm{d}x = -\frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$

Vậy $8a-3b=0$

Câu 48.5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn

$$2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x\ \ \forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right].$$

Tích phân $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} f'\left(x\right)\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Từ $2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x$ thay x bởi $\frac{2}{3x}$ ta được $2f\left(\frac{2}{3x}\right)+3f\left(x\right)=\frac{10}{3x}$.

Do đó $4f\left(x\right)-9f\left(x\right)=10x-\frac{10}{x}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2}{x}-2x\Rightarrow f'\left(x\right)=-\frac{2}{x^2}-2$

$$\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\left(-\frac{2}{x^2}-2\right)\ln x\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$$

Cách 2:

Ta có $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\ln x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(x\right)\mathrm{d}x}{x}$. Từ $2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x,\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$.

Thay $x=1$ và $x=\frac{2}{3}$ vào (1) ta được hệ $\begin{cases}2f(1)+3f\left(\frac{2}{3}\right)=5\\2f\left(\frac{2}{3}\right)+3f(1)=\frac{10}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=0\\f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}\end{cases}$.

Xét $I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $x=\frac{2}{3t}\Rightarrow\mathrm{d}x=-\frac{2}{3t^2}\mathrm{d}t,$, đổi cận $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Khi đó $I=-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{\frac{2}{3}}\frac{f\left(\frac{2}{3t}\right).\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2}{3t}}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{3t}\right)\mathrm{d}t}{t}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{3x}\right)\mathrm{d}x}{x}$.

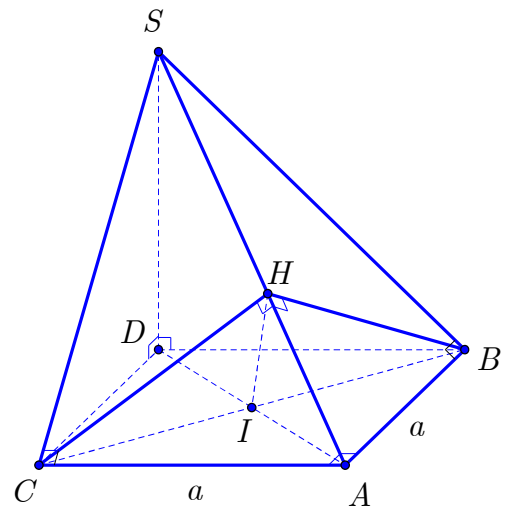
Ta có $2I+3I=2\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(x\right)\mathrm{d}x}{x}+3\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{3x}\right)\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow 5I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}5\mathrm{d}x=\frac{5}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{3}$

Vậy $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}f'\left(x\right)\ln x\mathrm{d}x=f\left(x\right)\ln x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f\left(x\right)\mathrm{d}x}{x}=\ln 1.f\left(1\right)-\ln\left(\frac{2}{3}\right)f\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, \widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải



Từ giả thiết ta dựng hình chóp $S.ABDC$ với $ABDC$ là hình vuông và $SD \perp (ABDC)$.

Vì $\Delta SAB = \Delta SAC$ nên nếu BH là đường cao của ΔSAB thì tương ứng CH cũng là đường cao của ΔSAC.

Mà $SA = (SAB) \cap (SAC)$ nên $\widehat{((SAB),(SAC))} = \widehat{(BH,CH)} = 60°$

hay $\widehat{BHC} = 60°$ hoặc $\widehat{BHC} = 120°$.

Vì $BH = CH$ nên HI là phân giác góc $\widehat{BHC}$ hay $\widehat{IHC} = 30°$ hoặc $\widehat{IHC} = 60°$.

Nếu $\widehat{IHC} = 30°$ thì $CH = \frac{CI}{\sin 30°} = \sqrt{2}a$, không thỏa mãn.

Do đó $CH = \frac{CI}{\sin 60°} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

Mà $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow \frac{3}{2a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{SC^2} \Rightarrow SC = \sqrt{2}a \Rightarrow SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = a$.

Do vậy, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SD = \frac{a^3}{6}$.

Chú ý:

Ta có thể chỉ ra tồn tại hình chóp $S.ABDC$ như sau:

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Ta có

$$\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD.$$

Tương tự $AC \perp CD \Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Nhận xét:

Trong bài toán trên ta đã sử dụng phương pháp tạo hình ẩn, tức là từ hình đa diện ban đầu, tạo thêm những điểm mới để tạo ra hình đa diện mới ở đó tính chất dễ khai thác hơn. Một số hình quen thuộc mà tính chất dễ khai thác là: Hình lập phương, hình hộp chữ nhật, lăng trụ đứng, hình chóp đều, hình chóp đáy là hình chữ nhật và cạnh bên vuông góc với đáy,...

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 49

Câu 49.1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{13}$. Gọi φ là góc giữa AB và (ACD), giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{6\sqrt{10}}{35}$. **B.** $\frac{\sqrt{865}}{35}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 49.2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4; AC = BD = 5; AD = BC = 6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{15\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{45\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{45\sqrt{6}}{2}$.

Câu 49.3: Cho tứ diện $ACFG$ có số đo các cạnh lần lượt là $AC = AF = FC = a\sqrt{2}$, $AG = a\sqrt{3}$, $GF = GC = a$. Thể tích của khối tứ diện $ACFG$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Câu 49.4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BD = AD = 2a, AC = \sqrt{7}a, BC = \sqrt{3}a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng a, tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{6}$. **D.** $2a^3\sqrt{2}$.

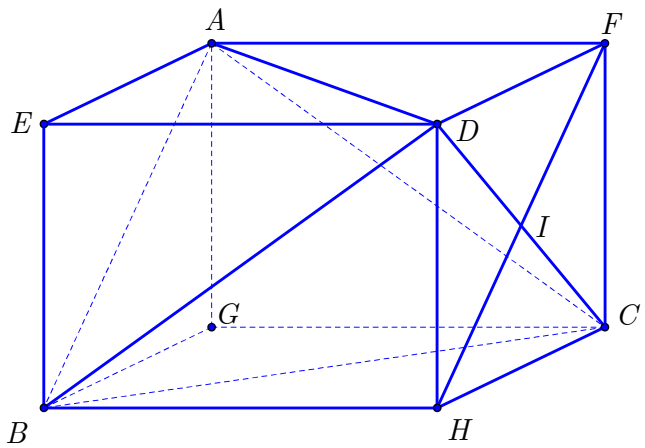
LỜI GIẢI BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 49

Câu 49.1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{13}$. Gọi φ là góc giữa AB và (ACD), giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{10}}{35}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{865}}{35}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình hộp $AEDF.GBHC$.
Do các cạnh đối của tứ diện $ABCD$ bằng nhau nên các đường chéo của mỗi mặt của hình hộp bằng nhau suy ra $AEDF.GBHC$ là hình hộp chữ nhật.

Đặt $AE = x, AF = y, AG = z\left(x, y, z > 0\right)$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + z^2 = 13 \\ z^2 + x^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Ta thấy $AB \ // \ HF \Rightarrow \left(\widehat{AB;(ACD)}\right) = \left(\widehat{HF;(ACD)}\right)$

Gọi $I = HF \cap CD \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d\left(F;(ACD)\right)}{IF}$.

Tứ diện $FACD$ vuông tại F nên: $\dfrac{1}{d^2\left(F;(ACD)\right)} = \dfrac{1}{FA^2} + \dfrac{1}{FD^2} + \dfrac{1}{FC^2} = \dfrac{49}{36}$

$\Rightarrow d\left(F;(ACD)\right) = \dfrac{6}{7}$.

Mà $FI = \dfrac{1}{2}FH = \dfrac{1}{2}\sqrt{FC^2 + FD^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

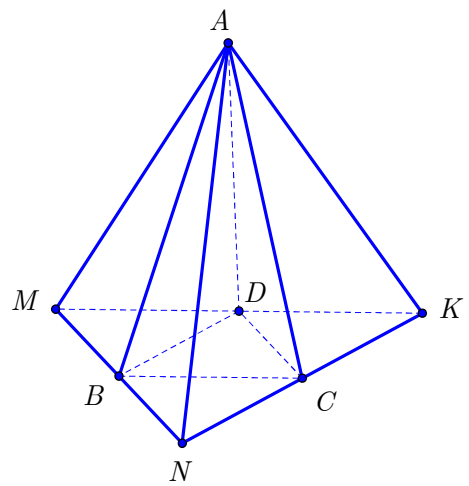
$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{6\sqrt{10}}{35} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{865}}{35}$.

Câu 49.2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4; AC = BD = 5; AD = BC = 6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{15\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{45\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{45\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng tứ diện $AMNK$, sao cho B, C, D là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM. Tứ diện $AMNK$ vuông tại A.

$$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}.$$

$$V_{AMNK} = \frac{1}{6}AM.AN.AK = \frac{1}{6}.3\sqrt{6}\sqrt{10}.3\sqrt{10} = 15\sqrt{6} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

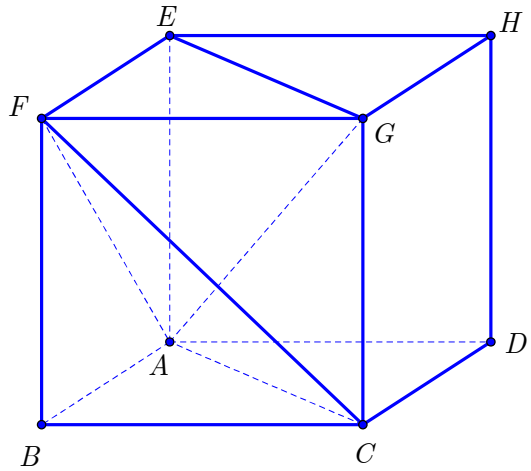
Câu 49.3: Cho tứ diện $ACFG$ có số đo các cạnh lần lượt là $AC = AF = FC = a\sqrt{2}$, $AG = a\sqrt{3}$, $GF = GC = a$. Thể tích của khối tứ diện $ACFG$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hình lập phương như hình vẽ



Khi đó $ABCD.EFGH$ là hình lập phương cạnh a nên thể tích của hình lập phương là $V = a^3$.

Thể tích tứ diện $ACGF$ có được là do ta chia hình lập phương theo các mặt phẳng $(ACGE), (ACF)$ và (AGF). Khi đó ta có

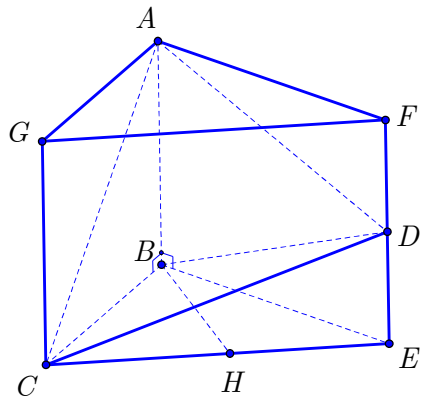
$$V_{ACGF} = \frac{1}{3}V_{ABC.EFG} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}V_{ABCD.EFGH} = \frac{a^3}{6}.$$

Câu 49.4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BD = AD = 2a, AC = \sqrt{7}a, BC = \sqrt{3}a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng a, tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{6}$. **D.** $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



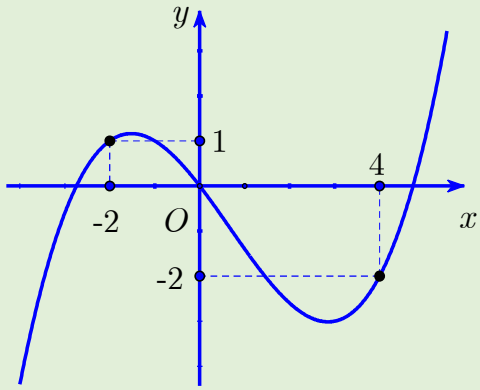
Từ giả thiết $\Rightarrow AB \perp AC$

Dựng lăng trụ đứng $AGF.BCE$ với D là trung điểm EF $\Rightarrow V_{AGF.BCE} = 3.V_{ABCD}$

Khi đó, vì $AB // (CEFG) \Rightarrow d(AB, CD) = d(B, CE) = BH = a$ với $H \in CE, BH \perp CE$

Ta tính được $BE = a\sqrt{3} = BC \Rightarrow CE = 2\sqrt{2}a \Rightarrow S_{BCE} = \sqrt{2}a^2 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AB.S_{BCE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Câu 50: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-2x\right)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

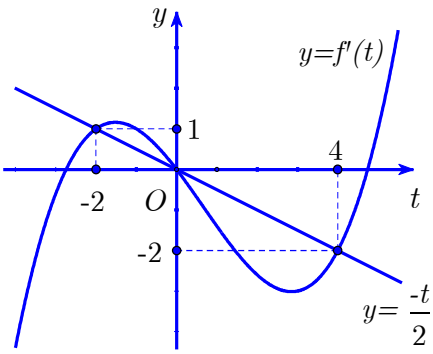
A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Lời giải

Ta có $g'\left(x\right)=-2f'\left(1-2x\right)+2x-1$

$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(1-2x\right)>-\dfrac{1-2x}{2}\left(1\right)$.

Đặt $t=1-2x$ khi đó $\left(1\right)$ trở thành $f'\left(t\right)>\dfrac{-t}{2}$. Từ đồ thị các hàm số $y=f'\left(t\right)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.



Ta có

$$f'\left(t\right)>-\frac{t}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<t<0\\t>4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2<1-2x<0\\1-2x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\x<-\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

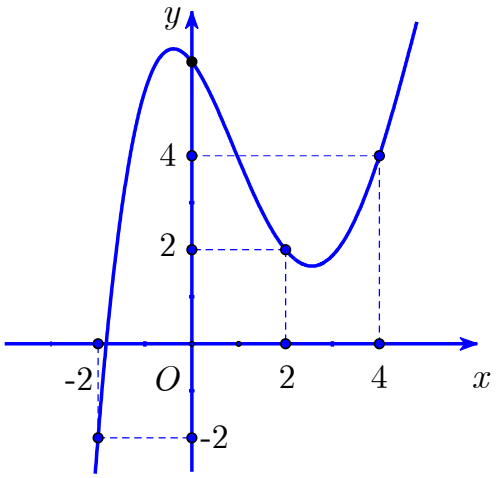
Vậy phương án A đúng.

Nhận xét:

Đây là bài toán gặp khá nhiều trong các đề thi THPT quốc gia những năm gần đây, ý tưởng là xét tính đơn điệu của hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)+v\left(x\right)$ dựa trên so sánh giá trị các hàm $u'\left(x\right)f'\left(x\right),-v'\left(x\right)$ trên khoảng nào đó để xét dấu $u'\left(x\right)f'\left(u\left(x\right)\right)+v'\left(x\right)$ bằng cách sử dụng đồ thị hoặc đánh giá.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 50

Câu 50.1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h\left(x\right)=2f\left(3x+1\right)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

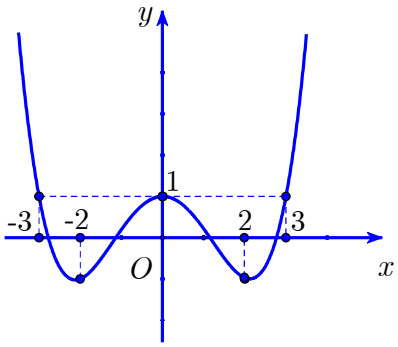
Câu 50.2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

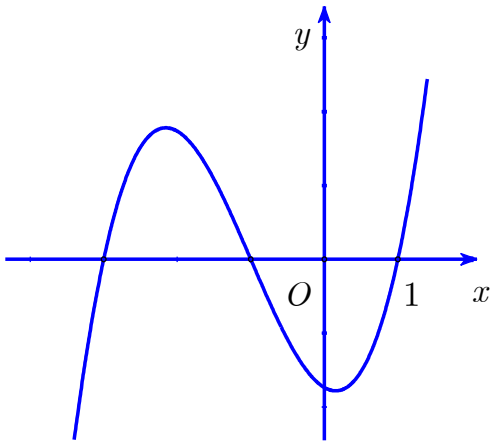
Câu 50.3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2x-1\right)+\frac{x^3}{3}+x^2-2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

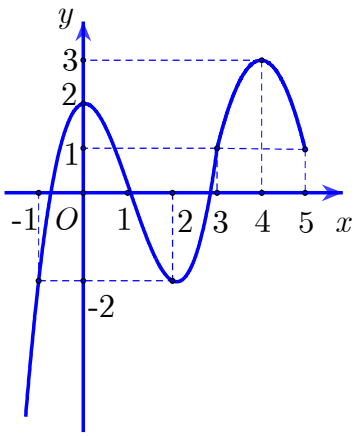
A. $\left(-6;-3\right)$. **B.** $\left(3;6\right)$. **C.** $\left(6;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Câu 50.4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-2019;2019\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(2019^x\right) - mx + 2$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$?



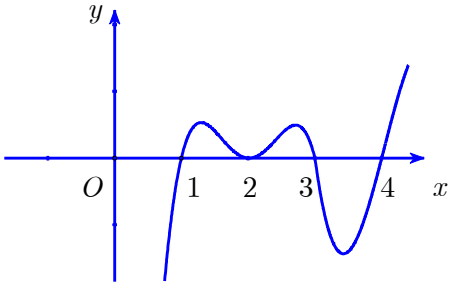
A. 2028. **B.** 2019. **C.** 2011. **D.** 2020.

Câu 50.5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f\left(2-x\right) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(-2;-1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Câu 50.6: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right) = f\left(3x+1\right) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

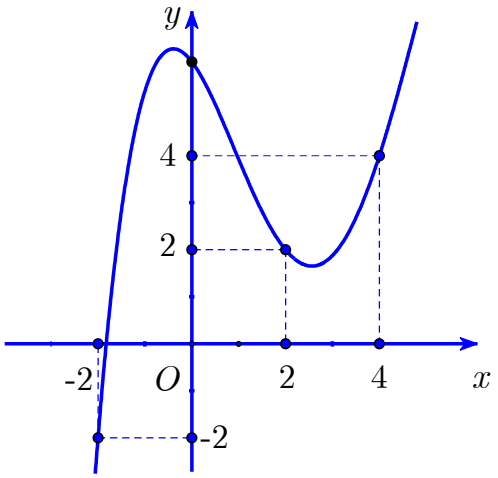


A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(4;+\infty\right)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ CÂU 50

Câu 50.1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h\left(x\right)=2f\left(3x+1\right)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

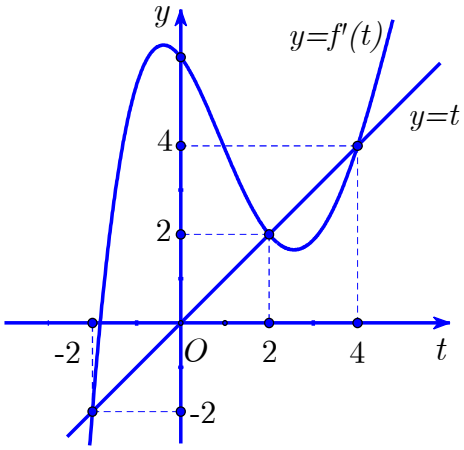
D. Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

$h\left(x\right)=2f\left(3x+1\right)-9x^2-6x+4 \Rightarrow h'\left(x\right)=6f'\left(3x+1\right)-6\left(3x+1\right)$.

Xét bất phương trình $h'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow 6f'\left(3x+1\right)-6\left(3x+1\right)>0 \Leftrightarrow f'\left(3x+1\right)>3x+1\,(*)$



Quan sát hình vẽ ta thấy: Xét trên khoảng $\left(-2;\,4\right)$ thì $f'\left(x\right)>x \Leftrightarrow -2<x<2$.

$\Rightarrow \left(*\right) \Leftrightarrow -2<3x+1<2 \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 50.2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3\left[f'\left(x+2\right)-\left(x^2-3\right)\right]$

Với $x\in\left(-1;0\right)\Rightarrow x+2\in\left(1;2\right)\Rightarrow f'\left(x+2\right)>0$, lại có $x^2-3<0\Rightarrow y'>0;\forall x\in\left(-1;0\right)$

Vậy hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x\in\left(1;2\right)\subset\left(1;+\infty\right)\Rightarrow x+2\in\left(3;4\right)\Rightarrow f'\left(x+2\right)<0;x^2-3>0$

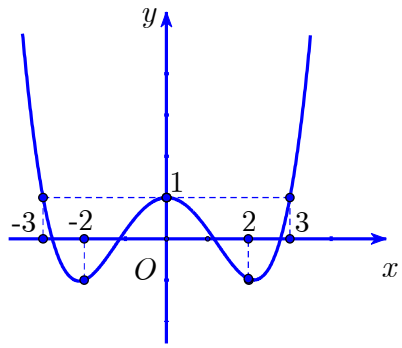
Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$ nên loại hai phương án A, D.

+) Tương tự ta xét

$x\in\left(-\infty;-2\right)\Rightarrow x+2\in\left(-\infty;0\right)\Rightarrow f'\left(x+2\right)<0;x^2-3>0\Rightarrow y'<0;\forall x\in\left(-\infty;-2\right)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ nên loại hai phương án B.

Câu 50.3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2x-1\right)+\dfrac{x^3}{3}+x^2-2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-6;-3\right)$. **B.** $\left(3;6\right)$. **C.** $\left(6;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2f'\left(2x-1\right)+x^2+2x-2=2f'\left(2x-1\right)+\left(x+1\right)^2-3$

Nhận xét: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)\le 1\Leftrightarrow -3\le x\le 3$ và $f'\left(x\right)\ge 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -3\end{array}\right.$

Do đó ta xét các trường hợp

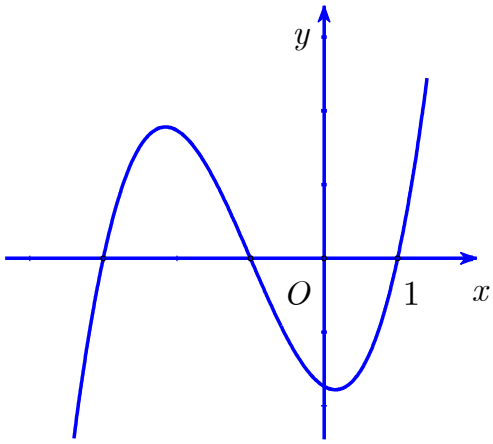
Với $-6<x<-3\Rightarrow -13<2x-1<-7$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $3<x<6\Rightarrow 5<2x-1<11$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $6<x\Rightarrow 11<2x-1$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $-1 < x < 0 \Rightarrow -3 < 2x - 1 < -1$ nên $2f'\left(2x-1\right) \le 2$ và $0 < \left(x+1\right)^2 - 3 < -2$ suy ra $y' < 0$ hàm số đồng biến (nhận)

Câu 50.4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-2019;2019\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(2019^x\right) - mx + 2$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$?



A. 2028. **B.** 2019.
C. 2011. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right) = 2019^x \ln 2019.f'\left(2019^x\right) - m$.

Ta lại có hàm số $y = 2019^x$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

Với $x \in \left[0;1\right]$ thì $2019^x \in \left[1;2019\right]$ mà hàm $y = f'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ nên hàm $y = f'\left(2019^x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

Mà $2019^x > 0; f'\left(2019^x\right) > 0, \forall x \in \left(0;1\right)$ nên hàm $h\left(x\right) = 2019^x \ln 2019.f'\left(2019^x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

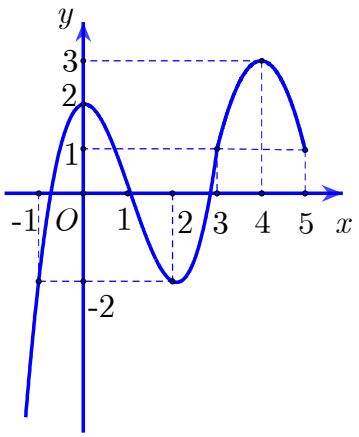
Hay $h\left(x\right) \ge h\left(0\right) = 0, \forall x \in \left[0;1\right]$.

Do vậy, hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right] \Leftrightarrow g'\left(x\right) \ge 0$ với mọi $x \in \left[0;1\right]$

$\Leftrightarrow m \le 2019^x.\ln 2019.f'\left(2019^x\right), \forall x \in \left[0;1\right] \Leftrightarrow m \le 0$.

Vậy $m \le 0$.

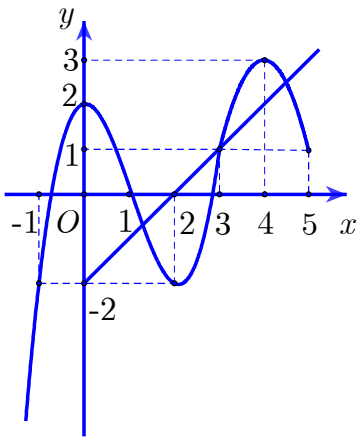
Câu 50.5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f\left(2-x\right) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(-2;-1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $y=-2f(2-x)+x^2 \Rightarrow y'=-(2-x)'2f'(2-x)+2x=2f'(2-x)+2x$

$y'<0 \Leftrightarrow f'(2-x)+x<0 \Leftrightarrow f'(2-x)<(2-x)-2$

Đặt $t=2-x$ suy ra $f'\left(t\right)<t-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=t-2$ cắt đồ thị $y=f'\left(t\right)$ tại ba điểm có hoành độ liên tiếp là $1<a<2;3;4<b<5$

Do đó cùng từ đồ thị ta có

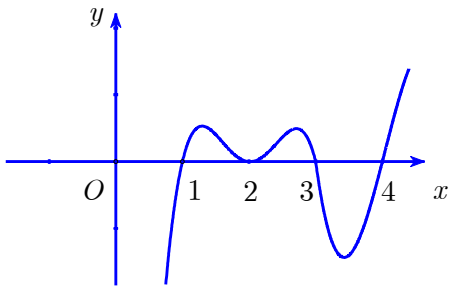
$$f'(t)<t-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<t<3 \\ t>b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<2-x<3 \\ 2-x>b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<2-a \\ x<2-b \end{array}\right.$$

• Vì $1<a<2 \Rightarrow 0<2-a<1$ nên $(-1;0)\subset(-1;2-a)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;2-a\right)$ nên cũng nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$.

• Vì $4<b<5 \Rightarrow -3<2-b<-2$ nên $(-3;-2)\not\subset(-\infty;2-b)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;2-b\right)$ thì không nghịch biến trên $\left(-3;-2\right)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Câu 50.6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3x+1\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(4;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=3\left[f'\left(3x+1\right)+1-x^2\right]$

$f'\left(3x+1\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1<1 \\ 3<3x+1<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \dfrac{2}{3}<x<1 \end{array}\right.$.

$f'\left(3x+1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{2}{3} \\ x>1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'\left(3x+1\right)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'\left(x\right)$		$-$				$+$							

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.